

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Sieben und sechzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1867.
Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des sieben und sechzigsten Bandes.

Ueber die *Steiner*sche Fläche.

(Von Herrn *A. Clebsch* in Giessen.)

---

§. 1. Darstellung der Punkte der *Steiner*schen Fläche durch Parameter.

Die nach *Steiner* benannte Fläche vierter Ordnung hat die Aufmerksamkeit der Geometer in hohem Grade auf sich gezogen, seit Herr *Kummer* in den Berl. Monatsber. ihre ersten Eigenschaften auseinandergesetzt und die Herren *Cremona* und *Schröter* eine grosse Reihe weiterer Eigenschaften derselben aufgedeckt haben.

Die Theorie der auf einer Ebene einfach abbildbaren Flächen, welche ich an einem anderen Orte geben werde, und von der ich bezüglich der Flächen dritter Ordnung ein Beispiel gegeben habe, verleiht dieser Fläche in sofern ein besonderes Interesse, als die Coordinaten eines Punktes derselben sich nach Herrn *Weierstrass* durch *allgemeine* homogene Functionen zweiten Grades von drei Parametern darstellen, und also die erste Classe der eindeutig abbildbaren Flächen bilden.

Eine solche Abbildung ergiebt sich aus der von Herrn *Kummer* gegebenen Gleichungsform

$$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2-2x_1x_2x_3x_4 = 0$$

sofort; denn setzt man

$$x_1=\mu\xi_1,\quad x_2=\mu\xi_2,\quad x_3=\mu\xi_3,$$

so findet sich

$$x_4 = \mu\frac{\xi_1^2\xi_2^2+\xi_1^2\xi_3^2+\xi_2^2\xi_3^2}{2\xi_1\xi_2\xi_3},$$

und man kann also setzen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = 2\xi_1^2\xi_2\xi_3, \\ \varrho x_2 = 2\xi_1\xi_2^2\xi_3, \\ \varrho x_3 = 2\xi_1\xi_2\xi_3^2, \\ \varrho x_4 = \xi_1^2\xi_2^2+\xi_1^2\xi_3^2+\xi_2^2\xi_3^2. \end{cases}$$

Auf diese Weise sind allerdings die Coordinaten eines Punktes der Fläche durch Parameter dargestellt; aber die Formeln vereinfachen sich wesentlich, wenn man die Substitutionen

$$(2.)\quad \xi_2\xi_3=\eta_1,\quad \xi_3\xi_1=\eta_2,\quad \xi_1\xi_2=\eta_3$$

einführt, wodurch unsere Formeln sich in

$$(3.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = 2\eta_2\eta_3, \\ \varrho x_2 = 2\eta_3\eta_1, \\ \varrho x_3 = 2\eta_1\eta_2, \\ \varrho x_4 = \eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2 \end{cases}$$

verwandeln.

Die Formeln (1.) liefern einfach die von dem dreifachen Punkt der Fläche als Augenpunkt ausgeführte perspectivische Projection der Fläche auf eine Ebene, in welcher ξ_1, ξ_2, ξ_3 Coordinaten eines Punktes sind. Die Formeln (2.) liefern eine jener eindeutigen Abbildungen dieser Ebene, welche Herr *Cremona* kennen gelehrt hat; die Formeln (3.) endlich fallen unter die Darstellung des Herrn *Weierstrass*, insofern die Coordinaten durch Functionen zweiten Grades dargestellt sind. Ich werde zunächst zeigen, wie man die allgemeinen Formeln

$$(4.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = f_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3), \\ \varrho x_2 = f_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3), \\ \varrho x_3 = f_3(\eta_1, \eta_2, \eta_3), \\ \varrho x_4 = f_4(\eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{cases}$$

in welcher die f Functionen zweiter Ordnung sind, im Allgemeinen wirklich auf die Form (3.) bringen kann.

§. 2. Reduction der allgemeinen Darstellungsform auf die Normalform.

Schreiben wir der Kürze wegen

$$f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = f(\eta, \eta)$$

und bezeichnen wir durch $f(\eta, \zeta)$ den Ausdruck

$$f(\eta, \zeta) = \tfrac{1}{2}\Sigma\zeta_i\frac{\partial f(\eta, \eta)}{\partial \eta_i} = \tfrac{1}{2}\Sigma\eta_i\frac{\partial f(\zeta, \zeta)}{\partial \zeta_i}.$$

Die Punkte einer Doppellinie bilden sich in der Ebene der η durch je *zwei* Punkte ab; sind also η, ζ zwei solche zusammengehörige Punkte denen derselbe Punkt x entsprechen muss, so hat man

$$(5.)\quad f_i(\eta, \eta) = \sigma^2 f_i(\zeta, \zeta) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wo σ einen unbestimmten Factor bedeutet. Aber man kann dann immer zwei neue Punkte x, λ so einführen, dass

$$(6.)\quad x_i = \eta_i + \sigma\zeta_i, \quad \lambda_i = \eta_i - \sigma\zeta_i,$$

wodurch die Gleichungen (5.) in

$$(7.)\qquad f_i(x,\lambda)=0 \qquad (i=1,2,3,4)$$

übergeben. Die Gleichungen (6.) zeigen, *dass jeder Punkt einer Doppellinie sich als Punktepaar abbildet, welches mit einem gewissen Punktepaar x, λ harmonisch ist; und dass umgekehrt alle Paare einer auf der Geraden x, λ liegenden Involution mit x, λ als Doppelpunkten sich zu Punkten einer Doppellinie vereinigen.*

Die Punktepaare x, λ, welche aus (7.) *folgen, haben zugleich die Eigenschaft, harmonische Pole (und zwar die einzigen) für alle Kegelschnitte des Systems*

$$a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4 = 0$$

zu sein. Die entsprechenden Punkte x sind die Cuspidalpunkte des Herrn *Cremona.*

Die vier Gleichungen (7.) sind linear für die sechs Unbekannten

$$(8.)\qquad x_1\lambda_1,\quad x_2\lambda_2,\quad x_3\lambda_3,\quad x_2\lambda_3+x_3\lambda_2,\quad x_3\lambda_1+x_1\lambda_3,\quad x_1\lambda_2+x_2\lambda_1.$$

Zwischen denselben besteht ausserdem die identische Gleichung dritten Grades:

$$(9.)\qquad 0=\begin{vmatrix} 2x_1\lambda_1 & x_2\lambda_1+x_1\lambda_2 & x_3\lambda_1+x_1\lambda_3 \\ x_1\lambda_2+x_2\lambda_1 & 2x_2\lambda_2 & x_3\lambda_2+x_2\lambda_3 \\ x_1\lambda_3+x_3\lambda_1 & x_2\lambda_3+x_3\lambda_2 & 2x_3\lambda_3 \end{vmatrix}$$

Drückt man also vier der sechs Unbekannten (8.) linear durch die übrigen aus, und führt diese Werthe in (9.) ein, so erhält man für das Verhältniss der beiden letzten eine cubische Gleichung. *Es giebt also drei Punktepaare x, λ, welche den drei Doppellinien der Fläche entsprechen.*

Um dieselben auf eine elegantere Weise zu finden, kann man den Gleichungen (7.) eine fünfte Gleichung

$$(10.)\qquad \varphi(x,\lambda)+\mu\psi(x,\lambda) = 0$$

hinzufügen, in welcher $\varphi=0$, $\psi=0$ die Gleichungen zweier beliebigen Kegelschnitte sind. Man sucht dann diejenigen Kegelschnitte eines willkürlich gewählten Büschels $\varphi+\mu\psi=0$, welche ebenfalls eines der Punktepaare x, λ zu harmonischen Polen haben. Indem man aus den Gleichungen (7.) und (10.) die Verhältnisse der sechs Unbekannten (8.) ausdrückt, gelangt man zu Gleichungen folgender Art:

$$(11.)\qquad \begin{cases} 2x_1\lambda_1 = A_{11}+\mu B_{11}, & x_2\lambda_3+x_3\lambda_2 = A_{23}+\mu B_{23}, \\ 2x_2\lambda_2 = A_{22}+\mu B_{22}, & x_3\lambda_1+x_1\lambda_3 = A_{31}+\mu B_{31}, \\ 2x_3\lambda_3 = A_{33}+\mu B_{33}, & x_1\lambda_2+x_2\lambda_1 = A_{12}+\mu B_{12}, \end{cases}$$

und (9.) verwandelt sich in die für μ cubische Gleichung

$$(12.)\qquad \Sigma\pm(A_{11}+\mu B_{11})(A_{22}+\mu B_{22})(A_{33}+\mu B_{33}) = 0.$$

Bezeichnen wir nunmehr durch α_1, α_2, α_3 Liniencoordinaten, und durch $K=0$, $L=0$ die Gleichungen der Punkte $\varkappa$, λ, so dass

$$K=\alpha_1\varkappa_1+\alpha_2\varkappa_2+\alpha_3\varkappa_3,\quad L=\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\alpha_3\lambda_3.$$

Dann ist nach (11.):

$$\begin{aligned}2KL &= \Sigma\Sigma A_{ik}\alpha_i\alpha_k+\mu\Sigma\Sigma B_{ik}\alpha_i\alpha_k\\ &= \mathrm{A}+\mu\mathrm{B},\end{aligned}$$

wo $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$, Kegelschnitte in Liniencoordinaten bedeuten.

Die drei Punktepaare K, L sind also die drei Paare, welche in einem System von Kegelschnitten $\mathrm{A}+\mu\mathrm{B}=0$ mit vier gemeinschaftlichen Tangenten vorkommen; d. h. sie sind die Durchschnitte von vier Geraden. Die Nebenseiten des aus ihnen gebildeten vollständigen Vierseits sind die Abbildungen der drei Doppellinien der Oberfläche.

Da die Ecken des Dreiecks der Nebenseiten paarweise mit diesen Paaren $\varkappa$, λ harmonisch liegen, so sind sie sämmtlich Abbildungen desselben *dreifachen* Punktes der Oberfläche, welcher allen drei Doppellinien gemeinsam ist.

Wenn ein Kegelschnitt $\varphi+\mu\psi=0$ selbst die Verbindungslinien aller drei Punktepaare $\varkappa$, λ harmonisch theilen soll, so müssen die drei Wurzeln der Gleichung (12.) einander gleich sein, und zugleich auf drei verschiedene Paare $\varkappa$, λ führen, oder auf drei verschiedene Geraden

$$\alpha_1=\varkappa_2\lambda_3-\varkappa_3\lambda_2,\quad \alpha_2=\varkappa_3\lambda_1-\varkappa_1\lambda_3,\quad \alpha_3=\varkappa_1\lambda_2-\varkappa_2\lambda_1,$$

welche solche Paare verbinden. Indessen folgt aus (11.), dass (12.) als das Resultat der Elimination aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}0 &= (A_{11}+\mu B_{11})\alpha_1+(A_{12}+\mu B_{12})\alpha_2+(A_{13}+\mu B_{13})\alpha_3,\\ 0 &= (A_{21}+\mu B_{21})\alpha_1+(A_{22}+\mu B_{22})\alpha_2+(A_{23}+\mu B_{23})\alpha_3,\\ 0 &= (A_{31}+\mu B_{31})\alpha_1+(A_{32}+\mu B_{32})\alpha_2+(A_{33}+\mu B_{33})\alpha_3\end{aligned}$$

aufgefasst werden kann, welche für drei verschiedene nicht durch *einen* Punkt gehende Geraden α nur bestehen können, wenn alle Coefficienten $A_{ik}+\mu B_{ik}$ verschwinden. Dieses aber heisst nach der Entstehungsweise der A, B aus (7.) und (10.), dass $\varphi+\mu\psi$ eine lineare Combination der f, also ein Kegelschnitt des Systems

$$a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4 = 0$$

ist. Also sieht man, ***dass auch umgekehrt alle Kegelschnitte, welche die Strecken $\varkappa\lambda$ gleichzeitig harmonisch theilen, diesem System angehören.***

Zu jeder in der Ebene gezogenen Geraden gehört eine andere, welche mit jener zusammen einen Kegelschnitt des Systems bildet. Man findet sie geometrisch, indem man zu den Schnittpunkten der ersten mit den Strecken $\varkappa\lambda$ die vierten harmonischen Punkte sucht und diese verbindet. Zugleich ist jeder Punkt der Ebene der Doppelpunkt eines solchen Linienpaars. Denn indem man die Bedingungen für das Zerfallen eines Kegelschnitts des Systems für einen gegebenen Punkt ζ bestehen lässt:

$$a_1\frac{\partial f_1}{\partial \zeta_i}+a_2\frac{\partial f_2}{\partial \zeta_i}+a_3\frac{\partial f_3}{\partial \zeta_i}+a_4\frac{\partial f_4}{\partial \zeta_i} = 0,$$

$$(i=1,2,3),$$

erhält man die Verhältnisse der a eindeutig bestimmt, und die Gleichung des Linienpaares wird:

$$\text{(13.)}\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_3} & f_1(\eta,\eta) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_3} & f_2(\eta,\eta) \\ \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta_3} & f_3(\eta,\eta) \\ \frac{\partial f_4}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial f_4}{\partial \zeta_3} & f_4(\eta,\eta) \end{vmatrix} = 0.$$

Der willkürlich gewählte Kegelschnitt

$$a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4 = 0$$

ist das Bild des Durchschnitts einer willkürlich gewählten Ebene

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4 = 0$$

mit der Fläche; also einer Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. Die in dem System enthaltenen Geraden entsprechen den Durchschnitten der Tangentenebenen; jede Gerade in der Ebene ist also das Bild eines Kegelschnitts, welcher auf der Fläche liegt; zwei entsprechende Gerade bilden zusammen das Bild für den Durchschnitt einer Ebene, welche die Fläche in einem Punkte berührt, dessen Bild der Schnittpunkt der Geraden ist.

Untersuchen wir nun, unter welchen Umständen zwei entsprechende Geraden einander unendlich nahe rücken können. Sie müssen sich dann je einem Punkte jedes Paars $\varkappa$, λ unendlich nähern; mithin müssen sie mit einer der vier Geraden zusammenfallen, deren Durchschnitte die Punktepaare

$\varkappa$, λ sind. *Es giebt also vier Kegelschnitte des Systems, welche in Doppellinien ausarten, und zwar sind dies die Seiten des vollständigen Vierseits, dessen Nebenseiten die Doppellinien der Fläche darstellen.*

Diese Linien entsprechen den vier Kegelschnitten, längs deren nach Herrn *Kummer* eine Ebene berührt; und zugleich stellen sie diejenigen Punkte dar, welche den Punkten der *Hesse*schen Wendecurve entsprechen, auf welche schon Herr *Cremona* aufmerksam gemacht hat.

Die directe Darstellung des Products dieser vier Geraden erfolgt, indem man unmittelbar diejenigen Kegelschnitte

$$\varphi = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 = 0$$

aufsucht, welche aus doppelt gerechneten Geraden bestehen. Man hat hiezu, wenn

$$(14.)\qquad m_1\eta_1 + m_2\eta_2 + m_3\eta_3 = 0$$

die Gleichung einer solchen Geraden ist, die Bedingungen:

$$(15.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_1^2} = m_1^2, & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_2\,\partial\eta_3} = m_2 m_3, \\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_2^2} = m_2^2, & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_3\,\partial\eta_1} = m_3 m_1, \\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_3^2} = m_3^2, & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_1\,\partial\eta_2} = m_1 m_2, \end{cases}$$

Das Product jener vier Geraden ergiebt, sich wenn man aus (14.), (15.) die m und die a eliminirt. Die Darstellung der Resultante, welche ein weitergehendes Interesse hat, wird weiter unten gegeben werden.

Wählt man das Coordinatensystem der η nun so, dass es mit dem Dreieck der Nebenseiten zusammenfällt, so kann man den Seiten des Vierseits selbst immer die Form geben:

$$(16.)\qquad \begin{cases} \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \\ \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 = 0, \\ -\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0, \\ -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 = 0, \end{cases}$$

Legt man die Quadrate dieser Linien zugleich als Kegelschnitte f_1, f_2, f_3, f_4 zu Grunde, d. h. wählt man als Coordinatentetraeder im Raume die vier längs Kegelschnitten berührenden Ebenen, so werden die Formeln (4.) zu folgenden:

$$(17.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = (\eta_1+\eta_2+\eta_3)^2, \\ \varrho x_2 = (\eta_1-\eta_2-\eta_3)^2, \\ \varrho x_3 = (-\eta_1+\eta_2-\eta_3)^2, \\ \varrho x_4 = (-\eta_1-\eta_2+\eta_3)^2, \end{cases}$$

woraus die Gleichung der Fläche sich in der Form ergiebt:

$$(18.)\quad \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4} = 0.$$

Führt man aber statt der x die Coordinaten y durch die Formeln ein:

$$(19.)\quad \begin{cases} 4y_1 = x_1+x_2+x_3+x_4, \\ 4y_2 = x_1+x_2-x_3-x_4, \\ 4y_3 = x_1-x_2+x_3-x_4, \\ 4y_4 = x_1-x_2-x_3+x_4, \end{cases}$$

so erhält man die Gleichungen der Fläche in der Form (3.):

$$(19^a.)\quad \begin{cases} \varrho y_1 = \eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2, \\ \varrho y_2 = 2\eta_2\eta_3, \\ \varrho y_3 = 2\eta_3\eta_1, \\ \varrho y_4 = 2\eta_1\eta_2. \end{cases}$$

Die Ebenen der y sind die durch je zwei Doppellinien der Fläche gehenden, und eine vierte (y_1), welche jede der Doppellinien der Fläche in einem Punkt schneidet, welcher mit ihren Cuspidalpunkten und dem dreifachen Punkte ein harmonisches System bildet (*Cremona*).

§. 3. Raumcurven auf der Fläche und ihre Abbildungen.

Denken wir uns in der Ebene der η eine Curve n^{ter} Ordnung gegeben:

$$(20.)\quad \varphi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0,$$

so entspricht derselben eine Raumcurve, deren Singularitäten gefunden werden, wie ich dieses für die Geometrie der Flächen dritter Ordnung im 65sten Bande dieses Journals p. 359 gezeigt habe. Da der Schnitt der Fläche mit einer Ebene durch die Curve

$$(21.)\quad a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4 = 0$$

abgebildet wird, welche von der zweiten Ordnung ist, so hat man den Gleichungen (20.), (21.) entsprechend $2n$ Schnittpunkte der Ebene mit der Raumcurve und also nach der Bezeichnung der angeführten Abhandlung:

$$(22.)\quad N = 2n.$$

Einem Büschel von Schnittebenen entspricht ein Curvenbüschel

$$u+\lambda v = 0,$$

wenn

$$u = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4,$$
$$v = b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 + b_4 f_4$$

gesetzt wird. Die Ebenen des Büschels, welche unsere Raumcurve berühren, werden, wie a. a. O. aus der Combination der Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \Sigma \pm \frac{\partial u}{\partial \eta_1} \frac{\partial v}{\partial \eta_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_3} = 0$$

gefunden, welche $n(n+1)$ gemeinsame Lösungen haben. Hat ausserdem also $\varphi = 0$ noch d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte, so findet man den Rang der Raumcurve aus der Formel

$$(23.) \qquad R = n(n+1) - 2d - 3r.$$

Nimmt man hinzu, dass die charakteristische Zahl p des Geschlechts unverändert bleibt, so ist die Bestimmung der Singularitäten hiemit gegeben. Ist K die Classe der Raumcurve, A die Zahl ihrer Wendungsberührebenen, B die Zahl ihrer Rückkehrpunkte so hat man

$$\begin{aligned} 2p-2 &= R+B-2N, \\ &= N+K-2R, \\ &= R+A-2K, \end{aligned}$$

und wenn man den Werth von p einträgt:

$$p = \frac{n-1 . n-2}{2} - d - r,$$

so findet sich:

$$(24.) \qquad \begin{cases} K = 3n(n-1) - 6d - 8r, \\ A = 6n^2 - 10n - 12d - 15r. \end{cases}$$

Bezüglich der Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte:

$$H = 3\frac{n . n-1}{2}$$

ist zu bemerken, dass aus derselben jedesmal ein Doppelpunkt als wirklicher auszuscheiden ist, sobald zwei Schnittpunkte von $\varphi = 0$ mit einer der Geraden $\varkappa\lambda$ die Strecke $\varkappa\lambda$ auf derselben harmonisch theilen, indem die entsprechenden Punkte sich auf der Fläche dann zu einem Punkte einer Doppellinie vereinigen. Ist also ε die Zahl dieser Paare von Schnittpunkten, so

ist die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Raumcurve durch

$$(25.)\qquad H = 3\frac{n.n-1}{2}-\varepsilon$$

gegeben.

Mit Hülfe dieser Formeln erfolgt die Uebertragung ebener Sätze auf die Raumcurven der *Steiner*schen Fläche ohne Weiteres. Ich will des Folgenden wegen nur bemerken, dass wegen der obigen Formeln einem allgemein gelegten Kegelschnitt eine Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Species entspricht. Theilt der Kegelschnitt eine der drei Strecken $\varkappa\lambda$ harmonisch, so geht von den drei scheinbaren Doppelpunkten der Curve einer in einen wirklichen über. Theilt der Kegelschnitt zwei jener Strecken harmonisch, so ist nach einem Satz von *Hesse* dasselbe mit der dritten der Fall; man hat einen Kegelschnitt des Systems vor sich, und ihm entspricht eine ebene Curve mit drei Doppelpunkten.

§. 4. Curven der Haupttangenten im Allgemeinen und bei der *Steiner*schen Fläche insbesondere.

Die *Steiner*sche Fläche hat die Eigenschaft, dass die Curven der Haupttangenten auf ihr algebraisch sind und die betreffenden Differentialgleichungen sich integriren lassen. Die Curven der Haupttangenten entstehen, wenn man in jedem Punkt der Fläche die dreipunktig berührenden Tangenten sucht und das einer solchen und der Fläche gemeinsame Längenelement als Bogenelement einer Curve betrachtet. Indem man diese Elemente stetig verbindet, erhält man auf der Fläche eine Schaar von Curven, deren zwei durch jeden Punkt gehen; und zwar haben an jeder Stelle die sich schneidenden Curven verschiedene Richtung, mit Ausnahme der Punkte der Wendecurve, in deren jedem daher sich zwei Curven des Systems berühren.

Die Haupttangenten sind die Tangenten des Doppelpunkts der Curve, in welcher die Tangentenebene die Oberfläche schneidet. Haben wir also eine Oberfläche irgendwie mit Hülfe der Formeln

$$\varrho x_i = f_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \qquad (i=1,2,3,4)$$

auf einer Ebene abgebildet, so entsprechen jenen Tangenten die Tangenten des Doppelpunkts, welchen eine Curve des Systems

$$\varphi = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 = 0$$

in einem Punkte des Systems haben kann. Im Doppelpunkt ist dann

$$(26.)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_2}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_3}=0,$$

und die quadratische Gleichung

$$(27.)\qquad \Sigma\Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta_i\partial\eta_k}d\eta_i d\eta_k = 0$$

giebt die Tangentenrichtungen des Doppelpunkts. Eliminirt man aus (26.), (27.) die a, so erhält man die Differentialgleichungen der Curven der Haupttangenten in der Form:

$$(28.)\qquad 0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial\eta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial\eta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial\eta_3} & \Sigma\Sigma\frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_i\partial\eta_k}d\eta_i d\eta_k \\ \frac{\partial f_2}{\partial\eta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial\eta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial\eta_3} & \Sigma\Sigma\frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_i\partial\eta_k}d\eta_i d\eta_k \\ \frac{\partial f_3}{\partial\eta_1} & \frac{\partial f_3}{\partial\eta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial\eta_3} & \Sigma\Sigma\frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_i\partial\eta_k}d\eta_i d\eta_k \\ \frac{\partial f_4}{\partial\eta_1} & \frac{\partial f_4}{\partial\eta_2} & \frac{\partial f_4}{\partial\eta_3} & \Sigma\Sigma\frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_i\partial\eta_k}d\eta_i d\eta_k \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir durch u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 die Coordinaten der beiden Tangenten des Doppelpunkts, so kann man an Stelle von (27.) die Gleichung

$$(u_1 d\eta_1 + u_2 d\eta_2 + u_3 d\eta_3)(v_1 d\eta_1 + v_2 d\eta_2 + v_3 d\eta_3) = 0$$

setzen, d. h. man hat die Gleichungen

$$(29.)\qquad a_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_i\partial\eta_k} + a_2\frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_i\partial\eta_k} + a_3\frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_i\partial\eta_k} + a_4\frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_i\partial\eta_k} = u_i v_k + v_i u_k,$$
$$(i, k = 1, 2, 3),$$

wobei dann die Gleichungen (26.) zu ersetzen sind durch:

$$(30.)\qquad \begin{cases} u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + u_3\eta_3 = 0, \\ v_1\eta_1 + v_2\eta_2 + v_3\eta_3 = 0. \end{cases}$$

Statt nun aus diesen Gleichungen durch Elimination der a, u, v, eine Differentialgleichung in den η zu bilden, kann man zunächst die a, v und die $d\eta$ eliminiren, und erhält dann die Gleichung zwischen den u und den η:

$$(31.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_1^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_1^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_1^2} & 2u_1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_2^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_2^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_2^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_2^2} & 0 & 2u_2 & 0 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_3^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_3^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_3^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_3^2} & 0 & 0 & 2u_3 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_2\partial\eta_3} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_2\partial\eta_3} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_2\partial\eta_3} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_2\partial\eta_3} & 0 & u_3 & u_2 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_3\partial\eta_1} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_3\partial\eta_1} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_3\partial\eta_1} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_3\partial\eta_1} & u_3 & 0 & u_1 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_1\partial\eta_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_1\partial\eta_2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_1\partial\eta_2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_1\partial\eta_2} & u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung versieht in der That die Stelle der Differentialgleichung (28.) in jeder Beziehung. Will man dieselbe in die Differentialgleichung für die η verwandeln, so braucht man nur zu bemerken, dass die Gerade u durch zwei nächste Punkte der gesuchten Curve geht, dass also zugleich

$$u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + u_3\eta_3 = 0,$$
$$u_1 d\eta_1 + u_2 d\eta_2 + u_3 d\eta_3 = 0,$$

und dass also an Stelle der u die ihnen proportionalen Werthe

$$\eta_2 d\eta_3 - \eta_3 d\eta_2, \quad \eta_3 d\eta_1 - \eta_1 d\eta_3, \quad \eta_1 d\eta_2 - \eta_2 d\eta_1$$

gesetzt werden können. Aber *) man kann sie auch, und das ist in dem vorliegenden Falle zweckmässiger, in eine Differentialgleichung für die u verwandeln, indem man bemerkt, dass auch ein Punkt η der gesuchten Curve auf zwei nächsten Tangenten derselben liegt, dass also auch zugleich:

$$\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 = 0,$$
$$\eta_1 du_1 + \eta_2 du_2 + \eta_3 du_3 = 0,$$

so dass man die η ersetzen kann durch die ihnen proportionalen Ausdrücke:

$$u_2 du_3 - u_3 du_2, \quad u_3 du_1 - u_1 du_3, \quad u_1 du_2 - u_2 du_1.$$

Da im Fall der *Steiner*schen Fläche die $\frac{\partial^2 f}{\partial\eta_i \partial\eta_k}$ Constante sind, so verwandelt sich hiedurch die Differentialgleichung zweiten Grades in eine des ersten. Um diese Gleichung in besserer Form zu erhalten, bemerken wir, dass die zweite Tangente v des oben betrachteten Doppelpunkts durch den Schnitt der benachbarten Tangenten u, $u+du$ hindurchgeht, dass man also setzen kann:

$$v_i = u_i + \varrho\, du_i.$$

Führt man dies in (29.) ein, so erhält man die sechs Gleichungen

$$a_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_i \partial\eta_k} + a_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_i \partial\eta_k} + a_3 \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_i \partial\eta_k} + a_4 \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_i \partial\eta_k} = 2u_i u_k + \varrho\, d(u_i u_k),$$

und daher durch Elimination von a_1, a_2, a_3, a_4, ϱ die Differentialgleichung in der Form:

---

*) Die hier folgende Transformation und Integration der Differentialgleichung verdanke ich Herrn *Gordan*.

$$(32.)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_1^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_1^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_1^2} & u_1^2 & d(u_1^2) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_2^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_2^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_2^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_2^2} & u_2^2 & d(u_2^2) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_3^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_3^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_3^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_3^2} & u_3^2 & d(u_3^2) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_2\partial\eta_3} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_2\partial\eta_3} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_2\partial\eta_3} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_2\partial\eta_3} & u_2u_3 & d(u_2u_3) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_3\partial\eta_1} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_3\partial\eta_1} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_3\partial\eta_1} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_3\partial\eta_1} & u_3u_1 & d(u_3u_1) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_1\partial\eta_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_1\partial\eta_2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_1\partial\eta_2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_1\partial\eta_2} & u_1u_2 & d(u_1u_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Bestimmen wir nun constante Grössen p_{ik} so, dass

$$(33.)\quad \begin{cases} \Sigma\Sigma p_{ik}\frac{\partial^2 f_1}{\partial\eta_i\partial\eta_k} = 0, \\ \Sigma\Sigma p_{ik}\frac{\partial^2 f_2}{\partial\eta_i\partial\eta_k} = 0, \\ \Sigma\Sigma p_{ik}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\eta_i\partial\eta_k} = 0, \\ \Sigma\Sigma p_{ik}\frac{\partial^2 f_4}{\partial\eta_i\partial\eta_k} = 0, \end{cases}$$

so ist die Gleichung (32.) erfüllt, wenn zugleich

$$(34.)\quad \Sigma\Sigma p_{ik}u_iu_k = 0$$

gesetzt wird, woraus von selbst folgt, dass auch

$$\Sigma\Sigma p_{ik}d(u_iu_k) = 0.$$

Da nun unter den fünf Verhältnissen der p eines willkürlich angenommen werden kann, so enthält die Gleichung (34.) eine willkürliche Constante und ist demnach das allgemeine Integral von (32.). Wir können eine solche Constante auch dadurch einführen, dass wir eine Gleichung

$$\Sigma\Sigma p_{ik}\alpha_{ik} + \mu\Sigma\Sigma p_{ik}\beta_{ik} = 0$$

hinzufügen, wo die α, β Coefficienten beliebiger Kegelschnitte φ, ψ sind. Aus dieser Gleichung und (33.) folgen dann (vgl. Gleichungen (11.)) die Werthe der p in der Form:

$$p_{ik} = A_{ik} + \mu B_{ik},$$

wobei die A, B völlig bestimmt sind, und nur μ eine willkürliche Constante bedeutet. Setzt man nun

$$A = \Sigma\Sigma A_{ik} u_i u_k,$$
$$B = \Sigma\Sigma B_{ik} u_i u_k,$$

so nimmt das Integral (34.) die Form an

$$A + \mu B = 0,$$

d. h. die Curven der Haupttangenten bilden sich als Kegelschnitte mit vier gemeinschaftlichen Tangenten ab. Die in dem System vorkommenden Punktepaare sind keine anderen als die in §. 2 als Punktepaare dieses Systems gefundenen Paare $\varkappa$, λ; und die vier gemeinsamen Tangenten sind demnach dieselben, deren Aggregat die Abbildung der Wendecurve darstellt.

Uebertragen wir diese Resultate auf die Fläche, so haben wir den Satz:

Die Curven der Haupttangenten auf der Steinerschen Fläche sind diejenigen auf der Fläche gelegenen Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Species, welche jeden der vier Kegelschnitte berühren, in welche die Wendecurve zerfällt.

Legen wir die *Steiner*sche Fläche in der besonderen Form (17.) oder (19ᵃ.) zu Grunde, so haben die drei Punktepaare $\varkappa$, λ die Gleichungen:

$$(34^a.) \qquad u_1^2 - u_2^2 = 0, \quad u_2^2 - u_3^2 = 0, \quad u_3^2 - u_1^2 = 0.$$

Die Abbildungen der Curven der Haupttangenten sind daher durch die Formel gegeben:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0, \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0)$$

oder in Punktcoordinaten durch:

$$(35.) \qquad \frac{\eta_1^2}{\alpha_1} + \frac{\eta_2^2}{\alpha_2} + \frac{\eta_3^2}{\alpha_3} = 0.$$

Untersuchen wir, welche Curven der Haupttangenten einen wirklichen Doppelpunkt besitzen. Hiezu ist es nöthig, dass der Kegelschnitt (35.) eine der Seiten des Coordinatendreiecks in Punkten schneide, welche zu dem betreffenden Paare (34ᵃ.) harmonisch sind. So hat man für $\eta_1 = 0$ als Schnitt des Kegelschnitts (35.) das Punktepaar

$$\alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0.$$

Soll dieses mit $u_2 \pm u_3 = 0$ harmonisch sein, so muss es in

$$(u_2 + u_3)^2 + (u_2 - u_3)^2 = 0$$

übergehen, d. h. es muss $\alpha_2 = \alpha_3$ sein. *Es giebt also drei Curven der Haupttangenten mit wirklichem Doppelpunkt;* die Bilder derselben haben die Glei-

chungen:

$$2\eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 = 0,$$
$$-\eta_1^2 + 2\eta_2^2 - \eta_3^2 = 0,$$
$$-\eta_1^2 - \eta_2^2 + 2\eta_3^2 = 0.$$

Die Doppelpunkte selbst entsprechen den Durchschnitten dieser Kegelschnitte beziehungsweise mit

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 0;$$

für sie ist also immer

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 0$$

oder $\eta_1 = 0$ (19^a.). *Die Doppelpunkte jener drei Curven sind also die auf den Doppellinien der Fläche zu den Cuspidalpunkten und dem dreifachen Punkt harmonisch gelegenen Punkte.*

§. 5.

Die Curve der Wendepunkte für Flächen deren Coordinaten durch Parameter rational ausdrückbar sind.

Die Punkte der Wendecurve einer Oberfläche sind dadurch charakterisirt, dass die Richtungen der Haupttangenten in ihnen zusammenfallen oder dass die Geraden, welche in der Bildebene die Richtungen der Tangenten des Doppelpunktes einer Curve des Systems $a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 = 0$ geben, sich vereinigen. Die Coordinaten dieser Geraden aber findet man aus (31.), wenn man diese in den u quadratische Gleichung mit der linearen

$$(36.) \qquad \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 = 0$$

verbindet.

Ist aber die linke Seite der Gleichung (31.), nach den u geordnet:

$$(37.) \qquad \Sigma\Sigma D_{ik} u_i u_k = 0,$$

so wird die Bedingung dafür, dass die Gleichungen (36.), (37.) durch zwei unendlich wenig verschiedene Systeme von Lösungen erfüllt werden, die Gleichung für die Abbildung der Wendecurve. Dies heisst aber, dass der Punkt η ein Punkt des durch (37.) repräsentirten Kegelschnitts in Liniencoordinaten sein soll. Man hat also die Bedingung

$$(38.) \qquad \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & \eta_1 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & \eta_2 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & \eta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

als Gleichung für jene Abbildung. Diese Gleichung stellt zugleich das Eliminationsresultat aus (14.), (15.) dar, welches mit der Abbildung der Wendecurve übereinstimmt.

Dass die Gleichung (38.) das fragliche Resultat ohne überflüssigen Factor liefert, folgt aus der Vergleichung der Ordnungen bei der *Steiner*schen Fläche. Die Abbildung der Wendecurve zerfällt für sie in vier Gerade; und in der That ist (38.) eine Gleichung vierten Grades, da die D lineare Functionen der η sind. Allgemein aber hat man den Satz:

Eine Fläche, deren Coordinaten sich als homogene rationale Functionen n^{ter} Ordnung dreier Parameter darstellen, hat eine Wendecurve, deren Bild von der Ordnung $8n-12$, und welche also selbst von der Ordnung $n(8n-12)$ ist.

Da die betreffende Fläche im Allgemeinen vom Grade n^2 ist, so wird die Wendecurve, als Schnitt der Fläche selbst mit ihrer *Hesse*schen Fläche betrachtet, vom Grade $4n^2(n^2-2)$; woraus sich für die vorliegenden besonderen Flächen eine Erniedrigung des Grades der Wendecurve um

$$4n(n-1)(n^2-n+3)$$

Einheiten ergiebt.

§. 6.

Besonderer Fall der *Steiner*schen Fläche.

Das vollständige Vierseit, welches mit dem Dreieck seiner Nebenseiten die Abbildung der *Steiner*schen Fläche characterisirt, kann dadurch ausarten, dass zwei seiner Seiten einander unendlich nahe rücken. Wir erhalten dann statt des Vierseits eine Doppelgerade $\eta_1 = 0$ und zwei einfache Geraden $\eta_2 \pm \eta_3 = 0$; zwei der Punktepaare x, λ vereinigen sich zu einem Punktepaar ($\eta_1 = 0$, $\eta_2 \pm \eta_3 = 0$), in welchem die Doppelgerade von den beiden einfachen Geraden geschnitten wird; das dritte Punktepaar x, λ ist ein Punkt der Doppelgeraden ($\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$) und der Schnitt der beiden einfachen Geraden ($\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$).

Das Kegelschnittsystem

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 = 0$$

muss also die Strecke zwischen

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 + \eta_3 = 0 \quad \text{und} \quad \eta_1 = 0, \quad \eta_2 - \eta_3 = 0,$$

sowie die Strecke zwischen

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 0 \quad \text{und} \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = 0$$

harmonisch theilen. Daher müssen die Kegelschnitte des Systems die Form haben

$$a\eta_1^2+b(\eta_2^2+\eta_3^2)+2c\eta_1\eta_2+2d\eta_2\eta_3 = 0,$$

und man kann die Fläche daher durch die Gleichungen darstellen:

$$(39.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = \eta_1^2, \\ \varrho x_2 = \eta_2^2+\eta_3^2, \\ \varrho x_3 = 2\eta_1\eta_2, \\ \varrho x_4 = 2\eta_2\eta_3, \end{cases}$$

woraus die Gleichung der Fläche sich in der Form ergiebt:

$$x_3^4+4x_4^2x_1^2-4x_1x_2x_3^2 = 0.$$

Diese Fläche besitzt im Punkte $x_1=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ (in der Abbildung $\eta_1=0$, $\eta_2=0$ und $\eta_1=0$, $\eta_3=0$) einen dreifachen Punkt; durch ihn geht eine Doppellinie $x_3=0$, $x_4=0$ ($\eta_2=0$), längs deren die Fläche sich einem Hyperboloid anschliesst, und eine zweite $x_1=0$, $x_3=0$ ($\eta_1=0$), welche die Vereinigung zweier unendlich naher Doppellinien ist, und längs deren die Fläche von der Ebene $x_1=0$ berührt wird. Jede Ebene schneidet also diese Fläche in einer Curve vierter Ordnung, welche bei $x_3=0$, $x_4=0$ einen Doppelpunkt hat, und von welcher zwei Zweige bei $x_1=0$, $x_3=0$ einander berühren. Eine Tangentenebene schneidet also in zwei Kegelschnitten, welche sich berühren, und der Berührungspunkt liegt auf $x_1=0$, $x_3=0$. Die Gerade $x_1=0$, $x_3=0$ absorbirt zugleich zwei der Kegelschnitte, längs deren die Fläche von einer Ebene berührt werden kann, so dass nur noch zwei dieser Kegelschnitte übrig bleiben, welche sich als die Geraden $\eta_2=0$, $\eta_3=0$ abbilden.

Die Curven der Haupttangenten bilden sich hier wie im allgemeinen Falle als Kegelschnitte ab, welche vier gemeinsame Tangenten besitzen. Aber von diesen sind zwei in die Gerade $\eta_1=0$ zusammengefallen, auf welcher der Punkt $\eta_1=0$, $\eta_2=0$ als Schnittpunkt der beiden zusammengefallenen Geraden anzusehen ist. Daher müssen die Kegelschnitte, welche die Bilder jener Curven werden, hier sämmtlich durch diesen Punkt gehen und in ihm die Gerade $\eta_1=0$ zur Tangente haben, während sie ausserdem die Geraden $\eta_2\pm\eta_3=0$ ebenfalls zu Tangenten haben. In der That erhält man aus der oben gegebenen allgemeinen Formel für diese Curven in Liniencoordinaten die Gleichung

$$2u_1u_3+c(u_3^2-u_2^2) = 0,$$

in welcher c eine willkürliche Constante ist, und an welcher diese Eigenschaften sich leicht nachweisen lassen. Dieselbe liefert in Punktcoordinaten das System

$$c^2\eta_1^2 - 2c\eta_1\eta_3 + \eta_2^2 = 0.$$

Indem man aus dieser Gleichung η_3 durch η_1 und η_2 ausdrückt, und den erhaltenen Ausdruck in die Gleichungen (39.) einführt, findet man die Gleichungen des Systems von Raumcurven vierter Ordnung:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= 4c^2\eta_1^4,\\
\varrho x_2 &= 4c^2\eta_1^2\eta_2^2 + (c^2\eta_1^2+\eta_2^2)^2,\\
\varrho x_3 &= 8c^2\eta_1^3\eta_2,\\
\varrho x_4 &= 4c\eta_1\eta_2(c^2\eta_1^2+\eta_2^2).
\end{aligned}$$

Diese Curven berühren sämmtlich die beiden Kegelschnitte, längs deren die Fläche von einer Ebene berührt wird; sie berühren ausserdem die Gerade $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ in dem dreifachen Punkt der Fläche dreipunktig.

§. 7.

Windschiefe Fläche dritter Ordnung.

Fallen von den Seiten des Vierseits nicht nur zwei in eine Gerade $\eta_1 = 0$, sondern auch noch die beiden anderen in eine Gerade $\eta_2 = 0$ zusammen, so vereinigen sich zwei Punktepaare $\varkappa$, λ im Schnittpunkte dieser Geraden, das dritte Paar besteht aus einem Punkte von $\eta_1 = 0$ und aus einem Punkte von $\eta_2 = 0$; die Verbindungslinie beider sei $\eta_3 = 0$. Die Kegelschnitte des Systems

$$a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 + a_4f_4 = 0,$$

welche die drei Strecken $\varkappa\lambda$ harmonisch theilen sollten, müssen jetzt die dritte Strecke ebenfalls noch harmonisch theilen; die harmonische Theilung der anderen beiden aber verwandelt sich in die Bedingung, dass alle Kegelschnitte des Systems durch den Punkt $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ hindurchgehen. Die Kegelschnitte des Systems sind also durch die Formel gegeben:

$$a_1\eta_1^2 + a_2\eta_2^2 + 2a_3\eta_1\eta_3 + 2a_4\eta_2\eta_3 = 0,$$

oder man kann setzen:

$$(40.)\quad \begin{cases}
\varrho x_1 = \eta_1^2,\\
\varrho x_2 = \eta_2^2,\\
\varrho x_3 = 2\eta_1\eta_3,\\
\varrho x_4 = 2\eta_2\eta_3,
\end{cases}$$

woraus als Gleichung der Fläche hervorgeht:

$$x_1 x_4^2 - x_2 x_3^2 = 0.$$

Man hat also eine windschiefe Fläche dritter Ordnung vor sich, deren einfache Leitlinie ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) durch den Punkt $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ abgebildet ist; ihre Doppellinie ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$) ist durch die Gerade $\eta_3 = 0$ in der Weise abgebildet, dass je zwei zu den Schnittpunkten mit $\eta_1 = 0$ und $\eta_2 = 0$ harmonische Punkte denselben Punkt der Doppellinie repräsentiren. Die Paare von Erzeugenden endlich, welche von den verschiedenen Punkten der Doppellinie ausgehen, bilden sich als die Involution der Strahlen ab, welche $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ mit den auf $\eta_3 = 0$ angegebenen Punktepaaren verbinden.

Haben wir in der Ebene eine Curve $\varphi = 0$ gegeben, deren Ordnung n ist, welche den Punkt $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ zum αfachen Punkt besitzt und ausserdem d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte hat, so entspricht dieselbe einer Raumcurve, für welche (vgl. §. 3):

$$(40^a.)\quad \begin{cases} N = 2n - \alpha, \\ R = n(n+1) - 2d - 3r - \alpha(\alpha+1), \\ K = 3n(n-1) - 6d - 8r - 3\alpha^2, \\ A = 6n(n-1) - 12d - 15r - 2\alpha(3\alpha-1), \\ H = 3\dfrac{n.n-1}{2} - n\alpha + \alpha(\alpha+1) - \varepsilon. \end{cases}$$

In der letzten Zahl bedeutet ε die Anzahl der Schnittpunktpaare von $\varphi = 0$ mit $\eta_3 = 0$, welche mit den Punkten $\eta_1 = 0$, $\eta_3 = 0$ und $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$ harmonisch liegen und sich also auf der Raumcurve zu einem wirklichen Doppelpunkte vereinigen.

Die Curven der Haupttangenten zerfallen in die Schaar der Erzeugenden selbst, und in eine Schaar von Curven, welche in der Abbildung als Kegelschnitte die Seiten des Vierseits berühren, d. h. deren Bilder durch die Punkte $\eta_1 = 0$, $\eta_3 = 0$ und $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$ gehen, und in diesen Punkten beziehungsweise die Geraden $\eta_1 = 0$ und $\eta_2 = 0$ zu Tangenten haben. Die Gleichung des Systems ist daher:

$$\eta_1 \eta_2 = c\eta_3^2.$$

Auf der Fläche werden dies Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Species, welche durch die Cuspidalpunkte der Doppellinie gehen, und in ihnen die betreffenden Erzeugenden berühren.

Es entsteht endlich der von Herrn *Cayley* bemerkte besondere Fall

der windschiefen Fläche dritter Ordnung, wenn die beiden Doppelstrahlen der Involution der abgebildeten Erzeugenden einander unendlich nahe rücken. Dieser ergiebt sich aus der directen Behandlung der Fläche dritter Ordnung auf folgende Weise.

Seien $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$ die Gleichungen von vier Kegelschnitten, welche durch denselben Punkt $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ gehen, so dass also etwa:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \alpha_{11}\eta_1^2+2\alpha_{12}\eta_1\eta_2+\alpha_{22}\eta_2^2+2\alpha_{13}\eta_1\eta_3+2\alpha_{23}\eta_2\eta_3,\\
f_2 &= \beta_{11}\eta_1^2+2\beta_{12}\eta_1\eta_2+\beta_{22}\eta_2^2+2\beta_{13}\eta_1\eta_3+2\beta_{23}\eta_2\eta_3,\\
f_3 &= \gamma_{11}\eta_1^2+2\gamma_{12}\eta_1\eta_2+\gamma_{22}\eta_2^2+2\gamma_{13}\eta_1\eta_3+2\gamma_{23}\eta_2\eta_3,\\
f_4 &= \delta_{11}\eta_1^2+2\delta_{12}\eta_1\eta_2+\delta_{22}\eta_2^2+2\delta_{13}\eta_1\eta_3+2\delta_{23}\eta_2\eta_3.
\end{aligned}$$

Unter der Kegelschnittschaar

$$a_1 f_1+a_2 f_2+a_3 f_3+a_4 f_4 = 0$$

giebt es solche, die aus einer doppelt gerechneten Geraden bestehen. Für diese muss die linke Seite der obigen Gleichung in

$$(p_1\eta_1+p_2\eta_2)^2$$

übergehen, man muss also haben:

$$\begin{aligned}
a_1\alpha_{11}+a_2\beta_{11}+a_3\gamma_{11}+a_4\delta_{11} &= p_1^2,\\
a_1\alpha_{12}+a_2\beta_{12}+a_3\gamma_{12}+a_4\delta_{12} &= p_1 p_2,\\
a_1\alpha_{22}+a_2\beta_{22}+a_3\gamma_{22}+a_4\delta_{22} &= p_2^2,\\
a_1\alpha_{13}+a_2\beta_{13}+a_3\gamma_{13}+a_4\delta_{13} &= 0,\\
a_1\alpha_{23}+a_2\beta_{23}+a_3\gamma_{23}+a_4\delta_{23} &= 0.
\end{aligned}$$

Es ergiebt sich hieraus für $\frac{p_1}{p_2}$ die quadratische Gleichung:

$$(41.)\qquad \begin{vmatrix}
\alpha_{11} & \beta_{11} & \gamma_{11} & \delta_{11} & p_1^2\\
\alpha_{12} & \beta_{12} & \gamma_{12} & \delta_{12} & p_1 p_2\\
\alpha_{22} & \beta_{22} & \gamma_{22} & \delta_{22} & p_2^2\\
\alpha_{13} & \beta_{13} & \gamma_{13} & \delta_{13} & 0\\
\alpha_{23} & \beta_{23} & \gamma_{23} & \delta_{23} & 0
\end{vmatrix} = 0,$$

oder, wenn man die Unterdeterminanten nach der letzten Verticalreihe durch A_{11}, $2A_{12}$, ... $2A_{23}$ bezeichnet, die Gleichung

$$(42.)\qquad A_{11}p_1^2+2A_{12}p_1p_2+A_{22}p_2^2 = 0.$$

Ausser den hierdurch gegebenen beiden ausgezeichneten Geraden kann man noch folgendermassen eine dritte aufstellen. Wenn man nur die Bedin-

gung aufstellt, dass ein Kegelschnitt des Systems in zwei Gerade zerfallen soll, von denen eine nothwendig durch den Punkt $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ gehen muss, so erhält man dieselben, indem man identisch

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4 = (q_1 \eta_1 + q_2 \eta_2)(r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2 + r_3 \eta_3)$$

setzt, aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 \alpha_{11} + a_2 \beta_{11} + a_3 \gamma_{11} + a_4 \delta_{11} &= q_1 r_1, \\ a_1 \alpha_{12} + a_2 \beta_{12} + a_3 \gamma_{12} + a_4 \delta_{12} &= \tfrac{1}{2}(q_1 r_2 + q_2 r_1), \\ a_1 \alpha_{22} + a_2 \beta_{22} + a_3 \gamma_{22} + a_4 \delta_{22} &= q_2 r_2, \\ a_1 \alpha_{13} + a_2 \beta_{13} + a_3 \gamma_{13} + a_4 \delta_{13} &= \tfrac{1}{2} p_1 r_3, \\ a_1 \alpha_{23} + a_2 \beta_{23} + a_3 \gamma_{23} + a_4 \delta_{23} &= \tfrac{1}{2} q_2 r_3 \end{aligned}$$

oder, indem man die a eliminirt, aus der *einen* Gleichung:

$$q_1(A_{11} r_1 + A_{12} r_2 + A_{13} r_3) + q_2(A_{21} r_1 + A_{22} r_2 + A_{23} r_3) = 0.$$

Der zu einer gegebenen Geraden r gehörige Strahl des Büschels $\eta_1 + \lambda \eta_2 = 0$ ist daher im Allgemeinen eindeutig bestimmt. Aber er wird unbestimmt, wenn die r aus den Gleichungen bestimmt werden:

$$(43.) \quad \begin{cases} A_{11} r_1 + A_{12} r_2 + A_{13} r_3 = 0, \\ A_{21} r_1 + A_{22} r_2 + A_{23} r_3 = 0, \end{cases}$$

welche im Allgemeinen die Lage der Geraden r vollständig bestimmen. Mit dieser Geraden bildet jede Gerade des Büschels $\eta_1 + \lambda \eta_2 = 0$ einen Kegelschnitt des Systems.

Legt man die aus (42.) bestimmten Geraden als Gerade $\eta_1 = 0$ und $\eta_2 = 0$, so wie die aus (43.) bestimmte als $\eta_3 = 0$ zu Grunde, so kann man als Fundamentalkegelschnitte des Systems die Kegelschnitte

$$\eta_1^2 = 0, \quad \eta_2^2 = 0, \quad \eta_1 \eta_3 = 0, \quad \eta_2 \eta_3 = 0$$

ansehen, und kommt damit für die Darstellung einer durch die Gleichungen

$$\varrho x_i = f_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

gegebenen Fläche auf die Gleichungen (40.).

Der oben erwähnte Ausnahmefall tritt ein, wenn die Gleichung (41.) gleiche Wurzeln hat. Dann ist zugleich

$$\begin{aligned} A_{11} p_1 + A_{21} p_2 &= 0, \\ A_{12} p_1 + A_{22} p_2 &= 0; \end{aligned}$$

und die Gleichungen (43.) liefern also

$$r_3 = 0, \quad r_1 : r_2 = p_1 : p_2.$$

Die drei im Vorigen bevorzugten Geraden fallen also in *eine* zusammen.

Denken wir uns diese eine Gerade zur Axe $\eta_1 = 0$ gewählt, und zugleich das Tetraeder der x so verändert, dass eine der Functionen f in η_1^2 übergeht, während die übrigen den Term η_1^2 nicht mehr enthalten. Man hat dann für die so modificirten Functionen

$$\alpha_{11} = 1, \qquad \alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = \beta_{11} = \gamma_{11} = \delta_{11} = 0;$$

die Gleichung (41.) geht über in

$$0 = \begin{vmatrix} \beta_{12} & \gamma_{12} & \delta_{12} & p_1 p_2 \\ \beta_{22} & \gamma_{22} & \delta_{22} & p_2^2 \\ \beta_{13} & \gamma_{13} & \delta_{13} & 0 \\ \beta_{23} & \gamma_{23} & \delta_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

Diese Gleichung hat nur dann, wie es hier eintreten soll, zwei gleiche Wurzeln, wenn

$$\begin{vmatrix} \beta_{22} & \gamma_{22} & \delta_{22} \\ \beta_{13} & \gamma_{13} & \delta_{13} \\ \beta_{23} & \gamma_{23} & \delta_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass man aus den Functionen f_2, f_3, f_4 die Terme η_2^2, $\eta_1\eta_3$, $\eta_2\eta_3$ gleichzeitig fortschaffen kann; es giebt also eine Combination, welche nur den Term $\eta_1\eta_2$ enthält, und wir setzen demnach $f_2 = 2\eta_1\eta_2$, und wählen für f_3, f_4 solche Combinationen, welche auch diesen Term nicht mehr enthalten, so dass nun:

$$\beta_{12} = 1, \qquad \gamma_{12} = \delta_{12} = \beta_{22} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0.$$

Zwischen den Coefficienten von f_3 und f_4 bleibt dann keine Bedingung mehr zu erfüllen. Man kann diese letzten Functionen so einrichten, dass sie je einen der Terme η_2^2, $\eta_1\eta_3$, $\eta_2\eta_3$ nicht enthalten; eliminirt man insbesondere den Term $\eta_1\eta_3$, so dass eine Function entsteht, welche η_2 als Factor enthält, und nimmt ihren anderen Factor für η_3, so wird eine dritte Function von der Form $\eta_2\eta_3$, und es bleibt endlich für die vierte die Form $\eta_2^2 + 2\eta_1\eta_3$ übrig. Man kann daher die Fläche durch die Formeln darstellen:

$$(44.) \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = \eta_1^2, \\ \varrho x_2 = 2\eta_1\eta_2, \\ \varrho x_3 = 2\eta_2\eta_3, \\ \varrho x_4 = \eta_2^2 + 2\eta_1\eta_3. \end{cases}$$

Die Gleichung der Fläche wird hienach

$$x_2^3 = 4x_1(x_2x_4 - 2x_1x_3),$$

was die Form des Herrn *Cayley* ist.

Die Gleichungen der Curven der Haupttangenten entspringen für diese Fläche aus der Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & d\eta_1^2 \\ \eta_2 & \eta_1 & 0 & 2d\eta_1 d\eta_2 \\ 0 & \eta_3 & \eta_2 & 2d\eta_3 d\eta_2 \\ \eta_3 & \eta_2 & \eta_1 & d\eta_2^2 + 2d\eta_1 d\eta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe zerfällt in den Factor

$$\eta_1 d\eta_2 - \eta_2 d\eta_1 = 0,$$

welcher $\eta_1 - c\eta_2 = 0$, also die Bilder der Erzeugenden liefert, und in den Factor

$$\eta_2(\eta_1 d\eta_2 - \eta_2 d\eta_1) + 2\eta_1(\eta_3 d\eta_1 - \eta_1 d\eta_3) = 0,$$

welcher durch Integration

$$(45.) \qquad \eta_2^2 + c\eta_1^2 - 4\eta_1\eta_3 = 0$$

liefert. Diese Gleichung stellt die Abbildungen der Curven der Haupttangenten dar: ein System von Kegelschnitten, welche sich im Schnitt von $\eta_1 = 0$ mit $\eta_2 = 0$ vierpunktig berühren. Da alle diese Curven durch den Punkt $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$ gehen, so ist in die Formeln (40^a.) $\alpha = 1$ zu setzen; die Curven der Haupttangenten sind also Raumcurven dritter Ordnung. In der That geben die Gleichungen (44.) eine solche, wenn man η_3 aus (45.) durch η_1, η_2 ausdrückt, nämlich:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= 2\eta_1^3, \\ \varrho x_2 &= 4\eta_1^2\eta_2, \\ \varrho x_3 &= \eta_2(\eta_2^2 + c\eta_1^2), \\ \varrho x_4 &= 2\eta_1\eta_2^2 + \eta_1(\eta_2^2 + c\eta_1^2). \end{aligned}$$

Alle Curven dieses Systems haben im Punkte $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ dieselbe Schmiegungsebene $x_1 = 0$, und dieselbe Tangente $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, die Doppellinie der Fläche.

Giessen, den 24. Juli 1866.

Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades.

(Von Herrn *H. Schwarz.*)

Die vorliegende Abhandlung ist eine weitere Ausführung einer Notiz über die geradlinigen Flächen fünften Grades, welche der Verfasser im Juni 1864 der philosophischen Facultät hiesiger Universität vorgelegt hat.

Da die geradlinigen Flächen dritten und vierten Grades schon von den Herren *Cayley*, *Cremona* und *Salmon* eingehend untersucht worden sind, darf sich der Verfasser im Folgenden auf die Betrachtung der geradlinigen Flächen des fünften Grades beschränken, ohne auf diejenigen der niederen Grade einzugehen. —

Mit Ausnahme der erzeugenden Geraden gehören alle ebenen Curven, welche auf derselben irreduciblen geradlinigen Fläche liegen, und die Eigenschaft haben, dass durch jeden ihrer Punkte nur eine Erzeugende geht, in dem von *Riemann* aufgestellten Sinne zu derselben algebraischen Klasse.

Betrachtet man nämlich irgend zwei einfache ebene Curven auf derselben irreduciblen geradlinigen Fläche, so wird einem jeden Punkte der einen Curve durch die Erzeugenden der Fläche ein Punkt der anderen Curve auf eindeutige Weise zugeordnet, und es lassen sich daher die Coordinaten eines Punktes der einen Curve rational ausdrücken durch die Coordinaten des entsprechenden Punktes der anderen Curve und umgekehrt.

Aus diesem Grunde kann man die geradlinigen Flächen nach der algebraischen Klasse der auf ihnen liegenden ebenen Curven selbst in Klassen eintheilen. (S. d. Verf.: *De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum,* Bd. 64, pag. 2 dieses Journals.)

Aus der Existenz einer einzigen einfachen geraden Leitlinie auf der Fläche, eines einfachen Kegelschnitts, einer einfachen Curve dritten Grades mit Doppelpunkt, oder überhaupt einer einfachen Curve mit der grössten Anzahl von Doppelpunkten kann daher der Schluss gezogen werden, dass die geradlinige Fläche zur Klasse $\rho = 0$ gehört.

Findet sich auf der Fläche eine einfache ebene Curve dritten Grades ohne Doppelpunkt, eine Curve vierten Grades mit zwei Doppelpunkten, überhaupt eine einfache ebene Curve n^{ten} Grades mit $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-1$ Doppelpunkten, so gehört die Fläche zur Klasse $\rho = 1$.

Enthält die Fläche eine einfache ebene Curve vierten Grades mit nur einem Doppelpunkt, so gehört die Fläche zur Klasse $\varrho = 2$. U. s. w.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer algebraischen Fläche lassen sich als rationale Functionen zweier variablen Parameter s und t und einer algebraischen Function u derselben darstellen. Bei den geradlinigen Flächen ist es stets möglich, diese Parameter so zu wählen, dass die Ausdrücke der homogenen Coordinaten

$$x : y : z : w$$

eines beliebigen Punktes der Fläche ganze lineare Functionen des einen Parameters s sind, während die algebraische Grösse u nur von dem anderen Parameter t abhängt.

Der andere Parameter t kann dann so gewählt werden, dass die Coordinaten, wenn $\varrho = 0$ ist, in Bezug auf denselben rationale ganze Functionen sind; wenn $\varrho = 1$, rational ausgedrückt sind durch t und eine Quadratwurzel aus einer ganzen Function dritten oder vierten Grades von t; wenn $\varrho = 2$, rational ausgedrückt sind durch t und eine Quadratwurzel aus einer ganzen Function fünften oder sechsten Grades von t. — Der Fall $\varrho > 2$ führt auf höhere algebraische Irrationalitäten.

Diese Beziehungen gelten auch umgekehrt, so dass, wenn man für $x : y : z : w$ Ausdrücke setzt, die in Bezug auf t und u rational, in Bezug auf s linear und ganz sind, während zwischen t und u eine irreducible algebraische Gleichung $f(t, u) = 0$ besteht, man eine algebraische geradlinige Fläche erhält, welche im Allgemeinen zu derselben algebraischen Klasse gehört, zu welcher die Gleichung $f(t, u) = 0$ gehört.

Zur geometrischen Construction der besonderen Fälle der geradlinigen Flächen fünften Grades werde ich mich meist der Anschauung bedienen, die Flächen entstehen zu lassen als geometrischen Ort der geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier Curven, welche in der Weise auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte der einen ein Punkt der anderen entspricht und umgekehrt.

Für die analytische Darstellung aber ist es mitunter vorzuziehen, aus den Ausdrücken $x : y : z : w$ durch Elimination von s zwei in Bezug auf x, y, z, w lineare homogene Gleichungen hergeleitet zu denken, in den Coefficienten rational in t und u, so dass die Fläche der geometrische Ort der Durchschnittslinien der durch diese Gleichungen dargestellten Ebenen ist.

§. 1.

Allgemeine Untersuchung der verschiedenen möglichen geradlinigen Flächen fünften Grades.

Eine durch eine Erzeugende einer geradlinigen Fläche fünften Grades gelegte Ebene hat ausser der Erzeugenden mit der Fläche noch ein ebenes Gebilde vierten Grades gemein.

Von den vier Durchschnittspunkten der Geraden mit diesem Gebilde ist nur einer Berührungspunkt der Ebene und der Fläche; die anderen drei Durchschnittspunkte sind zugleich Doppelpunkte der Fläche, durch welche daher ausser der einen Erzeugenden noch je eine zweite Erzeugende hindurchgeht.

Jede Erzeugende der Fläche wird also im Allgemeinen von drei anderen Erzeugenden geschnitten, und es giebt daher unendlich viele Ebenen, welche durch zwei Erzeugende der Fläche hindurchgehen.

Die Betrachtung dieser Ebenen bietet den Ausgangspunkt für unsere Untersuchung.

Eine jede Ebene, welche durch zwei erzeugende Gerade einer geradlinigen Fläche fünften Grades hindurchgeht, schneidet ausser den beiden Geraden noch ein Gebilde dritten Grades aus. Dieses Gebilde kann irreducibel sein oder selbst wieder zerfallen.

Wenn überhaupt der Schnitt einer Ebene und einer irreduciblen geradlinigen Fläche zerfällt, so kann er nur in eine gewisse Anzahl Erzeugende und einen irreduciblen Theil von der Beschaffenheit zerfallen, dass durch jeden Punkt desselben mindestens eine Erzeugende geht, vorausgesetzt, dass die Fläche nicht eine Kegelfläche ist und der Schnitt durch dessen Mittelpunkt geführt wird.

Die Kegelflächen schliessen wir von unserer Betrachtung aus.

Im vorliegenden Falle kann der irreducible Theil sein eine einfache oder mehrfache Gerade, durch welche alle Erzeugenden der Fläche hindurchgehen, ein Kegelschnitt oder eine Curve dritten Grades.

A. Ist der irreducible Theil eine einfache Gerade, ein Kegelschnitt oder eine Curve dritten Grades mit einem Doppelpunkt, so gehört die geradlinige Fläche zur ersten Klasse ($\varrho = 0$).

Es ist übrigens zu bemerken, dass auf einer irreduciblen geradlinigen Fläche von höherem als dem vierten Grade nur *ein* einfacher Kegelschnitt liegen kann, weil durch zwei einfache Kegelschnitte, welche Punkt für Punkt

eindeutig auf einander bezogen sind, stets eine geradlinige Fläche vierten Grades bestimmt wird.

B. Ist der irreducible Theil eine Curve dritten Grades ohne Doppelpunkt, so gehört die geradlinige Fläche zur zweiten Klasse ($\varrho = 1$).

C. Eine besondere Betrachtung ist nun für den Fall anzustellen, dass auf der geradlinigen Fläche fünften Grades eine gerade Leitlinie vorhanden ist, welche eine mehrfache Linie der Fläche ist.

a. Ist die Gerade eine zweifache, so schneidet jede durch dieselbe gelegte Ebene aus der Fläche drei Erzeugende aus, weil der Schnitt dieser Ebene ausser der zweifachen Leitgeraden keinen irreduciblen Theil mehr enthalten kann.

Durch jeden Punkt der Doppelgeraden geht nun entweder nur eine von ihr selbst verschiedene Erzeugende, und dann gehört die Fläche zur ersten Klasse, oder es gehen deren durch jeden Punkt zwei hindurch.

Im letzteren Falle geht die Ebene dieser beiden Erzeugenden im Allgemeinen nicht durch die Doppelgerade hindurch.

Gesetzt nämlich, dies wäre der Fall, so enthielte jede durch die Doppelgerade gehende Ebene immer zwei Erzeugende, welche sich auf der Doppelgeraden schneiden, und eine dritte Erzeugende, welche nicht auch noch durch den Schnittpunkt der beiden anderen hindurchgehen kann, weil die Leitgerade nur eine zweifache ist.

Diese dritte Erzeugende schneidet also die Doppelgerade in einem anderen Punkte. Durch denselben muss noch eine zweite Erzeugende der Fläche gehen, die aber nicht mehr in der betrachteten Ebene liegen kann. Die Ebene der beiden durch den letztgenannten Punkt gehenden Erzeugenden enthält also die Doppelgerade nicht. Die Voraussetzung, dass die Ebene der zwei durch denselben Punkt der Doppelgeraden gehenden Erzeugenden die Doppelgerade stets enthalten könne, ist demnach für den Fall einer irreduciblen Fläche als nicht zulässig erwiesen.

Betrachten wir nun den Schnitt der Ebene, welche die zwei durch denselben Punkt der Doppelgeraden gehenden Erzeugenden enthält, so kann diese keine dritte Erzeugende mehr enthalten, weil diese auch durch die Leitgerade gehen müsste, welche der Voraussetzung zufolge nur eine doppelte Linie der Fläche ist. Diese Ebene schneidet daher aus der Fläche entweder eine irreducible Curve dritten Grades (s. *A.* und *B.*) oder eine dreifache Gerade aus.

Legt man im letzten Falle, in welchem die Fläche eine zweifache und

eine dreifache Leitgerade hat, durch eine Erzeugende der Fläche eine Ebene, welche keine der beiden geraden Leitlinien enthält, so schneidet sie ausser der Erzeugenden aus der Fläche eine ebene Curve vierten Grades aus, welche in dem Punkte, in welchem die Ebene von der dreifachen Geraden geschnitten wird, einen Doppelpunkt besitzt.

Enthält nun die geradlinige Fläche keine doppelte Erzeugende, so hat die Curve vierten Grades keinen weiteren Doppelpunkt und gehört demnach zur dritten Klasse ($\varrho = 2$); enthält die Fläche aber eine oder zwei Doppelerzeugende, so gehört sie zur zweiten, beziehlich zur ersten Klasse, weil dann die Curve vierten Grades noch einen, beziehlich zwei Doppelpunkte erhält.

Jede geradlinige Fläche fünften Grades, welche eine doppelte Erzeugende enthält, die nicht zugleich eine Leitgerade ist, enthält unendlich viele ebene Curven dritten Grades, welche von dem Ebenenbüschel ausgeschnitten werden, das die Doppelgerade zur Axe hat.

b. Ist der von einer Ebene, welche zwei Erzeugende enthält, ausgeschnittene irreducible Theil eine dreifache Gerade, so können drei Fälle eintreten: durch jeden Punkt derselben gehen entweder nur eine, oder zwei, oder drei von der Leitlinie verschiedene Erzeugende hindurch.

Geht durch jeden Punkt der Leitlinie nur eine von derselben verschiedene Erzeugende, so gehört die Fläche zur ersten Klasse.

Gehen durch jeden Punkt derselben zwei von der Leitlinie verschiedene Erzeugende, und geht die Ebene derselben nicht durch die dreifache Gerade, so schneidet diese Ebene aus der Fläche entweder eine irreducible Curve dritten Grades aus, — für eine besondere Lage möglicherweise einen Kegelschnitt, — oder eine mehrfache, — in diesem Falle doppelte, gerade Leitlinie aus. Beide Fälle sind bereits erledigt.

Geht aber die Ebene der zwei Erzeugenden stets durch die dreifache Gerade hindurch, schneiden sich also die beiden von einer beliebigen durch die dreifache Gerade gelegten Ebene ausgeschnittenen Erzeugenden stets auf der dreifachen Geraden, so giebt es ausser dieser Geraden und möglicherweise vorhandenen Doppelerzeugenden keine mehrfache Linie auf der Fläche.

Legt man in diesem Falle durch eine Erzeugende eine Ebene, so schneidet diese noch eine Curve vierten Grades aus, welche an der Stelle, wo die Ebene von der dreifachen Geraden geschnitten wird, einen Doppelpunkt besitzt. Die Fläche gehört also, wenn sie nicht Doppelerzeugende enthält, in die dritte Klasse ($\varrho = 2$).

Ist drittens die dreifache Gerade so beschaffen, dass durch jeden Punkt derselben drei von ihr verschiedene Erzeugende gehen, so muss eine Ebene existiren, welche zwei derselben enthält, ohne die dreifache Gerade zu enthalten; diese Ebene schneidet nun entweder eine irreducible Curve dritten Grades aus oder eine mehrfache (zweifache) Gerade, Fälle, die bereits klassificirt sind.

Endlich gehört hierher noch der Fall, dass der ausgeschnittene irreducible Theil eine dreifache Gerade ist, mit welcher aber die eine Erzeugende stets zusammenfällt; die Fläche fünften Grades enthält dann also eine vierfache Gerade.

Jede Ebene, welche durch eine vierfache Gerade einer Fläche fünften Grades gelegt wird, schneidet aus der Fläche nur noch eine Gerade aus. Daher ist jede Fläche fünften Grades mit einer vierfachen Geraden eine geradlinige Fläche und gehört als solche zur ersten Klasse.

Wir fassen nun die Ergebnisse der Untersuchung dieses Paragraphen wie folgt zusammen:

Eine irreducible geradlinige Fläche fünften Grades, welche keine Kegelfläche ist, ist entweder von der ersten, oder von der zweiten oder von der dritten (algebraischen) Klasse.

Die Flächen der ersten und zweiten Klasse enthalten, mit einer gleich anzugebenden Ausnahme, eine unendliche Schaar von Curven dritten Grades, und demnach ist eine solche Fläche geometrisch construirbar durch Vermittelung zweier Curven dritten Grades, die eindeutig auf einander bezogen werden.

Hiervon sind ausgenommen und es enthalten keine einzige irreducible Curve dritten Grades diejenigen Flächen der ersten Klasse, welche eine einfache gerade Leitlinie haben, durch deren jeden Punkt nur eine von der Leitlinie verschiedene Erzeugende geht.

§. 2.

Besondere Betrachtung der geradlinigen Flächen fünften Grades, welche zur ersten *Riemann*schen Klasse gehören.

Die Gleichungen der beiden Ebenen, durch deren Durchschnitt für jeden Werth des Parameters t eine Erzeugende der geradlinigen Fläche bestimmt wird, seien

$$\left.\begin{aligned} E &= at^m + bt^{m-1} + \cdots + pt + q = 0 \\ E' &= a't^n + b't^{n-1} + \cdots + p't + q' = 0 \end{aligned}\right\} \quad m \geqq n,$$

wobei $a, b, \ldots q, a', b', \ldots q'$ homogene lineare Functionen der vier homogenen Coordinaten darstellen.

Die Elimination von t ergiebt eine homogene Gleichung, welche in Bezug auf $a, b, \ldots q$ vom n^{ten} Grade, in Bezug auf $a', b', \ldots q'$ vom m^{ten} Grade ist, stellt also eine Fläche vom $m+n^{\text{ten}}$ Grade dar.

Wenn die beiden Ausdrücke E und E' für jeden Werth von t nur eine Gerade, also für keinen Werth von t eine ganze Ebene darstellen, so kann die Eliminationsgleichung keinen ausserwesentlichen Factor enthalten.

Stellen aber E und E' für einen Werth $t = t_0$ dieselbe Ebene dar, so geht die Gleichung derselben als ausserwesentlicher Factor in die Eliminationsgleichung ein. In diesem Falle denken wir eine Constante k so bestimmt, dass $E - kE'$ für $t = t_0$ identisch verschwindet, was stets möglich ist. $E - kE'$ ist durch $t - t_0$ theilbar, so dass $E - kE' = (t - t_0) E''$. An die Stelle der Ebene $E = 0$ setzen wir nun die Ebene $E'' = 0$. Hiermit fahren wir so lange fort, bis kein Werth von t mehr übrig ist, für den beide Ausdrücke gleichzeitig eine ganze Ebene darstellen.

Die Möglichkeit, dass die Eliminationsgleichung, welche jetzt keinen ausserwesentlichen Factor mehr enthalten kann, eine Potenz sei, d. h. dass jede Erzeugende durch beide Gleichungen für mehr als einen Werth von t dargestellt werde, schliessen wir hier aus, da wir wissen, dass die zu betrachtenden Flächen so dargestellt werden können, dass jeder einfachen Erzeugenden nur ein Werth des Parameters entspricht.

Soll also die Eliminationsgleichung irreducibel und vom fünften Grade sein, so ist $m+n$ gleich 5 zu setzen. Es sind demnach nur die beiden Fälle zulässig:

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} m = 4; & E = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0, \\ n = 1; & E' = pt + q = 0; \end{cases}$$

$$\text{(II.)} \quad \begin{cases} m = 3; & E = at^3 + bt^2 + b't + a' = 0, \\ n = 2; & E' = pt^2 + qt + r = 0. \end{cases}$$

A. Da der Grad einer geradlinigen Fläche durch reciproke Verwandlung nicht geändert wird, ist es erlaubt, von diesen Ebenengebilden gleich zu den entsprechenden Punktgebilden überzugehen. Wir erhalten also folgende Sätze:

I. ***Besteht zwischen den Punkten einer Geraden und den Punkten einer Curve vierten Grades, welche zu der rationalen Klasse gehört, ein eindeutiges***

gegenseitiges Entsprechen, so ist der geometrische Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte eine geradlinige Fläche fünften Grades.

II^a. *Derselbe Satz gilt, wenn man gleichzeitig an die Stelle der Geraden einen Kegelschnitt und an die Stelle der Curve vierten Grades eine Curve dritten Grades setzt.*

Ein solches Entsprechen kann geometrisch in allgemeinster Weise durch mannigfaltige Beziehungen, z. B. dadurch hergestellt werden, dass man sich den Kegelschnitt und die Raumcurve dritten Grades auf demselben Kegel zweiten Grades denkt und die Punkte beider durch die Seiten des Kegels eindeutig einander zuordnet.

Als Grenzfall ist besonders zu betrachten der Fall, in welchem der Kegelschnitt zu einer doppelten Geraden wird.

II^b. *Ordnet man den Punkten einer Curve dritten Grades, welche zur rationalen Klasse gehört, in der Weise die Punkte einer Geraden zu, dass jedem Punkte der ersteren ein Punkt der letzteren, jedem Punkte der letzteren aber zwei Punkte der ersteren entsprechen, so ist der geometrische Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte eine geradlinige Fläche fünften Grades.*

Setzt man im zweiten Falle an die Stelle der Ebene E' eine Ebene $E+k(t-t_0)E'=0$, so gelangt man, dem Vorigen entsprechend, zu dem Satze:

II. *Man erhält eine geradlinige Fläche fünften Grades, wenn man die Punkte zweier Curven dritten Grades, welche zur rationalen Klasse gehören, eindeutig auf einander bezieht, einen Punkt der einen mit dem ihm entsprechenden Punkte der anderen zusammenfallen lässt und die entsprechenden Punkte durch gerade Linien mit einander verbindet.*

Aus den angestellten Betrachtungen geht hervor, *dass jede geradlinige Fläche fünften Grades, welche zu der rationalen Klasse gehört, durch eine der angegebenen Constructionen* I. *und* II., *oder* I., II^a., II^b. *erhalten werden kann.*

B. Wir wollen uns nun mit der Doppelcurve der betrachteten Flächen etwas beschäftigen und darauf (*C*) einige Fälle, in denen sie reducibel wird, näher ins Auge fassen, ohne uns jedoch hierbei ein Erschöpfen des Stoffes zum Ziele zu setzen. Die einzelnen Arten der geradlinigen Flächen fünften Grades, die sich durch die Betrachtung der Doppelcurve ergeben, bezeichnen wir in jeder Klasse der Reihe nach durch beigesetzte römische Ziffern.

In dem ersten Falle (s. die Gleichungen auf der vorigen Seite) ist die Gerade $p=0$, $q=0$ eine vierfache Gerade der Fläche. — (I.)

In dem zweiten Falle ist die Gleichung der Fläche

$$\begin{vmatrix} a & b & b' & a' & 0 \\ 0 & a & b & b' & a' \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

Durch theilweise Elimination erhält man die Gleichungen

$$(aq-bp)t^2+(ar-b'p)t-a'p = 0,$$
$$ar\,t^2+(br-a'p)t+b'r-a'q = 0;$$

es lässt sich also die Gleichung der Fläche auch in folgende Form setzen

$$\begin{vmatrix} aq-bp & ar-b'p & -a'p \\ p & q & r \\ ar & br-a'p & b'r-a'q \end{vmatrix} = 0.$$

Indem man fortfährt, zwischen den beiden soeben erhaltenen Gleichungen, welche in Bezug auf t vom zweiten Grade sind, und der Gleichung $E'=0$ zu eliminiren, erhält man folgende Gleichungen

$$\varphi_1 t+\varphi_2 = 0,$$
$$\varphi_2 t+\varphi_3 = 0,$$
$$\varphi_3 t+\varphi_4 = 0,$$

wenn man die Ausdrücke

$$(aq-bp)q-(ar-b'p)p,$$
$$(aq-bp)r+a'p^2 = aqr-(br-a'p)p,$$
$$(ar-b'p)r+a'pq = ar^2-(b'r-a'q)p,$$
$$(br-a'p)r-(b'r-a'q)q$$

der Reihe nach mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 bezeichnet. Die Gleichung der Fläche erscheint nun unter den Formen

$$\varphi_2^2-\varphi_1\varphi_3 = 0,$$
$$\varphi_1\varphi_4-\varphi_2\varphi_3 = 0,$$
$$\varphi_3^2-\varphi_2\varphi_4 = 0,$$

in welchen sie mit den ausserwesentlichen Factoren $p=0$, $q=0$, $r=0$ behaftet ist.

Aus den identischen Gleichungen

$$r\varphi_1-q\varphi_2+p\varphi_3 = 0,$$
$$r\varphi_2-q\varphi_3+p\varphi_4 = 0$$

geht hervor, dass die Flächen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ durch dieselbe Curve hindurchgehen, wenn diejenigen reduciblen Theile ihrer Durchschnitte ausgeschlossen werden, die in den Ebenen $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ liegen; ferner geht aus denselben, in Verbindung mit den Gleichungen der Fläche, hervor, dass diese allen vier Flächen gemeinschaftliche Curve eine Doppelcurve der Fläche ist.

Die Flächen $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_3 = 0$ haben drei gerade Linien gemeinschaftlich:

$$p = 0, \quad r = 0,$$
$$p = 0, \quad a = 0,$$
$$r = 0, \quad a' = 0,$$

also ist die Curve, welche sie ausserdem gemeinschaftlich haben, vom sechsten Grade; dieselbe hat im Punkte $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ einen dreifachen Punkt, weil durch diesen Punkt, der für die Flächen $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_3 = 0$ ein Doppelpunkt, also für deren Durchschnittslinie ein vierfacher Punkt ist, nur eine der drei den beiden Flächen gemeinschaftlichen Geraden geht.

Die Fläche $\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 = 0$ wird umhüllt von der Flächenschaar

$$\varphi_1 t^2 + 2\varphi_2 t + \varphi_3 = 0;$$

jede dieser Flächen dritten Grades schneidet die geradlinige Fläche fünften Grades in der Doppelcurve sechsten Grades, berührt dieselbe längs einer Erzeugenden und geht ausserdem noch durch eine Erzeugende der Fläche hindurch. Dasselbe gilt für die Flächenschaar

$$\varphi_2 t^2 + 2\varphi_3 t + \varphi_4 = 0.$$

Jede Erzeugende der Fläche schneidet dreimal die Doppelcurve, also kann diese nicht auf einer Fläche zweiten Grades liegen, weil sonst jede Erzeugende der Fläche zugleich Erzeugende der Fläche zweiten Grades sein müsste. — Durch jeden Punkt der Curve gehen zwei Erzeugende, von denen jede die Curve noch zweimal schneidet; der Kegel fünften Grades, welcher die Doppelcurve zur Leitlinie und einen Punkt derselben zum Mittelpunkt hat, enthält also zwei doppelte und eine dreifache Erzeugende wegen des dreifachen Punktes; die Curve sechsten Grades gehört also im Allgemeinen zur Klasse $\varrho = 1$.

Da auch eine vierfache Gerade für eine Doppelcurve sechsten Grades zählt, so haben wir den Satz:

Alle geradlinigen Flächen fünften Grades und erster Klasse haben eine

Doppelcurve vom sechsten Grade, welche nothwendig einen dreifachen Punkt besitzt. — (II.)

Derselbe lässt sich wie folgt umkehren:

Jede irreducible Fläche fünften Grades mit einer Doppelcurve sechsten Grades ist eine geradlinige Fläche.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist evident, wenn die Doppelcurve sechsten Grades eine irreducible ist, denn in diesem Falle giebt es, vorausgesetzt, dass die Doppelcurve nicht einen vierfachen Punkt hat, unendlich viele gerade Linien, welche die Doppelcurve in drei distincten Punkten schneiden, mit der Fläche sechs Punkte gemein haben und daher ganz auf der Fläche liegen müssen.

Der Kegel nämlich, für welchen eine Raumcurve Leitlinie ist, und dessen Mittelpunkt ein Punkt der Curve ist, hat für alle Raumcurven von höherem als dem vierten Grade Doppelkanten. Unter diesen sind, wenn der Punkt auf der Curve nicht in singulärer Lage gewählt wird, und die Curve, ist sie vom fünften Grade, nicht etwa einen dreifachen Punkt, ist sie vom sechsten Grade, nicht etwa einen vierfachen Punkt, ist sie vom n^{ten} Grade, nicht einen $(n-2)$ fachen Punkt besitzt, jedesmal solche enthalten, welche die Curve in drei distincten Punkten schneiden.

Eine Doppelcurve sechsten Grades mit einem vierfachen Punkte kann aber eine irreducible Fläche fünften Grades aus dem Grunde nicht haben, weil der vierfache Punkt der Doppelcurve zugleich ein vierfacher Punkt der Fläche und der Kegel zweiten Grades, auf welchem die Curve liegt, reducibler Theil der Fläche sein würde.

Diese Schlussweise kann nicht ohne Weiteres auf alle Fälle ausgedehnt werden, in denen die Doppelcurve sechsten Grades in Curven niederer Grade zerfällt; eine genauere Untersuchung zeigt aber, dass der obige Satz auch in diesen Fällen noch richtig bleibt.

C. Die Doppelcurve sechsten Grades der geradlinigen Flächen fünften Grades und erster Klasse kann nun auf mannigfache Weise zerfallen.

Einige der hierbei möglichen Fälle wollen wir hier näher betrachten.

Es sei zunächst auf der Fläche eine *dreifache Leitgerade* vorhanden.

Sind $p_1 = 0$ und $q_1 = 0$ die Gleichungen zweier durch die dreifache Leitgerade gehenden Ebenen, so lässt sich jede andere durch dieselbe gehende Ebene durch die Gleichung $p_1\lambda_1 + q_1 = 0$ darstellen.

Eine solche Ebene schneidet aus der Fläche zwei Erzeugende aus,

die von der Leitgeraden im Allgemeinen verschieden sind; zu jedem Werthe von λ_1 gehören also zwei Werthe von t_1; zu jeder Erzeugenden, also auch zu jedem Werthe von t_1 gehört aber nur eine Ebene, die durch die Leitgerade geht, also auch nur ein Werth von λ_1.

Hieraus folgt, dass λ_1 eine rationale Function zweiten Grades von t_1 ist.

Die zwischen λ_1 und t_1 bestehende Gleichung kann man durch lineare Substitution beider Variabeln auf die Form

$$\lambda = t^2$$

bringen. Denkt man sich dies ausgeführt, so erhält man als allgemeine Gleichungen einer geradlinigen Fläche fünften Grades mit einer dreifachen Leitgeraden

$$pt^2+q = 0,$$
$$at^3+bt^2+b't+a' = 0;$$
$$(aq-b'p)t+(bq-a'p) = 0.$$
$$(aq-b'p)^2q+(a'p-bq)^2p = 0.$$

Die beiden Ebenen $p=0$ und $q=0$ berühren die Fläche jede längs einer Geraden.

[Gehen durch jeden Punkt der dreifachen Geraden nicht drei, sondern nur zwei oder nur eine von derselben verschiedene Erzeugende, so ist die dreifache Gerade eine besondere Lage der Erzeugenden oder eine Doppelerzeugende der Fläche, und die Gleichung $at^3+bt^2+b't+a'=0$ muss dann für einen oder für zwei Werthe von t eine durch die dreifache Gerade gehende Ebene darstellen, oder die Form haben:

$$(at^2+bt+c)(t-t_0)+\alpha p+\beta q = 0,$$
$$(at+b)(t-t_0)(t-t_1)+(\alpha p+\beta q)t+\alpha_1 p+\beta_1 q = 0.]$$

Ausser der dreifachen Geraden $p=0$, $q=0$ enthält die Fläche als Doppelcurve die Raumcurve dritten Grades, in welcher sich die Flächen

$$aq-b'p=0,\quad bq-a'p=0,\quad aa'-bb'=0$$

schneiden; dieselbe hat mit der dreifachen Geraden zwei Punkte gemein. — (III.)

Diese Curve dritten Grades kann nun in einen Kegelschnitt und eine Gerade oder in drei Gerade zerfallen.

Damit dieselbe in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfalle, ist nothwendig und hinreichend, dass die beiden Flächen $aq-b'p=0$ und $bq-a'p=0$ ausser der Geraden $p=0$, $q=0$ noch eine Gerade der anderen Schaar ge-

mein haben; wird diese durch die Ebene $p\lambda_0+q=0$ ausgeschnitten, so hat man die identische Gleichung

$$a\lambda_0+b' = \varkappa_0(b\lambda_0+a')+\mu_0(p\lambda_0+q).$$

Unter dieser Voraussetzung ist, ebenfalls identisch,

$$aq-b'p = \varkappa_0(bq-a'p)+(a-\varkappa_0 b-\mu_0 p)(p\lambda_0+q),$$

und es liegt der beiden Flächen gemeinschaftliche Kegelschnitt in der Ebene $a-\varkappa_0 b-\mu_0 p = s = 0$.

Wir haben dann als Gleichung der Fläche

$$[s(p\lambda_0+q)+\varkappa_0(bq-a'p)]^2 q+(bq-a'p)^2 p = 0. \qquad \text{— (IV.)}$$

Die Gerade $p\lambda_0+q=0$, $a'+b\lambda_0=0$ ist in diesem Falle eine doppelte Erzeugende der Fläche.

Haben beide Flächen zweiten Grades $aq-b'p=0$ und $bq-a'p=0$ vier Gerade gemein, zwei von jeder Schaar, so ist diejenige Gerade, welche mit $p=0$, $q=0$ zu derselben Schaar gehört, eine zweifache Leitlinie, während die beiden anderen Doppelerzeugende der Fläche sind.

Wir erhalten die allgemeine Gleichung dieser Fläche aus der vorigen, wenn wir die Bedingung hinzufügen, dass die Ebene $s=0$ durch zwei Erzeugende der Fläche $bq-a'p=0$ hindurchgehen soll.

Wird die eine derselben ausgeschnitten durch die Ebenen $p\lambda_1+q=0$, $a'+b\lambda_1=0$, so hat die Gleichung der Ebene s die Form

$$s = \alpha(p\lambda_1+q)+\beta(a'+b\lambda_1),$$

und diese Ebene schneidet die Fläche noch in der Geraden

$$s=0, \quad \alpha(p\lambda_0+q)+\beta(a'+b\lambda_0)=r=0.$$

Dann ist identisch

$$bq-a'p = \frac{1}{\beta(\lambda_1-\lambda_0)}[s(p\lambda_0+q)-r(p\lambda_1+q)].$$

Schreibt man nun p' für $p\lambda_0+q$, q' für $p\lambda_1+q$, so erhält die allgemeine Gleichung der Fläche die Form:

$$(\mu p's-\nu q'r)^2 q+(\mu'p's-\nu'q'r)^2 p = 0,$$

worin μ, ν, μ', ν' willkürliche Constanten bezeichnen; $p=0$, $q=0$ ist die dreifache, $r=0$, $s=0$ die zweifache gerade Leitlinie, $p'=0$, $r=0$ und $q'=0$, $s=0$ sind Doppelerzeugende der Fläche. — (V.)

Die beiden Flächen zweiten Grades können sich auch längs der Geraden $p=0$, $q=0$ berühren, dann ist in dem Ausdrucke für s die Constante

β gleich Null zu setzen, und wir erhalten als allgemeine Form der Gleichung der Fläche

$$(\varkappa_0(bq-a'p)+\alpha p'q')^2 q+(bq-a'p)^2 p = 0.$$

Dann enthält die Fläche neben der dreifachen geraden Leitlinie eine überall unendlich nahe zweifache gerade Leitlinie und ausserdem zwei in den Ebenen $p'=0$ und $q'=0$ liegende doppelte Erzeugende. Das Hyperboloid $bq-a'p=0$ berührt die Fläche längs der Geraden $p=0$, $q=0$ und schneidet diese als fünffache Gerade aus.

Entwickelt man die obige Gleichung, so wird für jeden Punkt in der Nähe der Geraden $p=0$, $q=0$ nur das Glied

$$(p+\varkappa_0^2 q)(bq-a'p)^2$$

unendlich klein von der dritten Ordnung. Die Ebene $p+\varkappa_0^2 q=0$ ist eine Tangentialebene der Fläche längs dieser Geraden; dieselbe schneidet aus der Fläche diese Gerade vierfach aus.

Die beiden anderen Tangentialebenen der Fläche in jedem Punkte dieser Geraden fallen jedesmal mit der Tangentialebene der Fläche $bq-a'p=0$ zusammen.

Man kann daher sagen, dass die betrachtete Fläche längs der Geraden $p=0$, $q=0$ des Hyperboloids $bq-a'p=0$ sich selbst berühre.

Jede durch die Gerade $p=0$, $q=0$ gelegte Ebene schneidet aus der Fläche zwei sich auf der Leitgeraden schneidende Erzeugende aus. Denkt man sich einen Theil der Fläche durch stetige Veränderung der einen dieser Geraden, einen zweiten durch stetige Veränderung der zweiten Geraden erzeugt, so berühren sich beide Theile, und es rechtfertigt sich die gebrauchte Bezeichnung *Selbstberührung* für diese Singularität der Fläche. —

Die hier betrachtete Singularität ist dieselbe, welche Herr *Cayley* in seinem *Second Memoir on Skew Surfaces otherwise Scrolls,* Phil. Trans. vol. 154, (1865) pp. 559—577 als *line twofold* bezeichnet.

Auf einen allgemeineren Fall als den betrachteten, der sich von ihm durch Wegfall der beiden Doppelerzeugenden unterscheidet, werden wir in §. 4 zurückkommen.

Wir betrachten nun den Fall, in welchem die geradlinige Fläche fünften Grades eine *doppelte Leitgerade* hat.

Durch eine Ueberlegung, welche der im vorigen Falle der dreifachen Leitgeraden durchgeführten ganz analog ist, zeigt man, dass man aus dem

allgemeinen Falle den vorliegenden erhält, wenn man festsetzt, dass die Ebenen $a=0$, $b=0$, $b'=0$, $a'=0$ durch dieselbe Gerade gehen.

Die Doppelcurve, welche die Fläche ausser der doppelten Leitgeraden hat, ist vom fünften Grade; dieselbe hat, ebenso wie im allgemeinen Falle die Doppelcurve sechsten Grades, einen dreifachen Punkt und liegt daher auf einem Kegel zweiten Grades, dessen Mittelpunkt dieser dreifache Punkt ist. In Folge dessen gehört sie zur rationalen Klasse und hat demnach ausser dem dreifachen Punkte noch drei scheinbare Doppelpunkte. Mit der doppelten Leitgeraden hat dieselbe zwei Punkte gemein. Umgekehrt ist jede Raumcurve fünften Grades mit den genannten Eigenschaften im Verein mit einer dieselbe zweimal schneidenden Geraden Doppelcurve einer geradlinigen Fläche fünften Grades. — (VI.)

[Von jedem Punkte der Geraden gehen nämlich zwei von der Geraden verschiedene die Curve fünften Grades zweimal schneidende Strahlen aus, und in jeder durch die Leitgerade gelegten Ebene liegen drei derselben.]

Die Curve fünften Grades kann nun dadurch zerfallen, dass eine doppelte Erzeugende auftritt. Diese Doppelgerade muss, weil sie auf dem Kegel zweiten Grades liegt, durch den dreifachen Punkt hindurchgehen; der Rest der Doppelcurve ist eine Curve vierten Grades mit einem Doppelpunkt, welche von der doppelten Leitgeraden in einem Punkte geschnitten wird. Umgekehrt ist auch eine Raumcurve vierten Grades mit einem Doppelpunkte im Verein mit einer Geraden, von der sie einmal geschnitten wird, Doppelcurve einer geradlinigen Fläche fünften Grades, welche ausserdem eine doppelte Erzeugende enthält. — (VII.)

Wir nehmen nun an, die Doppelcurve sechsten Grades zerfalle, ohne dass sich Leitgerade unter den Theilen befinden.

In zwei Curven dritten Grades kann die Doppelcurve sechsten Grades aus dem Grunde nicht zerfallen, weil die eine derselben von jeder Erzeugenden zweimal geschnitten werden müsste. Diese Bestimmung würde die andere Raumcurve einfach lassen.

Wir nehmen also an, *die geradlinige Fläche habe einen doppelten Kegelschnitt; der Rest der Doppelcurve ist eine Curve vierten Grades und zwar mit einem Doppelpunkte, durch welchen der doppelte Kegelschnitt hindurchgeht. Ausserdem hat der Kegelschnitt noch zwei Punkte mit der Raumcurve vierten Grades gemein.* — (VIII.)

Dies folgt daraus, dass die Doppelcurve einen dreifachen Punkt haben

muss und daraus, dass die Ebene des doppelten Kegelschnitts, welche aus der Fläche nur noch eine Erzeugende ausschneidet, keinen mehrfachen Punkt enthalten kann, der nicht auf dem Kegelschnitt selbst liegt.

Die genannten Bedingungen sind auch dafür hinreichend, dass ein Kegelschnitt mit einer Raumcurve vierten Grades mit Doppelpunkt Doppelcurve einer geradlinigen Fläche fünften Grades sei.

Da wir vorausgesetzt hatten, dass die Fläche keine mehrfache gerade Leitlinie enthalte, enthält sie entweder eine einfache gerade Leitlinie oder einen einfachen Leitkegelschnitt.

Im ersteren Falle lassen sich die Gleichungen der Erzeugenden, wenn wir zu den reciproken Gebilden übergehen, auf die Form

$$at^4+bt^2+c = 0,$$
$$pt+q = 0$$

bringen.

Betrachtet man nun die einfache Leitgerade und die Doppelcurve vierten Grades als Leitlinien für einen Strahl, welcher die Leitgerade einmal und die Curve vierten Grades zweimal schneidet, so überzeugt man sich, dass ausser der geradlinigen Fläche fünften Grades noch eine geradlinige Fläche bestimmt wird, da die Curve vierten Grades zwei scheinbare Doppelpunkte hat und demnach von jedem Punkte der Leitgeraden zwei Strahlen ausgehen.

Eine Gerade und eine Curve vierten Grades mit zwei scheinbaren Doppelpunkten bestimmen auf diese Weise im Allgemeinen eine geradlinige Fläche achten Grades; denn jede durch die Gerade gelegte Ebene schneidet vier Doppelpunkte aus, entsprechend sechs Geraden, und die Gerade selbst ist eine doppelte.

Liegen auf einer geradlinigen Fläche fünften Grades eine einfache Leitgerade und eine Doppelcurve vierten Grades, so geht durch diese beiden Linien noch eine geradlinige Fläche dritten Grades, von der jede Erzeugende die Leitgerade einmal und die Doppelcurve vierten Grades zweimal schneidet.

Wir erhalten auch umgekehrt den Satz:

Die einfache Leitgerade einer geradlinigen Fläche dritten Grades bestimmt mit jeder Curve vierten Grades mit zwei scheinbaren Doppelpunkten, die auf der Fläche liegt, ausser der geradlinigen Fläche dritten Grades im Allgemeinen noch eine geradlinige Fläche fünften Grades mit doppeltem Kegelschnitt.

Man kann bekanntlich auf jeder geradlinigen Fläche dritten Grades beliebig viele solche Curven vierten Grades erhalten, welche alle einen Dop-

pelpunkt haben, indem man durch einen Kegelschnitt der Fläche, oder durch zwei auf der Doppelgeraden sich schneidende Erzeugende eine Fläche zweiten Grades legt; diese schneidet eine Curve der verlangten Beschaffenheit aus.

Umgekehrt kann man durch jede Raumcurve vierten Grades mit einem Doppelpunkt beliebig viele geradlinige Flächen dritten Grades legen. Durch den Doppelpunkt ziehe man eine Gerade, so ist der geometrische Ort der Strahlen, welche die Gerade einmal und die Curve zweimal schneiden, eine geradlinige Fläche dritten Grades.

Ganz analog kann man verfahren, indem man zwei Kegelschnitte, die sich in zwei Punkten schneiden, an die Stelle der Curve vierten Grades setzt.

Die einfache Leitgerade der geradlinigen Fläche dritten Grades, die man erhält, bestimmt mit den beiden Kegelschnitten ausser dieser Fläche dritten Grades noch eine geradlinige Fläche fünften Grades, welche neben diesen beiden Doppelkegelschnitten noch einen dritten Doppelkegelschnitt besitzt. — (IX.)

Wir gehen nun zur Betrachtung des anderen Falles über, in welchem die geradlinige Fläche einen einfachen Leitkegelschnitt und einen Doppelkegelschnitt besitzt. Drücken wir die Coordinaten beider Kegelschnitte rational durch je einen Parameter, t und s aus, so lassen sich dieselben stets so wählen, dass die zwischen ihnen bestehende Gleichung die Form $s = t^2$ hat.

Gehen wir zu den reciproken Gebilden über, so erhalten wir als Gleichungen der Erzeugenden

$$at^4 + bt^2 + c = 0,$$
$$pt^2 + qt + r = 0;$$

die Ebenen, welche durch diese Gleichungen dargestellt werden, umhüllen die Kegel $b^2 - 4ac = 0$ und $q^2 - 4pr = 0$.

Damit durch die beiden Gleichungen eine geradlinige Fläche fünften Grades bestimmt werde, ist erforderlich, dass für einen bestimmten Werth $t = t_0$ die beiden Kegel eine gemeinsame Tangentialebene haben, — oder dass ein Punkt des einen Kegelschnitts mit seinem entsprechenden Punkte im anderen Kegelschnitte zusammenfalle. Wir setzen also voraus, dass identisch die Gleichung stattfinde

$$at_0^4 + bt_0^2 + c = pt_0^2 + qt_0 + r.$$

Dann erhält man als gleichbedeutend mit den obigen Gleichungen die folgenden:

$$E = [a(t^2 + t_0^2) + b - p](t + t_0) - q = 0,$$
$$E' = pt^2 + qt + r = 0,$$
$$at^4 + bt^2 + c = E(t - t_0) + E'.$$

Betrachtet man nun den Durchschnitt der Fläche mit der Ebene $q=0$, so ergiebt sich

$$at^2+at_0^2+b-p = 0,$$
$$pt^2+r = 0;$$

d. h. die Erzeugende, welche dem Werthe $t=t_1$ entspricht, geht durch denselben Punkt der Ebene $q=0$, durch welchen die dem Werthe $t=-t_1$ entsprechende Erzeugende geht; der von der Ebene $q=0$ ausgeschnittene Kegelschnitt

$$q=0,\quad p(at_0^2+b-p)-ar=0,$$

oder, wenn t_0 nicht gleich Null,

$$at_0^2+b-p = \frac{qt_0+r-c}{t_0^2},$$
$$q=0,\quad pr-pc-art_0^2=0,$$

ist also ein Doppelkegelschnitt der Fläche.

Weil nun diese Fläche ebenso wie ihre reciproke einen Doppelkegelschnitt enthält und ebenso allgemein ist, ist es nicht nöthig zu der reciproken zurückzukehren; wir bleiben also gleich bei dieser stehen.

Die obige Formel zeigt, dass die Ebene $q=0$ die Erzeugende ausschneidet, welche sich für $t+t_0=0$, $t=-t_0$ ergiebt:

$$q=0,\quad pt_0^2-qt_0+r=0,$$
$$q=0,\quad pt_0^2+r=0.$$

Die Doppelcurve vierten Grades ergiebt sich als Durchschnitt der beiden Kegel

$$p^2-a(pt_0^2-qt_0+r) = 0,$$
$$r^2-c(pt_0^2-qt_0+r) = 0,$$

deren gemeinschaftliche Tangentialebene $pt_0^2-qt_0+r=0$ ist, welche, wie gezeigt, die von der Ebene des doppelten Kegelschnitts ausgeschnittene Erzeugende enthält. Weil die beiden Kegel eine gemeinschaftliche Tangentialebene haben, so folgt, dass ihr Durchschnitt wirklich einen Doppelpunkt hat, wie wir schon vorher geschlossen.

Dass der Doppelkegelschnitt

$$q=0,\quad pr-pc-art_0^2=0$$

die Doppelcurve vierten Grades ausser in dem Doppelpunkte derselben $p=0$, $q=0$, $r=0$ noch in zwei ferneren Punkten schneidet, zeigt man analytisch wie folgt.

Setzt man in den Gleichungen der beiden Kegel $q=0$, so ist

$$p(p-at_0^2)-ar=0;\quad \frac{p}{r}=\frac{a}{p-at_0^2},$$

$$r(r-c)-cpt_0^2=0;\quad \frac{p}{r}=\frac{r-c}{ct_0^2}.$$

Hieraus

$$\frac{a}{p-at_0^2}=\frac{r-c}{ct_0^2};\quad pr-pc-art_0^2=0.$$

Der Fall $t_0=0$, auf welchen wir uns den Fall $t_0=\infty$ zurückgeführt denken, erheischt eine besondere Betrachtung, indem dann die Gleichung des zweiten Kegels identisch erfüllt ist. Setzt man jedoch für c seinen Werth

$$c = r+qt_0+(p-b)t_0^2-at_0^4,$$

so erhält die Gleichung des Kegels den identischen Factor t_0^2; lässt man diesen fort, so ergiebt sich eine Gleichung, welche auch für $t_0=0$ einen bestimmten Sinn behält und dann in $q^2-2rp+rb=0$ übergeht.

Aus dem zweiten Kegel ergiebt sich für $q=0$, $b-2p=0$. Diese Ebene schneidet die Ebene $q=0$ in einer Geraden, deren Durchschnittspunkte mit dem Kegel p^2-ar auf dem Kegelschnitte $q=0$, $p(b-p)-ar=0$ liegen.

Es entsteht nun die Frage, welche Ebene schneidet aus der Fläche den einfachen Kegelschnitt aus?

Der dreifache Punkt der betrachteten geradlinigen Fläche ist ein Punkt des doppelten Kegelschnitts, und zwar liegt derselbe auf der von der Ebene des doppelten Kegelschnitts aus der Fläche ausgeschnittenen Geraden; also ist die dreifache Tangentialebene der Fläche eine Tangentialebene des umschriebenen doppelt berührenden Kegels $b^2-4ac=0$ und enthält die durch dessen Mittelpunkt gehende Erzeugende der Fläche.

Hiernach erhält man folgende Construction der dreifach berührenden Ebene: vom Mittelpunkte $a=0$, $b=0$, $c=0$ des doppelt berührenden Kegels $b^2-4ac=0$ lege man an den einfach berührenden Kegel $q^2-4pr=0$ die beiden Tangentialebenen. Die eine derselben, $pt_0^2+qt_0+r=0$, ist beiden Kegeln gemeinschaftlich. Der anderen entspricht eine bestimmte Tangentialebene des Kegels $b^2-4ac=0$, welche aus derselben eine durch den Punkt $a=0$, $b=0$, $c=0$ gehende Erzeugende ausschneidet. Die zweite durch diese Erzeugende gehende Tangentialebene des Kegels $b^2-4ac=0$ ist die dreifach berührende Ebene der Fläche, welche aus derselben drei Erzeugende und einen einfachen Kegelschnitt ausschneidet.

Da im allgemeinen Falle der einfache Kegelschnitt mit der Doppelcurve

sechsten Grades drei Punkte gemein hat und derselbe im vorliegenden Falle mit dem Doppelkegelschnitt einen Punkt gemein hat, so hat derselbe mit der Doppelcurve vierten Grades *zwei* Punkte gemein.

Ein Kegelschnitt, welcher mit einer Raumcurve vierten Grades mit zwei scheinbaren Doppelpunkten zwei Punkte gemein hat, bestimmt mit derselben im Allgemeinen eine geradlinige Fläche *zehnten* Grades.

Wir erhalten also den Satz:

Liegen auf einer geradlinigen Fläche fünften Grades ein einfacher Kegelschnitt und eine Doppelcurve vierten Grades, so geht durch diese beiden Linien noch eine zweite geradlinige Fläche fünften Grades hindurch, von der jede Erzeugende den Kegelschnitt einmal und die Doppelcurve vierten Grades zweimal schneidet.

Zu den geradlinigen Flächen fünften Grades, welche einen doppelten Kegelschnitt und eine Doppelcurve vierten Grades besitzen, gehören auch die abwickelbaren Flächen fünften Grades.

[Die Doppelcurve der abwickelbaren Flächen muss jedesmal zerfallen in die Rückkehrkante und eine eigentliche Doppelcurve; die letztere fehlt nur bei den abwickelbaren Flächen vierten Grades. Da auf einer abwickelbaren Fläche überhaupt eine Leitgerade nicht vorhanden sein kann, so müssen die abwickelbaren Flächen fünften Grades sich unter denen befinden, bei welchen ein Kegelschnitt reducibler Theil der Doppelcurve ist.]

In Betreff der abwickelbaren Flächen fünfter Ordnung sei es gestattet, auf die schon genannte Arbeit des Verf. zu verweisen, wo auch die Literatur über dieselben möglichst vollständig angegeben ist.

Wir benutzen die abwickelbaren Flächen, um den letztgenannten Satz an einem Beispiele zu erläutern, und stellen zu diesem Zwecke vorher einige auf dieselben bezüglichen Gleichungen zusammen.

Gleichung der umhüllenden Ebene:

$$at^4+4bt^3+6ct^2+e=0.$$

Jede Erzeugende liegt ferner auf den Ebenen:

$$\begin{aligned} at^2+3bt+3c &= 0, \\ bt^3+3ct^2+e &= 0, \\ at^4-6ct^2-3e &= 0. \end{aligned}$$

Die Rückkehrkante ist Durchschnitt der Kegel

$$ae+3c^2=0, \quad 3b^2-4ac=0.$$

Doppelter Kegelschnitt $b = 0, \quad ae - 9c^2 = 0.$
Einfacher Kegelschnitt $e = 0, \quad 3ac - 2b^2 = 0.$

Gleichung der abwickelbaren Fläche:

$$a(ae+3c^2)^2 - 6c(ae+3c^2)(3b^2-4ac) - 3e(3b^2-4ac)^2 = 0.$$

Durch einen Punkt des einfachen Kegelschnitts $a:b:c:e = 6:-3t:t^2:0$ legen wir eine durch die Doppelcurve vierten Grades gehende Fläche zweiten Grades

$$(ae+3c^2) - t^2(3b^2-4ac) = 0.$$

Die Tangentialebene derselben in dem betrachteten Punkte ist

$$2at^4 + 9bt^3 + 15ct^2 + 3e = 0.$$

Dieselbe schneidet aus der Fläche zweiten Grades zwei Gerade aus, welche beziehlich in den Ebenen $at^2 + 3bt + 3c = 0$ und $2at^2 + 3bt - 3c = 0$ liegen.

Jede dieser beiden Geraden schneidet den einfachen Kegelschnitt einmal und die Doppelcurve vierten Grades in zwei unendlich nahen oder getrennten Punkten. Die erste Gerade gehört der abwickelbaren Fläche an, die zweite aber erzeugt die geradlinige Fläche fünften Grades

$$\begin{aligned} 2at^4 + 9bt^3 + 15ct^2 + 3e &= 0, \\ 2at^2 + 3bt - 3c &= 0, \\ 4at^4 - 24ct^2 - 3e &= 0, \\ 2bt^3 + 6ct^2 + e &= 0. \end{aligned}$$

Die Ebene $b = 0$ schneidet den doppelten Kegelschnitt der Fläche aus $b = 0$, $ae + 9c^2 = 0$. Die Gleichung der geradlinigen Fläche ist

$$4a(ae+3c^2)^2 - 24c(ae+3c^2)(3b^2-4ac) - 3e(3b^2-4ac)^2 = 0.$$

Die Doppelcurve vierten Grades der betrachteten Flächen kann nun selbst wieder in zwei Kegelschnitte zerfallen, so dass dann die geradlinige Fläche fünften Grades drei doppelte Kegelschnitte besitzt.

Die Bedingung hierfür stellen wir folgendermassen auf.

Zwischen den sechs Ausdrücken a, b, c, p, q, r besteht der Voraussetzung zufolge die eine identische Relation

$$at_0^4 + bt_0^2 + c = pt_0^2 + qt_0 + r;$$

weil es aber bloss vier homogene, von einander unabhängige Coordinaten giebt, so giebt es zwischen diesen sechs Ausdrücken noch eine solche identische Relation, welche wir gleich in die Form

$$\alpha^2 a - \gamma^2 c = \lambda p + \mu q + \nu r$$

setzen können.

Wir erhalten aus den Gleichungen der beiden Kegel, welche durch die Doppelcurve hindurchgehen,

$$p^2 - a(pt_0^2 - qt_0 + r) = 0,$$
$$r^2 - c(pt_0^2 - qt_0 + r) = 0$$

diejenige des dritten durch die Doppelcurve gehenden Kegels zweiten Grades mit der Spitze $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$,

$$\alpha^2 p^2 - \gamma^2 r^2 - (\lambda p + \mu q + \nu r)(pt_0^2 - qt_0 + r) = 0.$$

Die Richtung der Tangenten der Curve im Doppelpunkt wird gegeben durch die Gleichungen

$$pt_0^2 - qt_0 + r = 0, \qquad \alpha^2 p^2 - \gamma^2 r^2 = 0,$$
$$\alpha p + \gamma r = 0, \qquad \alpha p - \gamma r = 0.$$

Wenn also die Curve vierten Grades in zwei Kegelschnitte zerfällt, mithin die Gleichung $\alpha^2 p^2 - \gamma^2 r^2 - (\lambda p + \mu q + \nu r)(pt_0^2 - qt_0 + r) = 0$ das Product zweier linearen Factoren ist, so müssen dieselben die Form haben

$$\alpha p - \gamma r + \sigma(pt_0^2 - qt_0 + r) = 0,$$
$$\alpha p + \gamma r + \sigma_1(pt_0^2 - qt_0 + r) = 0.$$

Wenn wir die Producte identificiren, ergiebt sich

$$\alpha(\sigma + \sigma_1)p + \gamma(\sigma - \sigma_1)r + \sigma\sigma_1(pt_0^2 - qt_0 + r) = -(\lambda p + \mu q + \nu r),$$

$$\sigma\sigma_1 t_0 = \mu, \quad \sigma_1 = \frac{\mu}{\sigma t_0}, \quad \alpha\left(\sigma + \frac{\mu}{\sigma t_0}\right) + \lambda + \mu t_0 = 0, \quad \gamma\left(\sigma - \frac{\mu}{\sigma t_0}\right) + \nu + \frac{\mu}{t_0} = 0.$$

Finden diese Gleichungen statt, d. h. ist

$$\alpha^2 a - \gamma^2 c = -\alpha\left(\sigma + \frac{\mu}{\sigma t_0}\right)p - \gamma\left(\sigma - \frac{\mu}{\sigma t_0}\right)r - \frac{\mu}{t_0}(pt_0^2 - qt_0 + r)$$

für irgend welche Werthe von α, γ, μ, σ, so zerfällt die Doppelcurve vierten Grades in zwei Kegelschnitte, die zwei Punkte gemein haben.

Es giebt also geradlinige Flächen fünften Grades mit drei doppelten Kegelschnitten. Diese drei Kegelschnitte haben einen Punkt gemein und schneiden sich zu je zweien in noch je einem Punkte. — (IX.)

Oder umgekehrt:

Legt man in die drei Seitenflächen p, q, r eines Tetraeders pqrs je einen Kegelschnitt, der durch die Ecken der Seitenflächen desselben hindurchgeht, so sind diese drei Kegelschnitte im Allgemeinen die vollständige Doppelcurve einer geradlinigen Fläche fünften Grades.

Es ist auch möglich, dass die drei Punkte, in welchen sich die drei



Kegelschnitte zu je zweien schneiden, in einen zusammenfallen, dass also die Ebenen der drei Kegelschnitte durch dieselbe Gerade gehen.

In diesem Punkte haben jedoch die drei Kegelschnitte nothwendig eine gemeinschaftliche Tangentialebene, während sie eine solche in dem anderen, ihnen gemeinsamen Punkte nicht haben dürfen, weil sonst die Fläche zweiten Grades, auf welcher die drei Kegelschnitte in diesem Falle liegen würden, ein reducibler Theil der geradlinigen Fläche fünften Grades sein würde.

Eine solche Fläche hat nun im Allgemeinen einen einfachen Leitkegelschnitt, welcher mit je zweien der Doppelkegelschnitte noch je eine zweite geradlinige Fläche fünften Grades bestimmt. —

Ein anderer Grund des Zerfallens der Doppelcurve sechsten Grades der allgemeinen geradlinigen Fläche fünften Grades und erster Klasse ist der, dass Doppelerzeugende auftreten.

In dem Falle, dass sich auf der Fläche eine gerade Leitlinie befindet, durch deren jeden Punkt nur eine Erzeugende geht, kann eine Doppelerzeugende nur auftreten, wenn sie mit der Geraden zusammenfällt.

Ist auf der Fläche ein einfacher Kegelschnitt vorhanden, so muss die Doppelerzeugende, wenn eine solche vorhanden, in der Ebene dieses Kegelschnitts liegen; mehr als eine solche kann es in diesem Falle nicht geben. — (X.)

Eine geradlinige Fläche fünften Grades kann auch eine dreifache Erzeugende haben.

Jede Ebene, welche durch eine dreifache Erzeugende einer geradlinigen Fläche fünften Grades geht, schneidet aus der Fläche noch ein Gebilde zweiten Grades aus. Da nun, wie oben bemerkt, auf einer geradlinigen Fläche fünften Grades höchstens ein einfacher Kegelschnitt liegen kann, so müssen diese Gebilde zweiten Grades in zwei Gerade zerfallen, und es ist daher die dreifache Gerade zugleich eine gerade Leitlinie für die Erzeugenden der Fläche; als solche kann dieselbe nur vom ersten Grade sein; da mit ihr die Erzeugende dreimal zusammenfällt, so ist diese Linie überhaupt eine vierfache Gerade der Fläche.

§. 3.

Besondere Betrachtung der zur zweiten *Riemann*schen Klasse gehörenden geradlinigen Flächen fünften Grades.

In der allgemeinen Betrachtung der geradlinigen Flächen fünften Grades ist gezeigt worden, dass die Flächen der zweiten Klasse stets eine unendliche Schaar von Curven dritten Grades ohne Doppelpunkte enthalten.

Es ist also hier die Aufgabe zu lösen, zwei ebene Curven dritten Grades, — die nicht in derselben Ebene liegen, — in allgemeinster Weise reciprok so aufeinander zu beziehen, dass einem jeden Punkte der einen ein Punkt der anderen entspreche.

Damit dann durch die geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Curven eine geradlinige Fläche des fünften Grades bestimmt werde, ist erforderlich, dass ein Punkt der einen Curve zusammenfällt mit dem ihm entsprechenden Punkte der anderen Curve.

Wir lösen die genannte Aufgabe durch rein algebraische Betrachtungen.

Die beiden Curven dritten Grades seien in ihren Ebenen gegeben durch die Gleichungen

$$x:y:z = 1:t:\sqrt{\psi_1(t)};\quad \psi_1 t = 4t^3-g_2t-g_3,$$
$$u:v:w = 1:s:\sqrt{\psi_2(s)};\quad \psi_2 s = 4s^3-g_2's-g_3'.$$

Jedem Werthe von t entsprechen zwei Punkte der ersten Curve; jedem Punkte der ersten Curve soll ein Punkt der zweiten Curve entsprechen, jedem Punkte der zweiten Curve entspricht ein Werth von s: also entsprechen jedem Werthe von t zwei Werthe von s. Ebenso wird gezeigt, dass jedem Werthe von s zwei Werthe von t entsprechen. Es besteht also zwischen s und t eine Gleichung, die in Bezug auf beide vom zweiten Grade ist:

$$fs^2+2gs+h = f't^2+2g't+h' = 0.$$
$$s = \frac{-g\pm\sqrt{g^2-fh}}{f};\quad t = \frac{-g'\pm\sqrt{g'^2-f'h'}}{f'}.$$

Den Werthen von t, für welche $\psi_1(t)=0$ ist, sowie dem Werthe $t=\infty$ entspricht nur ein Punkt der Curve, also auch nur ein Werth von s; es darf sich daher auch nur ein Werth von s aus dieser Gleichung ergeben; also ist die Discriminante g^2-fh von $\psi_1(t)$ nur durch einen constanten Factor verschieden; dasselbe gilt für $g'^2-f'h'$ und $\psi_2(s)$.

Bezeichnen wir den Werth von s, der dem Werthe $t=\infty$ entspricht, mit s_0, und mit t_0 den Werth von t, der dem Werthe $s=\infty$ entspricht, — den Fall, dass die Werthe $s=\infty$, $t=\infty$ einander entsprechen, betrachten wir nachher gesondert —, so hat die Gleichung die Form

$$(t-t_0)^2(s-s_0)^2 + \text{Glieder, die } s^2 \text{ und } t^2 \text{ nicht mehr enthalten:}$$
$$(t-t_0)^2(s-s_0)^2-2a(t-t_0)(s-s_0)-4b(t-t_0)-4c(s-s_0)+d = 0,$$
$$[(t-t_0)(s-s_0)-a]^2-4b(t-t_0)-4c(s-s_0)+d' = 0.$$

Dio Discriminanten sind

$$4c(t-t_0)^3-d'(t-t_0)^2+4ab(t-t_0)+4b^2,$$
$$4b(s-s_0)-d'(s-s_0)^2+4ac(s-s_0)+4c^2.$$

Die Constante b kann nicht gleich Null werden, ohne dass c gleichzeitig Null wird; sonst wäre s rational ausdrückbar durch t und $\sqrt{4c(t-t_0)-d'}$ und nicht durch t und $\sqrt{\psi t}$. Wir nehmen an, weder b noch c sei gleich Null; dann kann man durch die Substitution $t-t_0=\varkappa(t'-t_0')$, $s-s_0=\lambda(s'-s_0')$ und zweckmässige Wahl von $\varkappa$ und λ bewirken, dass in der neuen Gleichung $b'=c'$ wird; wir schreiben also, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun

$$[(t-t_0)(s-s_0)-a]^2-4b(s-s_0)-4b(t-t_0)+db = 0.$$

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Discriminanten in reducirter Form auftreten, sind

$$d=-12t_0; \quad s_0=t_0.$$

Die Discriminanten sind dann

$$b[4t^3-(12t_0^2-4a)t-(-8t_0^3+2at_0-4b)],$$
$$b[4s^3-(12t_0^2-4a)s-(-8t_0^3+2at_0-4b)],$$

also haben beide Curven dieselben Invarianten, und es ist $\psi_1(t)=\psi_2(t)$ *).

Hieraus folgt, dass die beiden Curven dritten Grades einander projectivisch sind, d. h. dass die eine als eine Centralprojection der anderen angesehen werden kann, weil die Gleichung der einen in Bezug auf die homogenen Coordinaten $x:y:z$

$$z^2x = 4y^3-g_2yx^2-g_3x^3$$

übereinstimmt mit der Gleichung der anderen

$$w^2u = 4v^3-g_2vu^2-g_3u^3$$

in Bezug auf die homogenen Coordinaten $u:v:w$.

Wir haben also den Satz:

Alle Curven dritten Grades, welche auf einer geradlinigen Fläche fünften Grades und zweiter Klasse liegen, können aus demselben Kegel dritten Grades ausgeschnitten werden.

Setzen wir

$$b[4t^3-(12t_0^2-4a)t-(-8t_0^3+2at_0-4b)]=b.\psi(t)=b(4t^3-g_2t-g_3),$$

so ergiebt sich

---

*) Dies würde sich auch aus den Sätzen des Herrn *Aronhold* (Monatsberichte der Acad. der Wissensch. 1861, pag. 462 u. f.) haben ableiten lassen.

$$4a = 12t_0^2 - g_2; \quad a = \frac{\psi'(t_0)}{4}, \quad 4b = \psi(t_0);$$

$$s - s_0 = \frac{\psi(t_0) + \frac{1}{2}\psi'(t_0)(t-t_0) + \sqrt{\psi(t_0)}.\sqrt{\psi(t)}}{2(t-t_0)^2},$$

$$s = \frac{\sqrt{\psi(t_0)}.\sqrt{\psi(t)} + 2t_0 t(t_0+t) - \frac{1}{2}g_2(t_0+t) - g_3}{2(t-t_0)^2},$$

$$s = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\psi(t_0)}+\sqrt{\psi(t)}}{t-t_0}\right)^2 - (t_0+t).$$

Dem Werthe $t = t_0$ und $\sqrt{\psi(t)} = \sqrt{\psi(t_0)}$ entspricht $s = \infty$.

Diese Formeln sind Ausdrücke des Additionstheorems der elliptischen Function $\wp u = x$, welche durch die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ und die Anfangsbedingung $\wp(0) = \infty$ definirt ist, und welche Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen zu Grunde legt.

Durch die angegebenen Formeln ist nun auch $\sqrt{\psi(s)}$ bis auf das Vorzeichen bestimmt, d. h. durch t und $\sqrt{\psi(t)}$ ausdrückbar; wir treffen nun die Bestimmung, indem wir nöthigenfalls w mit $-w$ vertauschen, dass für den Punkt $t = \infty$, welchem $s = t_0$ entspricht, der zugehörende Werth von $\sqrt{\psi s}$ auch dem Zeichen nach mit $\sqrt{\psi t_0}$ übereinstimme. Wir setzen deswegen voraus, $\sqrt{\psi t_0}$ sei nicht gleich Null und dem Zeichen nach fixirt. Dann gilt die Formel

$$\sqrt{\psi s} = \left(\frac{\psi(t)}{(t-t_0)^2} - \frac{1}{2}\frac{\psi'(t)}{(t-t_0)}\right)\sqrt{\psi t_0} - \left(\frac{\psi(t_0)}{(t_0-t)^2} - \frac{1}{2}\frac{\psi'(t_0)}{(t_0-t)}\right)\sqrt{\psi t},$$

und man erhält die Ausdrücke von t und $\sqrt{\psi t}$ durch s und $\sqrt{\psi s}$ mittelst Buchstabenvertauschung.

Es ist ferner

$$s + t_0 + t = \frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{\psi t_0}+\sqrt{\psi t}}{t-t_0}\right\}^2 = \frac{1}{4}\left\{\frac{\sqrt{\psi s_0}+\sqrt{\psi s}}{s-s_0}\right\}^2$$

und

$$\frac{\sqrt{\psi t_0}+\sqrt{\psi t}}{t-t_0} = \frac{\sqrt{\psi s_0}+\sqrt{\psi s}}{s-s_0},$$

entsprechend der Formel

$$\frac{\wp'(a-u)+\wp' a}{\wp(a-u)-\wp a} = \frac{\wp'(u)+\wp' a}{\wp u - \wp a}.$$

Dass die Zeichenbestimmung richtig gemacht ist, davon kann man sich auf folgende Weise überzeugen.

Aus den obigen Formeln ergiebt sich für Werthe von t, die t_0 benachbart sind, und für welche $\sqrt{\psi t}$ mit $\sqrt{\psi t_0}$ dem Zeichen nach übereinstimmt:

$$s = \frac{\psi t_0}{(t-t_0)^2}+\cdots,$$

$$\sqrt{\psi s} = \frac{2.\psi t_0.\sqrt{\psi t_0}}{(t-t_0)^3}+\cdots,$$

und für unendlich grosse Werthe von t,

$$s = s_0+\frac{\sqrt{\psi t_0}.\sqrt{\psi t}}{2t^2}+\cdots,$$

$$\sqrt{\psi s} = \sqrt{\psi t_0}+\cdots.$$

Diese Werthepaare lassen eine andere Zeichenbestimmung nicht zu.

Wir denken uns nun die eine Curve projectivisch so geändert, dass dieselbe der anderen congruent wird und darauf mit derselben zur Deckung gebracht.

Es kann dies stets so geschehen, dass der Punkt s, $\sqrt{\psi s}$ zusammenfällt mit dem Punkte $t=s$, $\sqrt{\psi t}=\sqrt{\psi s}$.

Entspricht nun dem Punkte $t=t_1$, $\sqrt{\psi t}=\sqrt{\psi t_1}$, ein Punkt $s=t_2$, $\sqrt{\psi s}=\sqrt{\psi t_2}$, so sagen unsere Gleichungen aus, dass auch dem Punkte $s=t_1$, $\sqrt{\psi s}=\sqrt{\psi t_1}$ der Punkt $t=t_2$, $\sqrt{\psi t}=\sqrt{\psi t_2}$ entspreche. Es entspricht daher dem Punkte $t=t_1$, $\sqrt{\psi t}=\sqrt{\psi t_1}$ der Curve dritten Grades derselbe Punkt $t=t_2$, $\sqrt{\psi t}=\sqrt{\psi t_2}$, man möge ihn als der ersten oder als der zweiten Curve angehörig betrachten.

Wir bezeichnen den Punkt $1:t_0:\sqrt{\psi t_0}$ mit $x_0:y_0:z_0$, den Punkt $1:t:\sqrt{\psi t}$ mit $x_1:y_1:z_1$ und den entsprechenden Punkt $1:s:\sqrt{\psi s}$ mit $x_2:y_2:z_2$, so tritt an die Stelle der Gleichung

$$\frac{\sqrt{\psi t_0}+\sqrt{\psi t}}{t-t_0} = \frac{\sqrt{\psi s_0}+\sqrt{\psi s}}{s-s_0}$$

die folgende

$$\frac{z_1+z_0}{y_1-y_0} = \frac{z_2+z_0}{y_2-y_0},$$

welche aussagt, dass die drei Punkte

$$x_1:y_1:z_1;\quad x_2:y_2:z_2;\quad x_0:y_0:-z_0$$

auf einer geraden Linie liegen. Es geht also die Verbindungslinie je zweier entsprechenden Punkte der Curve stets durch denselben Punkt der Curve

$$x:y:z = 1:t_0:-\sqrt{\psi t_0}.$$

Wir betrachten nun die Fälle, die wir oben ausgenommen hatten.

Entspricht dem Punkte $s = \infty$ entweder $t = \infty$ oder ein Werth, für den $\psi t = 0$ ist, so besteht zwischen s und t eine Gleichung, welche in Bezug auf beide einzeln nur vom ersten Grade ist. Hierher gehört auch der Fall, dass in der zwischen s und t bestehenden Gleichung die Constanten b und c gleich Null werden, und diese Gleichung dadurch reducibel wird.

Diese Fälle kann man jedoch ohne Weiteres auf den behandelten dadurch zurückführen, dass man z. B. die Gleichung der Curve s auf ein anderes Coordinatendreieck bezieht, welches eine andere Wendetangente als $u = 0$ zu der einen Seite hat.

Dies ist auf achtfache Weise möglich, ohne dass sich die Gleichung der Curve ändert. Es entsprechen dann jedem Werthe von s im Allgemeinen zwei Werthe von t, die zwischen ihnen bestehende Gleichung ist irreducibel, und dem Werthe $s = \infty$ entspricht ein Werth $t = t_0$, welcher nicht ∞ ist, und für welchen ψt nicht gleich Null ist.

[Entspricht dem Werthe $s = \infty$, $t = \infty$ oder eine Wurzel der Gleichung, welcher die Wendepunkte der Curve dritten Grades genügen,

$$t^4 - \frac{g_2}{2} t^2 - g_3 t - \frac{g_2^2}{48} = 0,$$

welche zugleich die Drittheilung der ganzen Perioden der elliptischen Integrale ergiebt, die von den Invarianten g_2 und g_3 abhängen, — entspricht also einem Wendepunkte der einen Curve ein Wendepunkt der anderen, so werden die beiden Curven dritten Grades durch die entsprechenden Punkte einander projectivisch zugeordnet, und man kann diesen Fall stets durch eine geeignete Coordinatenumwandlung auf den Fall $s = t$, $\sqrt{\psi s} = \sqrt{\psi t}$ bringen.]

Wir erhalten nun folgende allgemeine Construction für die geradlinigen Flächen fünften Grades und zweiter Klasse:

Auf einer ebenen Curve dritten Grades nehme man einen Punkt fest an; so wird jedem Punkte der Curve ein anderer zugeordnet, der auf der Curve und mit dem betrachteten und dem festen Punkte in gerader Linie liegt. Man denke sich nun die Curve dritten Grades doppelt, so wird jedem Punkte der einen Curve ein nicht mit ihm zusammenfallender Punkt der anderen Curve eindeutig zugeordnet. Hierauf denke man sich die Ebenen beider Curven getrennt und die eine Curve in ihrer Ebene collinear verwandelt.

Lässt man sodann einen Punkt der einen Curve mit seinem entsprechenden Punkte auf der anderen Curve zusammenfallen, so ist der geometrische



Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Curven im Allgemeinen eine geradlinige Fläche fünften Grades und zweiter Klasse.

Die Ebene einer Curve dritten Grades enthält bei der erwähnten Construction ausser dieser Curve noch zwei Erzeugende der Fläche; der ebene Schnitt enthält also überhaupt $3+3+1=7$ Doppelpunkte. Davon gehen ab zwei Berührungspunkte der Ebene mit der Fläche, also bleiben fünf Doppelpunkte, welche der Fläche angehören.

Die Doppelcurve der betrachteten Flächen ist vom fünften Grade. — (I.)

Durch jeden Punkt der Doppelcurve gehen zwei Erzeugende der Fläche, deren jede die Doppelcurve noch in zwei Punkten schneidet. Der Kegel, welcher die Doppelcurve zur Leitlinie und einen Punkt derselben zum Mittelpunkt hat, hat demnach zwei Doppelkanten, und da derselbe vom vierten Grade ist, so gehört die Curve im allgemeinen Falle in die Klasse $\varrho=1$.

Die reciproke Fläche der betrachteten ist von derselben Natur und hat also auch eine Doppelcurve fünften Grades.

Wir folgern hieraus, zu der ursprünglichen Fläche zurückkehrend, dass durch jeden Punkt des Raumes fünf Ebenen gehen, welche aus der Fläche zwei Erzeugende ausschneiden. Für jeden Punkt der Fläche haben drei dieser Ebenen die durch diesen Punkt gehende Erzeugende gemein; die zwei übrigen schneiden aus der Fläche zwei durch diesen Punkt gehende Curven dritten Grades aus.

Wir erhalten also den Satz:

Im allgemeinen Falle gehen durch jeden Punkt der betrachteten Fläche zwei ebene Curven dritten Grades hindurch.

Wenn die Doppelcurve fünften Grades zerfällt, so ist nothwendig unter den Theilen eine doppelte oder eine dreifache Gerade; denn sie kann nicht zerfallen in einen doppelten Kegelschnitt und eine Raumcurve dritten Grades; der Kegelschnitt würde eine einfache Linie der entstehenden Fläche werden.

Enthält die geradlinige Fläche fünften Grades eine *dreifache* gerade Leitlinie, so enthält sie ausser derselben im Allgemeinen einen doppelten Kegelschnitt, welcher die dreifache Gerade in einem Punkte schneidet. Und jede solche Fläche, deren allgemeine Gleichung

$$(ap-bq)^2p'+(ap-bq)s.p''q''+s^2.q'.p'''q'''=0$$

ist, worin p, q, p', q', p'', q'', p''', q''' durch dieselbe Gerade gehen, ist eine geradlinige Fläche. — (II.)

Der doppelte Kegelschnitt $s=0$, $ap-bq=0$ kann auf dieselbe Weise,

wie im vorigen Paragraphen erörtert, in zwei Gerade zerfallen; die eine davon wird eine doppelte Leitgerade, die andere eine Doppelerzeugende der Fläche. — (III.)

Auch kann die doppelte Leitgerade der dreifachen Leitgeraden unendlich nahe rücken. Es unterscheidet sich die dann entstehende Fläche bloss dadurch von der analogen im vorigen Paragraphen betrachteten, dass sie eine Doppelerzeugende weniger besitzt.

Enthält die geradlinige Fläche fünften Grades eine *doppelte* gerade Leitlinie, so enthält sie ausser derselben im Allgemeinen eine Doppelcurve vierten Grades mit zwei scheinbaren Doppelpunkten, welche von der einfachen Geraden in einem Punkte geschnitten wird. — (IV.)

Umgekehrt ist auch jede Fläche fünften Grades mit einer Doppelcurve vierten Grades und einer dieselbe in einem Punkte schneidenden doppelten Geraden eine geradlinige, denn jede durch die Doppelgerade gelegte Ebene schneidet noch eine Curve dritten Grades mit drei Doppelpunkten aus, welche also in drei Gerade zerfallen muss. —

Jedes durch die Doppelcurve vierten Grades gehende Hyperboloid schneidet aus der Fläche zwei Erzeugende aus, welche sich auf der Doppelgeraden schneiden.

Alle Ebenen, welche durch je zwei solche Erzeugende gelegt sind, die Tangentialebenen der Hyperboloide, umhüllen einen Kegel zweiten Grades. Die reciproke geradlinige Fläche dieser Fläche ist also die vorhin betrachtete II. mit einem doppelten Kegelschnitt.

Hat eine Fläche der zweiten Klasse eine doppelte Erzeugende, so schneidet eine durch dieselbe gelegte Ebene im Allgemeinen eine irreducible Curve dritten Grades aus. Der Schnitt einer solchen Ebene enthält demnach im Allgemeinen keinen Doppelpunkt, der nicht auf der Doppelerzeugenden läge.

Hieraus folgt, dass die Theile der Doppelcurve nur ebene Curven sein können, deren Ebene durch die Doppelgerade hindurchgeht. Es sind diese, wie sich bei näherer Betrachtung ergiebt, eine dreifache und eine zweifache Gerade. — (III.)

In diesem Falle werden alle Curven dritten Grades durch die Erzeugenden der Fläche projectivisch.

Es entsteht nun die Frage, welche Doppelcurve hat überhaupt eine geradlinige Fläche fünfter Ordnung, wenn die beiden Curven dritten Grades, die zu ihrer Construction dienen, durch die entsprechenden Punkte projectivisch sind?

Wir legen durch den gemeinschaftlichen Punkt in der Ebene der einen Curve eine Gerade, in der Ebene der anderen Curve die entsprechende Gerade und durch beide Gerade eine Ebene. In dieser Ebene liegen zwei Erzeugende der Fläche. Nach einem bekannten Satze:

> „Haben zwei in verschiedenen Ebenen liegende projectivische ebene Strahlbüschel den Mittelpunkt mit einander gemein, so umhüllen alle Ebenen, welche durch je zwei entsprechende Strahlen beider Büschel gelegt werden, im Allgemeinen einen Kegel zweiten Grades,"

folgern wir, dass die definirten Ebenen, von denen jede zwei Erzeugende aus der Fläche ausschneidet, einen Kegel zweiten Grades umhüllen.

Die reciproke Fläche der eben betrachteten hat daher einen doppelten Kegelschnitt und ausserdem eine dreifache Gerade.

Wir schliessen also mit Bezug auf die obigen Angaben, dass unsere Fläche im Allgemeinen eine zweifache Leitgerade und eine Doppelcurve vierten Grades besitzt, also mit IV. identisch ist.

§. 4.

Besondere Betrachtung der zur dritten *Riemann*schen Klasse gehörenden geradlinigen Flächen fünften Grades.

Bei der allgemeinen Untersuchung der verschiedenen geradlinigen Flächen fünften Grades haben sich zwei Fälle ergeben, in denen die Flächen zur dritten Klasse gehören. Der erste Fall ist der, dass die Fläche eine dreifache und eine zweifache gerade Leitlinie besitzt und der zweite der, dass die Fläche eine dreifache gerade Leitlinie von der Beschaffenheit besitzt, dass jede durch dieselbe hindurchgelegte Ebene aus der Fläche zwei Erzeugende ausschneidet, welche sich auf der dreifachen Geraden schneiden.

Wir werden zeigen, dass der zweite Fall als ein specieller Fall des ersten angesehen werden kann und beginnen mit der Betrachtung des ersten Falles.

Bezeichnet $p\lambda+q=0$ eine beliebige durch die dreifache Gerade gehende Ebene, $r\mu+s=0$ eine beliebige Ebene durch die zweifache Leitgerade, so entsprechen jedem Werthe von λ zwei Werthe von μ und jedem Werthe von μ drei Werthe von λ. Denn jede Ebene $p\lambda+q=0$ schneidet aus der Fläche zwei sich auf der Geraden $r=0$, $s=0$ schneidende Erzeugende aus, und jede Ebene $r\mu+s=0$ schneidet drei Erzeugende aus, die sich auf der Geraden $p=0$, $q=0$ schneiden. Es besteht also zwischen λ und μ eine

algebraische Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$, welche in Bezug auf λ vom dritten und in Bezug auf μ vom zweiten Grade ist.

Aus dieser Gleichung erhält man die Gleichung der Fläche, wenn man $-\frac{q}{p}$ für λ und $-\frac{s}{r}$ für μ setzt und darauf mit $p^3 r^2$ multiplicirt. —

Legt man durch eine Erzeugende eine Ebene, so schneidet diese im Allgemeinen aus der Fläche eine Curve vierten Grades mit einem Doppelpunkte aus.

Mit Bezug auf eine solche Curve ergeben sich nun folgende Sätze.

Fasst man in einer ebenen Curve vierten Grades mit einem Doppelpunkte diesen Doppelpunkt und einen Punkt der Curve als Mittelpunkte zweier geradlinigen ebenen Strahlbüschel auf, so werden die Strahlen derselben durch die Punkte der Curve einander zugeordnet.

Macht man mit diesen Strahlbüscheln zwei $\left\{\begin{matrix}\textit{Ebenenbüschel}\\ \textit{Gerade}\end{matrix}\right\}$ *projectivisch, so ist der Ort der* $\left\{\begin{matrix}\textit{Durchschnittslinien}\\ \textit{Verbindungsgeraden}\end{matrix}\right\}$ *entsprechender Elemente eine geradlinige Fläche fünften Grades von der dritten Riemannschen Klasse.*

Man erhält ferner den Satz:

Macht man eine Gerade projectivisch mit dem Strahlbüschel des Doppelpunkts und lässt einen Punkt derselben mit einem der beiden ihm auf der Curve entsprechenden Punkte zusammenfallen, so ist der geometrische Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte eine geradlinige Fläche fünften Grades von der betrachteten Art.

Ein analoger Satz gilt für eine Gerade, welche dem anderen Strahlbüschel projectivisch ist und durch den Doppelpunkt der Curve vierten Grades gelegt wird. —

Beiläufig sei noch folgender Satz erwähnt:

Jedes Hyperboloid, welches durch drei Erzeugende der Fläche geht, von denen nicht zwei einander schneiden, schneidet aus der Fläche noch zwei Erzeugende aus.

Das Hyperboloid enthält nämlich die beiden Leitgeraden, hat also schon eine Curve vom Grade $3+2+3=8$ mit der Fläche gemein. Da nun auf dieser ein Kegelschnitt nicht vorhanden ist, so muss es noch zwei Erzeugende aus der Fläche ausschneiden.

Wir gehen nun über zur Betrachtung des zweiten Falles.

Durch eine Erzeugende legen wir eine Ebene, welche eine Curve vierten Grades mit einem Doppelpunkte ausschneidet. Die Gleichung dieser Curve sei

$$pqr^2+2u_3r+u_4=0, \quad s=0;$$

$p=0$, $q=0$ sind die Tangenten im Doppelpunkte; wir können annehmen, dass die beiden Ebenen $p=0$ und $q=0$ durch die dreifache Leitgerade hindurch gelegt seien; u_3 und u_4 sind homogene Functionen dritten und vierten Grades von p und q.

Jedem Punkte der dreifachen Geraden entspricht eine durch dieselbe gehende Ebene, welche die beiden Erzeugenden enthält, die von dem Punkte ausgehen, also auch in der Ebene der Curve eine Gerade durch den Doppelpunkt; mithin entsprechen jedem Punkte der dreifachen Geraden zwei Punkte der Curve.

Damit wirklich die so bestimmte Fläche nur vom fünften Grade werde, darf dem Punkte, in welchem die dreifache Gerade die Ebene schneidet, nur ein Punkt der Curve in endlich grosser Entfernung entsprechen, sonst würden zwei Erzeugende in die Ebene eintreten; also muss der andere entsprechende Punkt der Curve unendlich nahe liegen. Hieraus folgt, dass die Erzeugende in der Ebene der Curve vierten Grades eine Tangente der Curve im Doppelpunkte sein muss.

Es sei $q=0$, $s=0$ die in der Ebene $s=0$ liegende Erzeugende. Nun entspricht jeder Ebene $p\lambda+q=0$ ein bestimmter Punkt der dreifachen Leitgeraden; derjenige nämlich, in welchem sich die beiden von dieser Ebene ausgeschnittenen Erzeugenden schneiden. Bestimmt man diesen Punkt durch den Werth der Constante μ in der Gleichung der durch den Punkt gelegten Ebene $r\mu+s=0$, so entspricht jedem μ ein λ und jedem λ ein μ. Man kann nun die Ebene $r=0$ so wählen, dass sie durch den Punkt der dreifachen Geraden hindurchgeht, der der Ebene $p=0$ entspricht, ihr Schnitt mit der Ebene $s=0$ aber unverändert bleibt; dann können wir unbeschadet der Allgemeinheit dem Punkte $p=0$, $q=0$, $r\lambda+s=0$ die Ebene $p\lambda+q=0$ entsprechen lassen.

Es ist also die dreifache Gerade projectivisch dem Strahlbüschel des Doppelpunktes, und es besteht nur der Unterschied von der allgemeinen Construction, dass ein Punkt der Geraden, der einem unendlich nahen Punkte des Doppelpunkts entspricht, mit dem Doppelpunkte zur Coincidenz gebracht wird.

Es handelt sich nun darum, die Gleichung der geradlinigen Fläche aufzustellen.

Setzen wir in der Gleichung der Curve vierten Grades $p\lambda+q=0$, so ergiebt sich

$$-\lambda r^2+2v_3rp+v_4p^2 = 0,$$

worin mit v_3 und v_4 die aus u_3 und u_4 durch die Substitution $q=-p\lambda$ hervorgehenden ganzen Functionen dritten und vierten Grades von λ bezeichnet sind. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{p}{r}=\frac{-v_3\pm\sqrt{v_3^2+v_4\lambda}}{v_4}=\frac{-\lambda}{-v_3\mp\sqrt{v_3^2+v_4\lambda}}.$$

Wir bestimmen nun ausser der Ebene $p\lambda+q=0$ eine zweite Ebene

$$\alpha p+\beta q+\gamma r+\delta s = 0,$$

welche durch den Punkt $p=0,\ q=0,\ r\lambda+s=0$ und durch den Punkt

$$p\lambda+q=0,\quad p+\frac{r\lambda}{-v_3\mp\sqrt{v_3^2+v_4\lambda}}=0,\quad s=0$$

hindurchgeht, also die Ebene $p\lambda+q=0$ in einer Erzeugenden schneidet.

Eine solche Ebene ist

$$(-v_3\mp\sqrt{v_3^2+v_4\lambda})p+r\lambda+s = 0.$$

Diese Ebene bestimmt also für jeden Werth von λ mit der Ebene $p\lambda+q=0$ eine Erzeugende. Gehen wir zu der rationalen Form

$$-p^2v_4\lambda-2(r\lambda+s)pv_3+(r\lambda+s)^2 = 0$$

über, so erhalten wir als Gleichung der Fläche, indem wir λ eliminiren

$$U_4q-2(ps-rq).U_3+(ps-rq)^2p = 0,$$

wo U_4 und U_3 die oben mit u_4 und u_3 bezeichneten homogenen Functionen von p und q sind.

[Wenn die Curve vierten Grades eine Spitze an Stelle des Doppelpunktes hat, ist die allgemeine Gleichung der Fläche

$$U_4q-2(ps-rq).U_3+(ps-rq)^2q = 0.]$$

Wendet man auf diese Fläche die Betrachtungen an, die im §. 2 auf einen speciellen Fall derselben angewandt worden sind, so ergiebt sich, dass die Fläche sich längs der Geraden $p=0,\ q=0$ des Hyperboloids $ps-rq=0$ selbst berührt.

Diese Selbstberührung entspricht einer der dreifachen Leitlinie auf dem Hyperboloid überall unendlich nahe gerückten doppelten geraden Leitlinie. Jede Erzeugende der Fläche berührt nämlich das Hyperboloid und geht daher durch zwei unendlich nahe Erzeugende desselben.

Der besseren Uebersicht wegen folgt hier eine Zusammenstellung der einzelnen Arten der geradlinigen Flächen fünften Grades, die wir in Bezug auf die Doppelcurve unterschieden haben.

A. Geradlinige Flächen fünften Grades und erster algebraischer Klasse. ($\varrho = 0$).

Die Doppelcurve ist:

I. eine vierfache Gerade,

II. eine Raumcurve sechsten Grades mit einem dreifachen Punkte,

III. eine dreifache Leitgerade und eine Raumcurve dritten Grades,

IV. eine dreifache Leitgerade, ein Kegelschnitt und eine Doppelerzeugende,

V. eine dreifache und eine zweifache Leitgerade nebst zwei Doppelerzeugenden; specieller Fall: beide Leitgerade sind unendlich nahe gerückt;

VI. eine zweifache Leitgerade und eine Raumcurve fünften Grades mit einem dreifachen Punkte,

VII. eine zweifache Leitgerade, eine Raumcurve vierten Grades mit einem Doppelpunkt und eine Doppelerzeugende,

VIII. ein Kegelschnitt und eine Raumcurve vierten Grades mit einem Doppelpunkt,

IX. Verein dreier Kegelschnitte,

X. eine Doppelerzeugende und eine Raumcurve fünften Grades mit einem zweifachen Punkte.

B. Geradlinige Flächen fünften Grades und zweiter algebraischer Klasse. ($\varrho = 1$).

Die Doppelcurve ist

I. eine Raumcurve fünften Grades,

II. eine dreifache gerade Leitlinie und ein doppelter Kegelschnitt,

III. eine dreifache und eine zweifache gerade Leitlinie und eine Doppelerzeugende,

IV. eine zweifache gerade Leitlinie und eine Raumcurve vierten Grades.

C. Geradlinige Flächen fünften Grades und dritter algebraischer Klasse. ($\varrho = 2$).

Die Doppelcurve wird gebildet durch eine dreifache und eine zweifache gerade Leitlinie, welche einander auch unendlich nahe rücken können.

Berlin, im October 1866.

Ueber die Transformation des zweiten Grades für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung.

(Von Herrn *Königsberger* zu Greifswald.)

Nachdem ich den einfachsten Fall der Transformation zweiten Grades, in dem die Moduln der transformirten ϑ-Functionen die doppelten der ursprünglichen sind, schon früher im 64sten Bande dieses Journals als Anwendung der dort aufgestellten Ausdrücke für die ϑ-Functionen mit n-fachen Argumenten und n-fachen Moduln behandelt, beabsichtige ich in der vorliegenden Arbeit die Theorie der Transformation zweiten Grades für die *Abel*schen Transscendenten erster Ordnung in ihrer ganzen Allgemeinheit zu entwickeln, indem ich die Ausdrücke der transformirten ϑ-Functionen, also auch die algebraischen Beziehungen zwischen den Gränzen der *Abel*schen Integrale in der einfachsten Gestalt herstelle und sodann die transformirten Integralmoduln als Functionen der ursprünglichen ausgedrückt erhalte. Ich schliesse mit einer Anwendung dieser Theorie auf die Untersuchung der *Abel*schen Integrale erster Ordnung, die durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische Integrale reducirbar sind.

Es sei das System von Differentialgleichungen vorgelegt:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \dfrac{(\alpha+\beta y_1)dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\dfrac{(\alpha+\beta y_2)dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}}, \\[2ex] \dfrac{x_1dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{x_2dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \dfrac{(\gamma+\delta y_1)dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\dfrac{(\gamma+\delta y_2)dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}}, \end{cases}$$

worin:

$$(2.)\quad \begin{cases} R(x) = x(1-x)(1-c^2x)(1-l^2x)(1-m^2x), \\ R_1(y) = y(1-y)(1-\varkappa^2y)(1-\lambda^2y)(1-\mu^2y), \end{cases}$$

so gelten bekanntlich für den Fall, dass die durch die linken Seiten dieses Systems definirten *Abel*schen Transscendenten rationale Functionen zweiten Grades der aus den rechten Seiten desselben hervorgehenden *Abel*schen Functionen sein sollen, die nachstehenden für diese Transformation nothwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen, in denen ich mich der in meiner zweiten Abhandlung über die Transformation der *Abel*schen Functionen (Band 65 dieses Journals) gebrauchten Bezeichnungen bediene:

Wenn:

$$(3.)\quad \begin{cases} \omega_{11} = \rho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}, & \omega_{21} = \rho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22}, \\ \omega_{12} = \rho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}, & \omega_{22} = \rho_{22} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{22}\tau_{22}, \\ \omega'_{11} = \rho'_{11} + \sigma'_{11}\tau_{11} + \sigma'_{21}\tau_{12}, & \omega'_{21} = \rho'_{21} + \sigma'_{11}\tau_{21} + \sigma'_{21}\tau_{22}, \\ \omega'_{12} = \rho'_{12} + \sigma'_{12}\tau_{11} + \sigma'_{22}\tau_{12}, & \omega'_{22} = \rho'_{22} + \sigma'_{12}\tau_{21} + \sigma'_{22}\tau_{22}, \end{cases}$$

gesetzt wird, so ergeben sich die Moduln der transformirten ϑ-Functionen aus den Gleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} \tau'_{11} = \dfrac{\omega'_{11}\omega_{22} - \omega'_{21}\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{21} = \dfrac{\omega'_{12}\omega_{22} - \omega'_{22}\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \\ \tau'_{12} = \dfrac{\omega'_{21}\omega_{11} - \omega'_{11}\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{22} = \dfrac{\omega'_{22}\omega_{11} - \omega'_{12}\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \end{cases}$$

während die Argumente derselben definirt sind durch:

$$(5.)\quad v'_1 = \frac{2(\omega_{22}v_1 - \omega_{12}v_2)}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \qquad v'_2 = \frac{2(\omega_{11}v_2 - \omega_{21}v_1)}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}.$$

Die in den Ausdrücken (3.), (4.), (5.) vorkommenden ganzen Zahlen ρ, σ, ρ', σ' müssen endlich noch die Gleichungen befriedigen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho_{1\alpha}\rho'_{2\alpha} - \rho_{2\alpha}\rho'_{1\alpha}) = 0, & \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\rho'_{2\alpha}) = 0, \\ \sum\limits_{\alpha=1,2}(\sigma_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha}) = 0, & \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha} - \sigma_{1\alpha}\rho'_{1\alpha}) = 2, \\ \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha}\rho'_{1\alpha}) = 0, & \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho_{2\alpha}\sigma'_{2\alpha} - \sigma_{2\alpha}\rho'_{2\alpha}) = 2, \end{cases}$$

oder:

$$(7.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho_{\alpha 1}\sigma_{\alpha 2} - \rho_{\alpha 2}\sigma_{\alpha 1}) = 0, & \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho_{\alpha 2}\sigma'_{\alpha 1} - \sigma_{\alpha 2}\rho'_{\alpha 1}) = 0, \\ \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho'_{\alpha 1}\sigma'_{\alpha 2} - \rho'_{\alpha 2}\sigma'_{\alpha 1}) = 0, & \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho_{\alpha 1}\sigma'_{\alpha 1} - \sigma_{\alpha 1}\rho'_{\alpha 1}) = 2, \\ \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho_{\alpha 1}\sigma'_{\alpha 2} - \sigma_{\alpha 1}\rho'_{\alpha 2}) = 0, & \sum\limits_{\alpha=1,2}(\rho_{\alpha 2}\sigma'_{\alpha 2} - \sigma_{\alpha 2}\rho'_{\alpha 2}) = 2. \end{cases}$$

Aus den hier angegebenen Ausdrücken gehen, wenn

$$(8.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_\lambda = \vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda \\ \quad \times e^{i\pi\left[\begin{array}{l} -(\sigma'_{11}v_1+\sigma'_{21}v_2)(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)-(\sigma'_{12}v_1+\sigma'_{22}v_2)(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2) \\ +\tau'_{11}(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)^2+2\tau'_{12}(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)+\tau'_{22}(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)^2 \end{array}\right]} \end{cases}$$

gesetzt wird, unmittelbar die folgenden von *Hermite* *) aufgestellten Gleichungen hervor:

---

*) *Hermite*, sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes.

$$9.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1+1, v_2)_\lambda = (-1)^{\mathfrak{m}}\, \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1, v_2+1)_\lambda = (-1)^{\mathfrak{n}}\, \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22})_\lambda = (-1)^{\mathfrak{p}}\, \Pi(v_1, v_2)_\lambda \,.\, e^{-2i\pi(2v_2+\tau_{22})}, \\ \Pi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{21})_\lambda = (-1)^{\mathfrak{q}}\, \Pi(v_1, v_2)_\lambda \,.\, e^{-2i\pi(2v_1+\tau_{11})}, \end{cases}$$

worin

$$10.)\quad \begin{cases} \mathfrak{m} = n_1^\lambda \sigma'_{11} + n_2^\lambda \sigma'_{12} - m_2^\lambda \sigma_{12} - m_1^\lambda \sigma_{11} - \sigma_{11}\sigma'_{11} - \sigma_{12}\sigma'_{12}, \\ \mathfrak{n} = n_1^\lambda \sigma'_{21} + n_2^\lambda \sigma'_{22} - m_2^\lambda \sigma_{22} - m_1^\lambda \sigma_{21} - \sigma_{21}\sigma_{21} - \sigma_{22}\sigma'_{22}, \\ \mathfrak{p} = -n_1^\lambda \varrho'_{21} - n_2^\lambda \varrho'_{22} + m_2^\lambda \varrho_{22} + m_1^\lambda \varrho_{21} - \varrho_{21}\varrho'_{21} - \varrho_{22}\varrho'_{22}, \\ \mathfrak{q} = -n_1^\lambda \varrho'_{11} - n_2^\lambda \varrho'_{12} + m_2^\lambda \varrho_{12} + m_1^\lambda \varrho_{11} - \varrho_{11}\varrho'_{11} - \varrho_{12}\varrho'_{12}, \end{cases}$$

wenn m_1^λ, m_2^λ, n_1^λ, n_2^λ die zur Definition von $\vartheta(v_1, v_2)_\lambda$ schon früher vielfach angewandten Zahlen bedeuten.

Setzen wir nun nach *Hermite:*

$$11.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_\lambda \\ = \sum\limits_{m,n}^{-\infty\ldots+\infty} A_{m,n}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]} \end{cases}$$

und suchen die Coefficienten dieser Reihenentwicklung durch die für die Π-Function charakteristischen Bedingungen (9.) zu bestimmen, so finden wir die beiden ersten Relationen durch die für diese Function angenommene Form von selbst befriedigt, während die beiden letzten die Gleichungen liefern:

$$\Sigma A_{m-2,n}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}$$

$$= (-1)^{\mathfrak{q}}\, \Sigma A_{m,n}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}$$

und

$$\Sigma A_{m,n-2}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}$$

$$= (-1)^{\mathfrak{p}}\, \Sigma A_{m,n}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]},$$

woraus die Relationen:

$$(12.)\quad \begin{cases} A_{m,n} = (-1)^{\mathfrak{q}} A_{m-2,n}, \qquad A_{m,n} = (-1)^{\mathfrak{p}} A_{m,n-2}, \\ \qquad A_{m,n} = (-1)^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}} A_{m-2,n-2} \end{cases}$$

hervorgehen.

Es reducirt sich somit die unendliche Reihe der Coefficienten $A_{m,n}$ auf die folgenden vier:

$$A_{0,0},\quad A_{0,1},\quad A_{1,0},\quad A_{1,1},$$

während die anderen durch die leicht herzuleitenden Gleichungen be-

stimmt sind:

$$(13.)\quad \begin{cases} A_{2\mu,2\nu} = (-1)^{\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}} A_{0,0}, \\ A_{2\mu+1,2\nu} = (-1)^{\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}} A_{1,0}, \\ A_{2\mu,2\nu+1} = (-1)^{\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}} A_{0,1}, \\ A_{2\mu+1,2\nu+1} = (-1)^{\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}} A_{1,1}. \end{cases}$$

Wir müssen nun auf eine nähere Untersuchung der bei alleiniger Benutzung der Gleichungen (9.) noch willkürlich gebliebenen Coefficienten $A_{0,0}$, $A_{0,1}$, $A_{1,0}$, $A_{1,1}$ eingehen, von denen sich zeigen wird, dass in gewissen Fällen noch eine Abhängigkeit unter ihnen stattfindet.

Da die Π-Function abgesehen von einer Exponentialgrösse, die in Bezug auf die Argumente v_1, v_2 eine gerade Function ist, eine ϑ-Function mit dem Index λ darstellt und ausserdem der Uebergang von v_1, v_2 zu $-v_1$, $-v_2$ auch v'_1, v'_2 in $-v'_1$, $-v'_2$ verwandelt, so gilt bekanntlich mit Benutzung der schon früher von mir gebrauchten Bezeichnungen die Relation:

$$(14.)\qquad \Pi(-v_1,-v_2)_\lambda = (-1)^{m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda}\,\Pi(v_1,v_2)_\lambda,$$

oder nach Einführung der oben für diese Function angenommenen Reihe:

$$\Sigma A_{m,n}\, e^{i\pi[(-2m-\mathfrak{m})v_1+(-2n-\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}$$

$$= \Sigma A_{-m-\mathfrak{m},-n-\mathfrak{n}}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}$$

$$= (-1)^{m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda}\,\Sigma A_{m,n}\, e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{8}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]},$$

woraus folgt:

$$(15.)\qquad A_{-m-\mathfrak{m},-n-\mathfrak{n}} = (-1)^{m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{m,n}.$$

Stellen wir die eben erhaltene Relation mit den oben (12.) für die Coefficienten A hergeleiteten Gleichungen zusammen, so ergeben sich die nachfolgenden Beziehungen:

$$(16.)\quad \begin{cases} A_{2-m,n} = (-1)^{\mathfrak{q}+m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{m-\mathfrak{m},-n-\mathfrak{n}}, \\ A_{m,2-n} = (-1)^{\mathfrak{p}+m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{-m-\mathfrak{m},n-\mathfrak{n}}, \\ A_{2-m,2-n} = (-1)^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{m-\mathfrak{m},n-\mathfrak{n}}, \end{cases}$$

aus welchen wir den unter gewissen Umständen zwischen den vier Coefficienten $A_{0,0}$, $A_{0,1}$, $A_{1,0}$, $A_{1,1}$ stattfindenden Zusammenhang folgern werden.

Ich ordne die verschiedenen Fälle der Transformation zweiter Ordnung, wenigstens für die nachfolgende Untersuchung, in drei Klassen, während die

schliesslichen Resultate nur zwei wesentlich von einander verschiedene Hauptklassen liefern werden. Diese drei Fälle mögen aus den Bedingungen entspringen, dass entweder $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gerade Zahlen, oder $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ gerade, von den Grössen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ jedoch mindestens eine ungerade, oder endlich von den Grössen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ eine oder beide ungerade, während $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ beliebige Zahlen sein dürfen.

Für die Annahme, dass die vier Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gerade Zahlen sind, ergiebt sich, wenn α und β die Zahlen 0 oder 1 bedeuten, aus den oben stehenden Relationen die Gleichung:

$$A_{\alpha,\beta} = (-1)^{m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{\alpha,\beta},$$

mit anderen Worten, es liefert, da die Coefficienten der Reihenentwickelung von $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ nicht sämmtlich Null sein dürfen, die zu den Gleichungen (9.) hinzugenommene Bedingungsgleichung (15.) keine Relationen zwischen den Grössen

$$A_{0,0}, \quad A_{0,1}, \quad A_{1,0}, \quad A_{1,1},$$

die also, so lange wir nicht andere specielle Eigenschaften der Function $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ in Betracht ziehen, von einander unabhängig bleiben. In diesem Falle wird sich also das transformirte ϑ als eine Summe von vier Reihen in der Form:

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = A_{0,0}R_1 + A_{0,1}R_2 + A_{1,0}R_3 + A_{1,1}R_4$$

darstellen lassen, wenn R_1, R_2, R_3, R_4 unendliche Reihen bedeuten, welche aus den Gliedern der für die Π-Function angenommenen Reihe bestehen.

Sind nun $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ gerade und von den Zahlen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ entweder beide oder nur eine ungerade, so erhält man:

$$A_{0,0} = (-1)^{\mu\mathfrak{q} + \nu\mathfrak{p} + m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{0,0},$$

$$A_{1,0} = (-1)^{\mathfrak{q} + \mu\mathfrak{q} + \nu\mathfrak{p} + m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{1,0},$$

$$A_{0,1} = (-1)^{\mathfrak{p} + \mu\mathfrak{q} + \nu\mathfrak{p} + m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{0,1},$$

$$A_{1,1} = (-1)^{\mathfrak{p} + \mathfrak{q} + \mu\mathfrak{q} + \nu\mathfrak{p} + m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{1,1},$$

woraus durch eine leichte Ueberlegung folgt, dass stets zwei der vier Grössen

$$A_{0,0}, \quad A_{0,1}, \quad A_{1,0}, \quad A_{1,1}$$

verschwinden müssen, so dass sich also die Function Π in diesem Falle in der Form:

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = A_1 Q_1 + A_2 Q_2$$

darstellen lässt, wenn Q_1, Q_2 den obigen Reihen R analog sind.

Gehen wir endlich zur Betrachtung des dritten Falles über, in dem angenommen wurde, dass eine der Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ oder beide ungerade Zahlen sein sollen, so würde z. B. die Annahme

$$\mathfrak{m} = 2\mu+1, \quad \mathfrak{n} = 2\nu,$$

die Relationen liefern:

$$A_{0,0} = (-1)^{\mathfrak{q}+\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}+m_1^\lambda n_1^\lambda+m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{1,0},$$

$$A_{0,1} = (-1)^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+\mu\mathfrak{q}+\nu\mathfrak{p}+m_1^\lambda n_1^\lambda+m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{1,1},$$

d. h. es wären von den vier Coefficienten $A_{0,0}$, $A_{0,1}$, $A_{1,0}$, $A_{1,1}$ nur zwei von einander unabhängig, eine Folgerung, die, wie man aus der Gleichung

$$A_{2-m,2-n} = (-1)^{\mathfrak{p}+\mathfrak{q}+m_1^\lambda n_1^\lambda+m_2^\lambda n_2^\lambda} A_{\mathfrak{m}-m,\mathfrak{n}-n}$$

sieht, ganz allgemein für den Fall, dass von den Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ mindestens eine ungerade ist, statt hat, so dass also auch $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ sich auf die Form bringen lässt:

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = C_1 S_1 + C_2 S_2,$$

worin C_1, C_2 noch zu bestimmende Constanten und S_1, S_2 unendliche Reihen von der oben angegebenen Gestalt bedeuten.

Wir gelangen somit zu folgendem für die Theorie der Transformation zweiten Grades wichtigen Resultat:

Wenn die vier Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade sind, so liefern die oben für die Π-Function aufgestellten Relationen (9.) und (15.) keine Beziehungen zwischen den Coefficienten $A_{0,0}$, $A_{0,1}$, $A_{1,0}$, $A_{1,1}$, so dass sich die mit der oben (8.) angegebenen Exponentialgrösse multiplicirte ϑ-Function des transformirten Systems als Summe von vier mit Constanten multiplicirten Reihen darstellt. Ist dagegen eine der Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ungerade, so lassen die oben zwischen den Coefficienten aufgestellten Beziehungen nur zwei von ihnen unbestimmt, und man erhält die Function $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ als Summe von nur zwei mit noch zu bestimmenden Constanten multiplicirten Reihen.

Ich mache hier darauf aufmerksam, dass diese beiden verschiedenen Fälle eine Eigenthümlichkeit der Transformation zweiter Ordnung sind, welche, wie sich sehr bald zeigen wird, in dem Bestehen einer linearen Relation zwischen je drei Producten von zwei ϑ-Functionen, wie sie hier gebraucht werden sollen, ihren Grund hat. —

Ich will ferner nicht unterlassen zu bemerken, dass zu dem ersten der

beiden Hauptfälle stets das transformirte Fundamentaltheta aller von *Hermite* als Repräsentanten der nicht durch eine lineare Substitution aufeinander zurückführbaren Systeme definirten Transformationen zweiter Ordnung gehört. Denn stellt man die Transformationszahlen in folgender Form zusammen:

$$\begin{matrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho'_{21} & -\varrho'_{22} & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho'_{11} & -\varrho'_{12} & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{matrix}$$

so sind dio 15 Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen der Transformation zweiter Ordnung durch die Schemata bestimmt:

$$(17.)\quad \left\{\begin{matrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&2 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 1&0&0&0 \\ 0&2&i&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&2 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 2&i&0&i' \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&2&-i \\ 0&0&0&1 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 2&0&i&i' \\ 0&2&i''&i \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{matrix}\right\}$$

wenn i, i', i'' die Wertho 0 und 1 annehmen; woraus in Verbindung mit der Annahme

$$m_1^\lambda = m_2^\lambda = n_1^\lambda = n_2^\lambda = 0,$$

welche das Fundamentaltheta definirt, die obige Behauptung unmittelbar als richtig erhellt. —

Da die Darstellungen der Π-Function einzig und allein aus der Berücksichtigung der vier für die Veränderung der Argumente um ganze Perioden des ursprünglichen Systems aufgestellten Bedingungsgleichungen (9.), sowie aus der Annahme hergeleitet sind, dass diese Function durch Veränderung der Argumente in die entgegengesetzten bis auf das Zeichen unverändert bleibt, so werden offenbar alle die Functionen, welche denselben Bedingungen genügen, vorausgesetzt natürlich, dass sie wie die Function Π den Charakter einer ganzen Function haben, sich in eine ähnliche Form setzen lassen, in der die darin vorkommenden unendlichen Reihen dieselben sind, während die Coefficienten sich ändern, da sie von den anderweitigen speciellen Eigenschaften dieser Functionen abhängen.

Fassen wir nun den ersten Hauptfall in's Auge, für den die Bedingungsgleichungen, denen die Π-Function genügen muss, in

$$(18.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1+1, v_2)_\lambda = \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1, v_2+1)_\lambda = \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12})_\lambda = e^{-2i\pi(2v_1+\tau_{11})}\Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1+\tau_{21}, v_2+\tau_{22})_\lambda = e^{-2i\pi(2v_2+\tau_{22})}\Pi(v_1, v_2)_\lambda \end{cases}$$

übergehen, während sie selbst nach den obigen Auseinandersetzungen die Gestalt annimmt

$$(19.)\qquad \Pi(v_1, v_2)_\lambda = A_{0,0}.R_1 + A_{0,1}.R_2 + A_{1,0}.R_3 + A_{1,1}.R_4,$$

so sieht man leicht, dass sich die Reihen R_1, R_2, R_3, R_4 durch die Bemerkung werden bestimmen lassen, dass den für $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ aufgestellten Bedingungen (18.) auch das Quadrat einer jeden ϑ-Function des ursprünglichen *Abel*schen Systems genügt, dass sich dieses also in eine der Gleichung (19.) analoge Form bringen lassen muss, in der R_1, R_2, R_3, R_4 dieselben Reihen bedeuten und nur die Coefficienten

$$A_{0,0}\quad A_{0,1}\quad A_{1,0}\quad A_{1,1}$$

andere Werthe annehmen. Wählt man nun vier ϑ-Quadrate so, dass zwischen ihnen keine lineare Relation stattfindet, so erhält man vier lineare Gleichungen zur Bestimmung von R_1, R_2, R_3, R_4 und kann dann (19.) in die Form setzen:

$$(20.)\qquad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_\lambda = (\alpha)\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})^2_\alpha + (\beta)\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})^2_\beta \\ \qquad\qquad + (\gamma)\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})^2_\gamma + (\delta)\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})^2_\delta, \end{cases}$$

worin wir nur noch die Constanten (α), (β), (γ), (δ) zu bestimmen haben.

Wenn man für v_1, v_2 vier Substitutionen in halben Perioden finden kann, welche nur die Indices der rechten Seite der Gleichung (20.) ändern, während sie den der linken Seite unverändert lassen, so hätte man, indem man die Variablen verschwinden liesse, vier Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten (α), (β), (γ), (δ) hergestellt, deren linke Seiten identisch sind, so dass also, was ich besonders hervorhebe, in das Endresultat nicht die Nullwerthe anderer transformirter ϑ-Functionen als des $\vartheta(v_1', v_2')_\lambda$ eintreten. Nun ergiebt sich aber leicht aus den für die Argumente der transformirten ϑ-Function gefundenen Ausdrücken (5.), dass folgende für v_1, v_2 gemachte Substitutionen:

$$(21.)\qquad \begin{cases} \qquad\qquad v_1 & \qquad\qquad v_2 \\ \frac{1}{2}\omega_{11} = \frac{1}{2}(\varrho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}) & \frac{1}{2}\omega_{21} = \frac{1}{2}(\varrho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22}) \\ \frac{1}{2}\omega_{12} = \frac{1}{2}(\varrho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}) & \frac{1}{2}\omega_{22} = \frac{1}{2}(\varrho_{22} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{22}\tau_{22}) \\ \frac{1}{2}\omega_{11}' = \frac{1}{2}(\varrho_{11}' + \sigma_{11}'\tau_{11} + \sigma_{21}'\tau_{12}) & \frac{1}{2}\omega_{21}' = \frac{1}{2}(\varrho_{21}' + \sigma_{11}'\tau_{21} + \sigma_{21}'\tau_{22}) \\ \frac{1}{2}\omega_{12}' = \frac{1}{2}(\varrho_{12}' + \sigma_{12}'\tau_{11} + \sigma_{22}'\tau_{12}) & \frac{1}{2}\omega_{22}' = \frac{1}{2}(\varrho_{22}' + \sigma_{12}'\tau_{21} + \sigma_{22}'\tau_{22}) \end{cases}$$

oder die durch Addition aus diesen zusammengesetzten den Index der auf der linken Seite der Gleichung (20.) befindlichen ϑ-Function unverändert lassen, indem sie die transformirten Argumente respective um: 1, 0; 0, 1; τ_{11}', τ_{12}'; τ_{21}', τ_{22}' oder um die aus Addition derselben hervorgehenden Grössen vermehren.

Die auf der linken Seite hinzutretende Exponentialgrösse ist dieselbe, welche die ϑ-Quadrate bei der Substitution der halben Perioden auf der rechten Seite als Factor erhalten.

Es bleibt nun noch vor allen Dingen zu untersuchen übrig, ob diese hier angegebenen Substitutionen auch in der That vier von einander verschiedene Gleichungen zur Berechnung der Constanten (α), (β), (γ), (δ) liefern werden, was nicht geschähe, wenn z. B.

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{11} \equiv \omega_{12} \equiv \omega'_{11} \equiv \omega'_{12} \\ \omega_{21} \equiv \omega_{22} \equiv \omega'_{21} \equiv \omega'_{22} \end{array}\right\} \pmod{2}$$

wäre, da dann nur ganze Perioden zu den Argumenten der rechten Seite hinzutreten würden. Fassen wir zuerst die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen der Transformation zweiten Grades in's Auge und bemerken, dass in den vier oben (17.) aufgestellten Schematen zwei Diagonalglieder den Werth 1 haben, so ergiebt sich aus (21.), dass zwei Substitutionen existiren, die aus halben Perioden bestehen und verschieden sind, so dass die vorgelegte Gleichung, die aus diesen beiden Substitutionen und die aus der Zusammensetzung dieser beiden Substitutionen hervorgehende Gleichung vier im Allgemeinen von einander unabhängige Bestimmungsgleichungen liefern, welche zur Berechnung der Constanten dienen werden. Was nun die den oben aufgestellten 15 Fällen äquivalenten Transformationen zweiten Grades betrifft, die aus jenen durch lineare Substitutionen abgeleitet sind, so ist bekanntlich *) die ϑ-Function des durch eine Transformation ersten Grades abgeleiteten Systems gleich einer mit einer Constanten multiplicirten ϑ-Function des ursprünglichen Systems (abgesehen von einer Exponentialgrösse); es folgt daher nach dem eben Bewiesenen unmittelbar, dass es jedenfalls drei von einander verschiedene Substitutionen in halben Perioden giebt, welche die Indices der rechten Seite ändern, während sie den Index der linken Seite

---

*) Zur Erläuterung des Obigen füge ich einige Worte über die lineare Transformation hinzu:

Die Bedingungsgleichungen für das linear transformirte ϑ lauten, wenn im Uebrigen die für die Transformation zweiten Grades aufgestellten Zahlengleichungen, in denen nur statt der charakteristischen Zahl 2 die Einheit zu setzen ist, zu Hülfe genommen werden, folgendermassen:

$$(a.)\quad \left\{\begin{array}{rcl} \Pi(v_1+1, v_2)_\lambda &=& (-1)^m \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1, v_2+1)_\lambda &=& (-1)^n \Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{21})_\lambda &=& (-1)^\mu \Pi(v_1, v_2)_\lambda e^{-i\pi(2v_1+\tau_{11})}, \\ \Pi(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22})_\lambda &=& (-1)^\nu \Pi(v_1, v_2)_\lambda e^{-i\pi(2v_2+\tau_{22})}, \end{array}\right.$$

unverändert lassen und aus einer einfachen Ueberlegung geht ferner hervor, dass dasselbe dann auch unsere Substitutionen:

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2}\omega_{11} & \frac{1}{2}\omega_{21}; & \frac{1}{2}\omega'_{11} & \frac{1}{2}\omega'_{21} \\ \frac{1}{2}\omega_{12} & \frac{1}{2}\omega_{22}; & \frac{1}{2}\omega'_{12} & \frac{1}{2}\omega'_{22} \end{array}$$

leisten, da sie die transformirten Argumente um 1, 0; 0, 1, τ'_{11}, τ'_{21}; τ'_{12}, τ'_{22} vermehren. Hat man nun durch Anwendung der eben besprochenen Substitutionen sich vier von einander unabhängige, in den Coefficienten lineare Gleichungen hergestellt, so setze man die Argumente $v_1 = v_2 = 0$ und erhält, indem man leicht sieht, dass die Exponentialgrössen auf beiden Seiten fortfallen, Gleichungen von folgender Form:

$$(22.)\quad \begin{cases} \vartheta(0,0,\tau'_{11},\tau'_{12},\tau'_{22})_{\lambda} = (\alpha)\vartheta^2_{\alpha} + (\beta)\vartheta^2_{\beta} + (\gamma)\vartheta^2_{\gamma} + (\delta)\vartheta^2_{\delta}, \\ \vartheta(0,0,\tau'_{11},\tau'_{12},\tau'_{22})_{\lambda} = (\alpha)\varepsilon_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon} + (\beta)\varepsilon_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon} + (\gamma)\varepsilon_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon} + (\delta)\varepsilon_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon}, \\ \vartheta(0,0,\tau'_{11},\tau'_{12},\tau'_{22})_{\lambda} = (\alpha)\varepsilon'_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon'} + (\beta)\varepsilon'_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon'} + (\gamma)\varepsilon'_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon'} + (\delta)\varepsilon'_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon'}, \\ \vartheta(0,0,\tau'_{11},\tau'_{12},\tau'_{22})_{\lambda} = (\alpha)\varepsilon''_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon''} + (\beta)\varepsilon''_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon''} + (\gamma)\varepsilon''_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon''} + (\delta)\varepsilon''_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon''}, \end{cases}$$

worin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varepsilon'_4, \varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \varepsilon''_3, \varepsilon''_4$ ± 1 oder $\pm i$ bedeuten, so dass, wenn man

$$(23.)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \vartheta^2_{\alpha} & \vartheta^2_{\beta} & \vartheta^2_{\gamma} & \vartheta^2_{\delta} \\ \varepsilon_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon} & \varepsilon_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon} & \varepsilon_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon} & \varepsilon_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon} \\ \varepsilon'_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon'} & \varepsilon'_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon'} & \varepsilon'_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon'} & \varepsilon'_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon'} \\ \varepsilon''_1\vartheta^2_{\alpha\varepsilon''} & \varepsilon''_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon''} & \varepsilon''_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon''} & \varepsilon''_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon''} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \vartheta^2_{\beta} & \vartheta^2_{\gamma} & \vartheta^2_{\delta} \\ 1 & \varepsilon_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon} & \varepsilon_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon} & \varepsilon_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon} \\ 1 & \varepsilon'_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon'} & \varepsilon'_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon'} & \varepsilon'_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon'} \\ 1 & \varepsilon''_2\vartheta^2_{\beta\varepsilon''} & \varepsilon''_3\vartheta^2_{\gamma\varepsilon''} & \varepsilon''_4\vartheta^2_{\delta\varepsilon''} \end{vmatrix},$$

---

während die transformirten Argumente durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$v'_1 = \frac{\omega_{22}v_1 - \omega_{12}v_2}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}}, \qquad v'_2 = \frac{\omega_{11}v_2 - \omega_{21}v_1}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{21}\omega_{12}}.$$

Da nun die Gleichungen (*a.*) die für diejenige ϑ-Function charakteristischen Bedingungen sind, für welche:

$$m_1^{\lambda} = \mathfrak{q}, \quad m_2^{\lambda} = \mathfrak{p}, \quad n_1^{\lambda} = \mathfrak{m}, \quad n_2^{\lambda} = \mathfrak{n},$$

so erhält man, wenn man den in der Gleichung (8.) befindlichen Exponentialfactor der ϑ-Function mit $e^{f(v_1, v_2)}$ bezeichnet, die Relation:

$$e^{f(v_1, v_2)}\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_{m_1^{\lambda} m_2^{\lambda} n_1^{\lambda} n_2^{\lambda}} = C.\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\mathfrak{pqmn}},$$

worin C eine Constante bedeutet.

Δ_2, Δ_3, Δ_4 den ähnlich gestalteten Determinanten gleichsetzt, die Transformationsgleichung die Gestalt annimmt:

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Pi(v_1, v_2)_\lambda}{\vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}\vartheta(v_1, v_2)^2_\alpha + \dfrac{\Delta_2}{\Delta}\vartheta(v_1, v_2)^2_\beta \\ \qquad + \dfrac{\Delta_3}{\Delta}\vartheta(v_1, v_2)^2_\gamma + \dfrac{\Delta_4}{\Delta}\vartheta(v_1, v_2)^2_\delta \end{cases}$$

worin $\vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda$, da nach dem Obigen $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ eine gerade Function ist, im Allgemeinen nicht verschwindet.

Da wir nun die Ausdrücke für die transformirten Argumente ausser in der Form der Gleichungen (5.) noch folgendermassen schreiben können:

$$v'_1 = \sigma'_{11}v_1 + \sigma'_{21}v_2 - \tau'_{11}(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{21}v_2) - \tau'_{12}(\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2),$$
$$v'_2 = \sigma'_{12}v_1 + \sigma'_{22}v_2 - \tau'_{21}(\sigma_{11}v_1 + \sigma_{21}v_2) - \tau'_{22}(\sigma_{12}v_1 + \sigma_{22}v_2),$$

so ist leicht einzusehen, dass eine Substitution der um halbe Perioden vermehrten Argumente v_1, v_2 nur die Indices der rechten und linken Seite der Gleichung (24.) ändert. Wenden wir daher drei solcher Substitutionen auf diese Gleichung an, so ergiebt die Division je zweier von diesen so entstehenden Gleichungen die transformirten *Abel*schen Transscendenten als Functionen der ursprünglichen, also auch die algebraischen Ausdrücke, welche zwischen den Grenzen der Integrale der ineinander transformirten *Abel*schen Systeme stattfinden, während das Verschwinden der Argumente unmittelbar die transformirten Integralmoduln als Function der Moduln der vorgelegten Integrale liefert. —

Ich will noch bemerken, dass man sich die wirkliche Ausführung der Transformation durch eine schickliche Wahl der ϑ-Quadrate erleichtern kann, indem z. B. die Wahl von

$$\vartheta(v_1, v_2)^2_5,\quad \vartheta(v_1, v_2)^2_1,\quad \vartheta(v_1, v_2)^2_3,\quad \vartheta(v_1, v_2)^2_{13},$$

wie unmittelbar zu sehen, stets $(\alpha) = \dfrac{\vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda}{\vartheta^2_5}$ liefert und die Zusammensetzung der anderen Coefficienten (β), (γ), (δ) vereinfacht. —

Ich wende mich nun zu dem zweiten Hauptfall der Transformation zweiten Grades, der dadurch charakterisirt war, dass von den Zahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ mindestens eine ungerade ist. Es war gezeigt worden, dass unter dieser Voraussetzung die transformirte Function die Form annimmt

$$\Pi(v_1, v_2)_\lambda = C_1S_1 + C_2S_2,$$

worin C_1, C_2 unbestimmt gebliebene Constanten und S_1, S_2 unendliche Reihen

bedeuten, die aus den Gliedern der oben für die Π-Function angenommenen Entwickelung (11.) bestehen.

Wenn es nun möglich sein wird, andere Functionen, die sich in eine unbedingt convergirende Reihe entwickeln lassen, anzugeben, welche ebenfalls den für die Π-Function aufgestellten vier charakteristischen Bedingungen (9.) genügen und mit dieser zu gleicher Zeit gerade und ungerade sind, so werden sich diese Functionen gleichfalls auf die Form:

$$C_1' S_1 + C_2' S_2$$

bringen lassen, in der die unendlichen Reihen dieselben geblieben sind, während nur die Coefficienten, die von den anderweitigen speciellen Eigenschaften dieser Functionen abhängen, sich geändert haben.

Bezeichnet man nun

$$\vartheta(v_1, v_2)_\lambda \quad \text{mit} \quad \vartheta(v_1, v_2)_{m_1^\lambda m_2^\lambda n_1^\lambda n_2^\lambda},$$

so erkennt man zuerst unmittelbar, dass das *Product*:

$$(\alpha) \qquad \vartheta(v_1, v_2)_{0000} \cdot \vartheta(v_1, v_2)_{qpmn}$$

den Bedingungen (9.) Genüge leistet, und dass ausserdem, wenn auf dieses Product irgend eine der 15 Substitutionen der halben Perioden *) angewandt wird, das neu entstehende Product wiederum eine Function von derselben Eigenschaft ist. Wendet man nämlich auf (α) die Substitution

$$\tfrac{1}{2}\mu_1, \quad \tfrac{1}{2}\mu_2, \quad \tfrac{1}{2}\nu_1, \quad \tfrac{1}{2}\nu_2$$

an, so erhält man:

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \nu_2} \cdot \vartheta(v_1, v_2)_{q+\mu_1\, p+\mu_2\, m+\nu_1\, n+\nu_2},$$

woraus sich sofort die Richtigkeit der obigen Behauptung ergiebt, wenn man die für die ϑ-Functionen bei Substituirung ganzer Perioden charakteristischen Gleichungen beachtet. Um jedoch eine Function zu erhalten, die allen für die Π-Function zur Bestimmung ihrer Form aufgestellten Bedingungsgleichungen genügt, bleibt noch zu zeigen, dass man diese Producte, welche die Gleichungen (9.) befriedigen, nach Belieben so wählen kann, dass dieselben entweder gerade oder ungerade Functionen werden. Wendet man nämlich auf den Ausdruck (α) die noch unbestimmt gelassene Substitution $\frac{1}{2}\mu_1$, $\frac{1}{2}\mu_2$, $\frac{1}{2}\nu_1$, $\frac{1}{2}\nu_2$ an, so wird offenbar das neue Product für negative Argumente in seinen Werth für positive übergehen multiplicirt mit:

$$(-1)^{\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + (\mu_1+q)(\nu_1+m) + (\mu_2+p)(\nu_2+n)} = (-1)^{mq + np + m\mu_1 + q\nu_1 + p\nu_2 + n\mu_2}.$$

---

*) s. Band 64, p. 17 dieses Journals.

Da man nun offenbar die ganzen Zahlen μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, deren Werthe 0 oder 1 sind, auf verschiedene Arten so bestimmen kann, dass nach Belieben:

$$(25.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{m}\mu_1+\mathfrak{q}\nu_1+\mathfrak{p}\nu_2+\mathfrak{n}\mu_2 \equiv 0 \\ \qquad\qquad\qquad \text{oder} \equiv 1 \end{cases} \pmod{2}$$

ist (mit Ausnahme des einen Falles, in welchem $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade sind, der jedoch hier nicht in Betracht kommt), so schliessen wir, dass sich stets unter den durch die Substitution von halben Perioden erhaltenen Producten mehrere finden werden, welche sämmtlichen für die Π-Function geltenden Bedingungen genügen.

Es lassen sich somit immer zwei Producte von je zwei ϑ-Functionen bilden, welche bis auf die Coefficienten C_1, C_2 die Form der Π-Function erhalten, so dass die Reihen S_1, S_2 aus den beiden Gleichungen:

$$\vartheta(v_1, v_2)_\alpha\, \vartheta(v_1, v_2)_\beta = C_1'.S_1+C_2'.S_2,$$
$$\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\, \vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma} = C_1''.S_1+C_2''.S_2$$

gefunden werden können und somit die Function Π die Form annehmen wird:

$$(26.)\qquad \Pi(v_1, v_2)_\lambda = (1)\vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v_1, v_2)_\beta+(2)\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma},$$

worin noch die Coefficienten (1) und (2) zu bestimmen sein werden.

Ich bemerke noch zu der eben gefundenen Darstellung von $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$, dass nunmehr der eigentliche Grund ersichtlich ist, wesshalb sich in unserer Untersuchung zwei Hauptgattungen von Transformationen zweiten Grades ergaben. Während nämlich vier ϑ-Quadrate stets so gewählt werden können, dass keine lineare Abhängigkeit zwischen ihnen besteht, findet zwischen drei ϑ-Producten, die durch Substitution halber Perioden aus einander hergeleitet und zugleich gerade oder ungerade sind, stets eine lineare homogene Gleichung statt, die man sich mit Hülfe der obigen Darstellung leicht herstellen kann. —

Zur Bestimmung der in der Gleichung (26.) vorkommenden Constanten (1) und (2) lässt sich wenigstens ohne Weiteres die in dem ersten Hauptfalle der Transformation zweiten Grades angewandte Methode nicht benutzen. Während nämlich dort durch das Verschwinden der Argumente unmittelbar Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten hergestellt werden konnten, da $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ eine gerade Function sein musste, kann es hier geschehen, dass das transformirte ϑ ein ungerades ist und in Folge dessen die Gleichungen identisch verschwinden. Ich nehme zuerst an, dass λ der Index eines geraden ϑ ist, dass also

$\Pi(0,0)_\lambda$ im Allgemeinen nicht Null ist; dann wird man offenbar durch Anwendung einer Substitution in halben Perioden, welche die Indices der rechten Seite der Gleichung (26.) ändert, während sie den der linken Seite unverändert lässt, in Verbindung mit der vorgelegten Gleichung selbst die beiden zur Bestimmung der Constanten (1) und (2) dienenden Gleichungen erhalten:

$$(27.)\quad \left\{\begin{array}{l} \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda = (1)\vartheta_\alpha\vartheta_\beta \qquad +(2)\vartheta_{\alpha\gamma}\vartheta_{\beta\gamma}, \\ \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda = (1)\varepsilon_1\vartheta_{\alpha\alpha_1}\vartheta_{\beta\alpha_1}+(2)\varepsilon_2\vartheta_{\alpha\gamma\alpha_1}\vartheta_{\beta\gamma\alpha_1}, \end{array}\right.$$

worin ε_1 und ε_2 ± 1 oder $\pm i$ bedeuten.

Setzt man also:

$$(28.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \vartheta_\alpha\vartheta_\beta & \vartheta_{\alpha\gamma}\vartheta_{\beta\gamma} \\ \varepsilon_1\vartheta_{\alpha\alpha_1}\vartheta_{\beta\alpha_1} & \varepsilon_2\vartheta_{\alpha\gamma\alpha_1}\vartheta_{\beta\gamma\alpha_1} \end{vmatrix},$$

$$(29.)\qquad \Delta_1 = \varepsilon_2\vartheta_{\alpha\gamma\alpha_1}\vartheta_{\beta\gamma\alpha_1}-\vartheta_{\alpha\gamma}\vartheta_{\beta\gamma}, \quad \Delta_2 = \vartheta_\alpha\vartheta_\beta-\varepsilon_1\vartheta_{\alpha\alpha_1}\vartheta_{\beta\alpha_1},$$

so erhält man für die transformirte ϑ-Funktion den Ausdruck:

$$(30.)\quad \frac{\Pi(v_1, v_2)_\lambda}{\vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda} = \frac{\Delta_1}{\Delta}\vartheta(v_1, v_2)_\alpha\vartheta(v_1, v_2)_\beta + \frac{\Delta_2}{\Delta}\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma}.$$

Ich will bemerken, dass in diesem Falle durch eine passende Wahl der ϑ-Producte sich die Bestimmung der in den transformirten ϑ-Ausdrücken vorkommenden Constanten vereinfachen lässt. Für die Herstellung der ϑ-Producte war nämlich nur erforderlich, dass sie aus dem Ausdrucke

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{mn}} \cdot \vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}}$$

durch Substitution halber Perioden hervorgingen, so jedoch, dass wenn diese Substitution durch die Transformationszahlen μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 bezeichnet wurde,

$$(25.)\qquad \mathfrak{m}\mu_1+\mathfrak{q}\nu_1+\mathfrak{p}\nu_2+\mathfrak{n}\mu_2 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$$

war. Die Erfüllung eben dieser Congruenz war die Bedingung dafür, dass das ϑ-Product eine gerade Function vorstelle, wobei jedoch die beiden einzelnen Factoren des Productes sich zu gleicher Zeit als gerade oder als ungerade Functionen ergeben konnten. Fügen wir jedoch noch die Congruenz

$$(31.)\qquad \mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2 \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$$

hinzu, so sieht man leicht, dass für beliebige Combinationen der Zahlen 0 oder 1 in den beiden Congruenzen (25.) und (31.) stets gleichzeitige Lösungen existiren, so dass wir für die die Π-Function darstellenden Producte von ϑ-Functionen zwei solche werden auswählen können, dass das eine ein Product gerader, das andere ein Product ungerader ϑ-Functionen ist, dass

sich also beim Verschwinden der Argumente der Werth der einen Constanten unmittelbar ergeben wird. —

Ist nun zweitens λ der Index einer ungeraden ϑ-Function, so mache man in der Gleichung (26.) eine Substitution von halben Perioden, welche z. B.

$$\vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v_1, v_2)_\beta$$

in eine gerade Function verwandelt (dass es eine solche giebt, ist früher bewiesen worden); dann wird, wie man durch eine einfache Ueberlegung findet, die linke Seite der Gleichung sowie das zweite Product der rechten Seite derselben ebenfalls in eine gerade Function übergehen, so dass eine neue Substitution, welche nunmehr den Index der linken Seite nicht ändert, für die Bestimmung der Constanten die Gleichungen liefert:

$$(32.)\quad \begin{cases} \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_{\lambda_1} = (1)\varepsilon'_1\, \vartheta_{\alpha\zeta}\vartheta_{\beta\zeta} + (2)\varepsilon'_2\, \vartheta_{\alpha\gamma\zeta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta}, \\ \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_{\lambda_1} = (1)\varepsilon''_1\, \vartheta_{\alpha\zeta\eta}\vartheta_{\beta\zeta\eta} + (2)\varepsilon''_2\, \vartheta_{\alpha\gamma\zeta\eta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta\eta}, \end{cases}$$

worin ε'_1, ε'_2 und ε''_1, ε''_2 die Grössen ± 1 oder $\pm i$ bedeuten sollen, so dass, wenn man:

$$(33.)\qquad D = \begin{vmatrix} \varepsilon'_1 \vartheta_{\alpha\zeta}\vartheta_{\beta\zeta} & \varepsilon'_2 \vartheta_{\alpha\gamma\zeta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta} \\ \varepsilon''_1 \vartheta_{\alpha\zeta\eta}\vartheta_{\beta\zeta\eta} & \varepsilon''_2 \vartheta_{\alpha\gamma\zeta\eta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta\eta} \end{vmatrix},$$

$$(34.)\qquad D' = \varepsilon''_2 \vartheta_{\alpha\gamma\zeta\eta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta\eta} - \varepsilon'_2 \vartheta_{\alpha\gamma\zeta}\vartheta_{\beta\gamma\zeta}, \qquad D'' = \varepsilon'_1 \vartheta_{\alpha\zeta}\vartheta_{\beta\zeta} - \varepsilon''_1 \vartheta_{\alpha\zeta\eta}\vartheta_{\beta\zeta\eta}$$

setzt, die Transformationsgleichung die Form annimmt:

$$(35.)\quad \frac{\Pi(v_1, v_2)_\lambda}{\vartheta(0, 0, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_{\lambda_1}} = \frac{D'}{D}\vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v_1, v_2)_\beta + \frac{D''}{D}\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma}.$$

Somit ist auch der zweite Hauptfall der Transformation zweiten Grades erledigt, indem durch Substitutionen von halben Perioden aus der Gleichung (35.) genau wie oben neue Gleichungen zur Aufstellung der algebraischen Transformation sowie der Ausdrücke für die transformirten Integralmoduln hergeleitet werden können. —

Ich knüpfe eine Anwendung der eben durchgeführten Theorie der Transformation zweiten Grades an eine von Herrn *Weierstrass* mir gemachte Mittheilung, in welcher gezeigt wird,

„dass, wenn ein *Abel*sches System erster Ordnung:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = du_1,$$
$$\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = du_2$$

„sich in ein anderes transformiren lässt, für welches der Modul der ϑ-
„Function $\tau'_{12}=0$ *) ist, sich die Constanten A und B (auf zweierlei Art)
„so bestimmen lassen, dass

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{\sqrt{R(x)}}=\int\frac{d\xi}{\sqrt{R_1(\xi)}},$$

„wo $R_1(\xi)$ vom dritten Grade und ξ, $\sqrt{R_1(\xi)}$ rational durch x, $\sqrt{R(x)}$
„ausdrückbar sind. Umgekehrt muss zwischen den Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}
„eine Gleichung von der angegebenen Form stattfinden, wenn sich das
„Integral

$$\int\frac{(A+Bx)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

„in der in Rede stehenden Weise in ein elliptisches soll transformiren
„lassen. (Nach *Abel,* Précis. Chap. II. §. 1 théor. II. genügt es aber
„Transformationen dieser Art zu betrachten)". —

Bekanntlich hat *Legendre* in dem *traité des fonctions elliptiques* das Integral:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

auf elliptische Integrale reducirt und *Jacobi* später in seiner Kritik des *Legendre*schen Werkes (Band 8 dieses Journals) das allgemeinere Integral von der Form:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\varkappa^2\lambda^2x)}}$$

durch eine Transformation zweiten Grades auf Integrale niedrigerer Gattung zurückgeführt. Ich will nun untersuchen, ob es noch andere *Abel*sche Integrale erster Ordnung giebt, die durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische reducirbar sind, und auf die obige Mittheilung mich stützend eine Methode zur Behandlung dieser Frage anwenden, die allgemein brauchbar ist und zu einer Erweiterung dieser Betrachtungen in Bezug auf *Abel*sche Integrale, die durch Transformationen höherer Grade auf Integrale von niedrigerer Gattung zurück-

*) oder in den von mir in dieser Abhandlung gebrauchten Bezeichnungen:

$$\omega'_{12}\omega_{22}-\omega'_{22}\omega_{12}$$
$$=(\varrho'_{12}+\sigma'_{12}\tau_{11}+\sigma'_{22}\tau_{12})(\varrho_{22}+\sigma_{12}\tau_{21}+\sigma_{22}\tau_{22})-(\varrho'_{22}+\sigma'_{12}\tau_{21}+\sigma'_{22}\tau_{22})(\varrho_{12}+\sigma_{12}\tau_{11}+\sigma_{22}\tau_{12})=0,$$

oder:

$$\omega'_{21}\omega_{11}-\omega'_{11}\omega_{21}$$
$$=(\varrho'_{21}+\sigma'_{11}\tau_{21}+\sigma'_{21}\tau_{22})(\varrho_{11}+\sigma_{11}\tau_{11}+\sigma_{21}\tau_{12})-(\varrho'_{11}+\sigma'_{11}\tau_{11}+\sigma'_{21}\tau_{12})(\varrho_{21}+\sigma_{11}\tau_{21}+\sigma_{21}\tau_{22})=0.$$

führbar sind, nur eine genaue Behandlung der Transformationstheorie höherer Grade erfordert.

Da die Bedingung

$$(a.)\qquad \tau'_{12} = 0,$$

welche für τ'_{11}, τ'_{22} die Ausdrücke liefert:

$$(b.)\qquad \tau'_{11} = \frac{\varrho'_{11}+\sigma'_{11}\tau_{11}+\sigma'_{21}\tau_{12}}{\varrho_{11}+\sigma_{11}\tau_{11}+\sigma_{21}\tau_{12}},\quad \tau'_{22} = \frac{\varrho'_{22}+\sigma'_{12}\tau_{21}+\sigma'_{22}\tau_{22}}{\varrho_{22}+\sigma_{12}\tau_{21}+\sigma_{22}\tau_{22}}.$$

die Gleichung

$$(c.)\qquad \vartheta(0, 0, \tau'_{11}, 0, \tau'_{22})_{14} = 0$$

zur Folge hat, weil in diesem Falle die Function

$$\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, 0, \tau'_{22})_{14} = \Sigma e^{[\nu_1(2v'_1-1+\tau'_{11}+\nu_1\tau'_{11})+\nu_2(2v'_2-1+\tau'_{22}+\nu_2\tau'_{22})]\pi i}$$

in das Product der beiden ungeraden elliptischen ϑ-Functionen

$$\vartheta(v'_1, \tau'_{11})_1 \vartheta(v'_2, \tau'_{22})_1$$

zerfällt, so kommt es darauf an, alle die hyperelliptischen Systeme aufzustellen, die durch eine Transformation zweiten Grades in andere übergeführt werden können, für welche die Gleichung (*c.*) erfüllt ist.

Wenn wir die oben entwickelte Theorie benutzen wollen, um

$$\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, 0, \tau'_{22})_{14}$$

als homogene Function des zweiten Grades der ϑ-Functionen des vorgelegten Systems auszudrücken, so müssen wir

$$m_1^1 = m_2^1 = n_1^1 = n_2^1 = 1$$

setzen, so dass die Transformationszahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$(d.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{m} = \sigma'_{11}+\sigma'_{12}+\sigma_{12}+\sigma_{11}-\sigma_{11}\sigma'_{11}-\sigma_{12}\sigma'_{12}, \\ \mathfrak{n} = \sigma'_{21}+\sigma'_{22}+\sigma_{22}+\sigma_{21}-\sigma_{21}\sigma'_{21}-\sigma_{22}\sigma'_{22}, \\ \mathfrak{p} = -\varrho'_{21}-\varrho'_{22}-\varrho_{22}-\varrho_{21}-\varrho_{21}\varrho'_{21}-\varrho_{22}\varrho'_{22}, \\ \mathfrak{q} = -\varrho'_{11}-\varrho'_{12}-\varrho_{12}-\varrho_{11}-\varrho_{11}\varrho'_{11}-\varrho_{12}\varrho'_{12}. \end{cases}$$

Ich behaupte nun, dass für alle diejenigen Transformationen zweiten Grades, in denen nicht $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade sind, das transformirte $\Pi(0, 0)_{14}$ nicht Null sein kann. Da nämlich die Function $\Pi(v_1, v_2)_{14}$ eine gerade ist, so wird sie sich unter der angenommenen Bedingung, dass $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ nicht sämmtlich gerade Zahlen sind, durch die Summe von zwei ϑ-Producten ausdrücken lassen von der Form:

$$\Pi(v_1, v_2)_{14} = (1)\vartheta(v_1, v_2)_\alpha \vartheta(v_1, v_2)_\beta + (2)\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma},$$

worin nach der obigen Theorie die ϑ-Producte stets so gewählt werden können, dass α und β Indices gerader, $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ Indices ungerader ϑ-Functionen sind. Lässt man nun die Argumente v_1, v_2 verschwinden, so zeigt die Annahme

$$\Pi(0,0)_{14} = 0,$$

dass $(1) = 0$ ist und wir erhalten somit die Transformationsgleichung:

$$(e.) \qquad \Pi(v_1, v_2)_{14} = (2)\,\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\,\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma}.$$

Da es nun, wie früher gezeigt wurde, stets Substitutionen in halben Perioden für die Argumente v_1, v_2 giebt, welche die Indices der rechten Seite von $(e.)$ ändern, während sie den der linken Seite unverändert lassen, so kann man aus $(e.)$ unmittelbar die Gleichung:

$$(f.) \qquad \Pi(v_1, v_2)_{14} = (2)\,\varepsilon\,\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma\delta}\,\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma\delta}$$

herleiten, woraus folgt, dass:

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma}\,\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma} = \varepsilon\,\vartheta(v_1, v_2)_{\alpha\gamma\delta}\,\vartheta(v_1, v_2)_{\beta\gamma\delta},$$

eine Relation, die offenbar nur für $\tau_{12} = 0$ oder für die hieraus durch lineare Transformation hervorgehenden *Abel*schen Systeme stattfinden kann.

Da die eben gemachten Schlüsse von dem Index 14 der transformirten ϑ-Function ganz unabhängig waren, so folgt, dass keine gerade durch eine Transformation zweiten Grades erhaltene ϑ-Function, für welche die Transformationszahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ nicht sämmtlich gerade sind, für die Nullwerthe der Argumente verschwinden kann.

Es bleiben jetzt noch alle die Transformationen zweiten Grades zu untersuchen, in denen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sämmtlich gerade Zahlen sind, sich also $\vartheta(v_1, v_2)_{14}$ als die Summe von vier mit Constanten multiplicirten ϑ-Quadraten darstellen lässt.

Diese Transformationen können entweder die oben aufgestellten Repräsentanten der 15 nicht äquivalenten Klassen selbst sein oder durch lineare Transformation aus diesen abgeleitete. Ist das Letztere der Fall, so fassen wir den Repräsentanten heraus, welcher zur Klasse der fraglichen Transformation gehört, und es wird sodann

$$\vartheta(v_1', v_2', \tau_{11}', 0, \tau_{22}')_{14}$$

gleich einer mit einer Constanten multiplicirten zu jener Fundamentaltransformation gehörigen geraden ϑ-Function sein, welche aus der ersten durch eine lineare Substitution hervorgeht. Es wird also nach der eben gemachten Annahme auch diese gerade ϑ-Function, die durch eine von den Repräsen-

tanten der nicht äquivalenten Klassen dargestellte Transformation zweiten Grades aus dem ursprünglichen Systeme abgeleitet ist, durch eine Summe von vier ϑ-Quadraten darstellbar sein und für die Nullwerthe der Argumente verschwinden müssen. Es bleibt mithin nur zu untersuchen übrig, welche von den 15 unter einander nicht äquivalenten Transformationen (17.) ein gerades transformirtes ϑ, welches durch die Summe von ϑ-Quadraten darstellbar ist, für die Nullwerthe der Argumente verschwinden lassen.

Setzt man also allgemein:

$$(g.)\quad \Pi(v_1, v_2)_\lambda = (\alpha)\vartheta(v_1, v_2)_\alpha^2 + (\beta)\vartheta(v_1, v_2)_\beta^2 + (\gamma)\vartheta(v_1, v_2)_\gamma^2 + (\delta)\vartheta(v_1, v_2)_\delta^2,$$

worin

$$\Pi(0, 0)_\lambda = 0$$

angenommen wird, so wissen wir, dass es drei Substitutionen in halben Perioden für v_1, v_2 giebt, welche die Indices der rechten Seite ändern, während sie die linke Seite unverändert lassen; es wird also die nothwendige Bedingung für die Redaction der Integrale offenbar die sein, dass die auf der rechten Seite der aus $(g.)$ hervorgehenden Gleichungen entstehende Determinante, welche aus Quadraten von ϑ-Functionen für die Nullwerthe der Argumente besteht, verschwinden muss. Hierbei ist nun wesentlich zu bemerken, dass wir bei der Herstellung dieser vier Gleichungen von dem Index λ der transformirten geraden ϑ-Function unabhängig sind, da die oben angegebenen Substitutionen

$$(h.)\quad \tfrac{1}{2}\omega_{11},\quad \tfrac{1}{2}\omega_{12};\quad \tfrac{1}{2}\omega_{21},\quad \tfrac{1}{2}\omega_{22};\quad \tfrac{1}{2}\omega'_{11},\quad \tfrac{1}{2}\omega'_{12};\quad \tfrac{1}{2}\omega'_{21},\quad \tfrac{1}{2}\omega'_{22}$$

nur durch die Transformationszahlen ϱ, σ, ϱ', σ' bestimmt werden.

Da wir ferner die Indices α, β, γ, δ nach Belieben annehmen dürfen *), wobei es am zweckmässigsten sein wird, für α den Index einer geraden, für β, γ, δ die Indices von ungeraden ϑ-Functionen zu wählen, so kommt die Untersuchung endlich darauf hinaus, auf den Ausdruck:

$$(\alpha)\vartheta(v_1, v_2)_5^2 + (\beta)\vartheta(v_1, v_2)_1^2 + (\gamma)\vartheta(v_1, v_2)_3^2 + (\delta)\vartheta(v_1, v_2)_{13}^2$$

für die fünfzehn in den Schematen (17.) angegebenen Transformationsfälle die durch $(h.)$ bestimmten Substitutionen anzuwenden und die aus dem Verschwinden der aus ϑ-Quadraten bestehenden Determinante hervorgehenden Relationen zwischen den Integralmoduln herzuleiten.

---

*) in soweit wenigstens, als zwischen den vier ϑ-Quadraten:

$$\vartheta(v_1, v_2)_\alpha^2,\quad \vartheta(v_1, v_2)_\beta^2,\quad \vartheta(v_1, v_2)_\gamma^2,\quad \vartheta(v_1, v_2)_\delta^2$$

keine lineare Relation besteht.

Führt man diese Untersuchung durch, auf deren Einzelnheiten ich hier nicht näher eingehe, da sie keine weiteren Schwierigkeiten bietet, so findet man, dass die durch die Zahlen

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

definirte Transformation die Bedingung liefert:

$$\begin{vmatrix} \vartheta_5^2 & \vartheta_1^2 & \vartheta_3^2 & \vartheta_{13}^2 \\ \vartheta_{12}^2 & \vartheta_2^2 & \vartheta_{04}^2 & \vartheta_{23}^2 \\ \vartheta_4^2 & -\vartheta_{14}^2 & -\vartheta_{34}^2 & \vartheta_{02}^2 \\ \vartheta_{03}^2 & -\vartheta_{24}^2 & -\vartheta_0^2 & \vartheta_{01}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$-\vartheta_2^2 . \vartheta_{04}^2 . \vartheta_{34}^2 + \vartheta_{14}^2 . \vartheta_0^2 . \vartheta_{23}^2 = 0,$$

oder

$$\mu^2 = \varkappa^2 . \lambda^2,$$

während die anderen Fälle dieselbe oder die durch lineare Transformationen aus dieser abgeleiteten Relationen

$$\varkappa^2 - \lambda^2 = \mu^2(1-\lambda^2), \quad \varkappa^2 - \lambda^2 = \lambda^2(\varkappa^2 - \mu^2)$$

liefern.

Wir gelangen somit zu dem Resultat, dass das *Jacobi*sche Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\varkappa^2\lambda^2 x)}}$$

sowie die aus diesem durch lineare Transformation hervorgehenden die einzigen *Abel*schen Integrale erster Ordnung sind, die sich durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische reduciren lassen. —

Greifswald, Januar 1866.

Ueber zwei geometrische Probleme.

(Von Herrn *C. F. Geiser* in Zürich.)

Der bekannte Satz: „dass von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades der neunte im Allgemeinen durch die acht übrigen eindeutig bestimmt ist," kann nach zwei Seiten hin zu einer weiteren Ausführung Anlass geben. Man kann sich nämlich 1., die Aufgabe stellen: wenn acht der neun Punkte gegeben sind, den neunten linear zu construiren, welche Aufgabe wohl zuerst von Herrn *Chasles* *) in seiner „Construction de la courbe du troisième ordre" (Comptes rendus 1853) gelöst worden ist. Es bietet sich aber 2., die Frage nach der Abhängigkeit der neun Punkte unter sich dar. Die zur Lösung dieser Frage nöthigen analytischen Hülfsmittel finden sich vorerst in den Abhandlungen des Herrn *Hesse* „über Curven dritten Grades" (dieses Journal, Bd. 28 — 38) und dann in der Abhandlung des Herrn *Aronhold* „über die Doppeltangenten der Curven vierten Grades" (Monatsberichte der Berliner Akademie von 1864). Die synthetische Lösung, welche die nachfolgenden Entwickelungen geben, schliesst sich insofern an die letztcitirte Abhandlung an, als beiderorts die Schaaren von Curven dritten Grades durch sieben feste Punkte zu Grunde gelegt werden.

Aufgabe.

Wenn von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades sieben fest bleiben, während der achte nach einem bestimmten Gesetze sich bewegt, nach welchem Gesetze ändert dann der neunte seine Lage?

I.

Wir setzen zunächst voraus, dass die sieben festen Punkte voneinander unabhängig seien, dann hat man sofort die beiden bekannten Sätze:

1. *Bewegt sich der achte Punkt auf der Verbindungsgeraden zweier Grundpunkte, so beschreibt der neunte Punkt den Kegelschnitt, welcher durch die übrigen fünf Grundpunkte gelegt werden kann.*

2. *Bewegt sich der achte Punkt auf dem Kegelschnitt durch fünf*

---

*) Erst während des Druckes dieses Aufsatzes habe ich gesehen, dass die angeführte Construction zuerst von Herrn *Hart* (Cambridge and Dublin Math. Journ.) gegeben worden ist.

der Grundpunkte, so durchläuft der neunte Punkt die Verbindungsgerade der beiden übrigen.

Einem achten Punkte entspricht, wie im Eingange bemerkt worden, im Allgemeinen nur *ein* neunter, denn gäbe es deren zwei, so existirten zwei Curven dritten Grades, welche zehn Punkte gemein hätten. Diess ist unmöglich, wenn die Curven dritten Grades nicht zerfallen und einen Theil gemein haben, was durch die Annahme der Unabhängigkeit der sieben Grundpunkte von einander ausgeschlossen ist; denn die einzigen Curven dritten Grades welche durch die sieben Grundpunkte gehen und zerfallen, sind diejenigen, welche je aus einem Kegelschnitt durch fünf der Grundpunkte und der Verbindungsgeraden der beiden übrigen bestehen. Dass diese niemals einen Theil gemeinschaftlich haben können, ist klar.

Wenn aber die ausgesprochene Eindeutigkeit keine Ausnahme zulassen würde, so müssten (8) und (9) linear von einander abhängen, d. h. wenn (8) eine Gerade beschreiben würde, so müsste (9) ebenfalls in einer Geraden sich bewegen, was durch die obigen Sätze 1. und 2. widerlegt ist. Dass die Grundpunkte selbst diese Ausnahmefälle ergeben, ist leicht abzusehen. In der That: Betrachtet man die Curve C_3, welche durch die Punkte (2)—(7) geht und in (1) einen Doppelpunkt besitzt, so hat dieselbe mit irgend einer anderen der Curven dritten Grades durch (1)—(7) neun Punkte gemein nämlich (2)—(7) einfach, (1) doppelt (als (1) und (8) gezählt) und noch einen Punkt (9) welcher nothwendig auf C_3 liegen muss. Alle Curven nun durch (1) bis (7) und (9) haben also in (1) zwei Punkte gemein, d. h. sie berühren sich dort. Da nun aber umgekehrt (9) auf unserer speciellen C_3 beliebig gewählt werden kann, und dann stets (8) mit (1) zusammenfallen muss, so folgt:

3. *Fällt von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades, von denen sieben fest sind, der achte mit einem der festen, z. B. mit* (1) *zusammen, so liegt der neunte auf der Curve dritten Grades, welche durch* (2)—(7) *geht und* (1) *zum Doppelpunkte hat.*

Der Satz ist auch in der Umkehrung richtig, was sich in der obigen Betrachtung von selbst versteht.

II.

Man ist nun in den Stand gesetzt, die gestellte Aufgabe zu lösen, denn diess ist geschehen, sobald man angeben kann, in welcher Curve C_x sich (9) bewegt, wenn (8) eine beliebige Gerade G durchläuft. Die Gerade G schneidet

die C_3, welche durch (2)—(7) geht, und (1) zum Doppelpunkte hat, in drei Punkten, und jedem derselben entspricht (1), also ist dieser ein dreifacher Punkt von C_x; dasselbe gilt für jeden der Punkte (2) bis (7). Bewegt sich nun (9) auf einer zweiten Geraden G', so erhält man eine zweite Curve C'_x, welche C_x in x^2 Punkten schneidet. Einer davon ist derjenige Punkt, welcher dem Durchschnittspunkte von G und G' entspricht, die andern fallen mit den Grundpunkten zusammen. Jeder derselben ist sowohl dreifacher Punkt von C_x als von C'_x, also sind in ihm neun Durchschnittspunkte der beiden Curven vereinigt, und es ist

$$x^2 = 1+7.9 \quad \text{oder}$$
$$x = 8; \quad \text{d. h.:}$$

4. *Bleiben von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades sieben fest, während der achte eine Gerade G beschreibt, so durchläuft der neunte eine Curve achten Grades C_8, welche die sieben festen zu dreifachen Punkten hat.*

Man kann ohne Weiteres die folgenden speciellen Sätze hinzufügen:

Geht G durch einen der Grundpunkte, z. B. durch (1), *so zerfällt die C_8 in die C_3, welche durch* (2)—(7) *geht und* (1) *zum Doppelpunkte hat, und eine C_5, welche* (2) *bis* (7) *zu Doppelpunkten hat und durch* (1) *geht,*

und ferner was den Satz 1) ergänzt:

Geht G durch zwei der Grundpunkte, z. B. (1) *und* (2), *so zerfällt C_8 in zwei leicht zu bestimmende Curven dritten Grades, welche je* (1) *oder* (2) *zu Doppelpunkten haben, und einen Kegelschnitt durch die Punkte* (3)—(7).

III.

Das Hauptresultat des vorigen Paragraphen hätte man auch wie folgt erhalten können: durch die festgestellte Beziehung entspricht jedem beliebigen Punkte der Ebene als (8) aufgefasst nur ein einziger Punkt (9), mit Ausnahme der Grundpunkte, deren jedem eine Curve C_y von noch unbestimmten Grade y entspricht. Jeder Geraden in der Ebene wird dann eine Curve C_x vom Grade x zugehören, also auch einer Geraden, welche zwei der Grundpunkte enthält. Die zugehörige C_x muss aber zerfallen, und zwar in die zwei den angenommenen zwei Grundpunkten entsprechenden C_y und den Kegelschnitt der fünf übrigen Grundpunkte. Es ist also:

$$(\alpha.) \quad x = 2y+2.$$

Da einer Geraden eine Curve vom x^{ten} Grade entspricht, so wird einer Curve vom n^{ten} Grade, wie leicht zu beweisen ist, eine Curve vom $n.x^{\text{ten}}$

Grade entsprechen, also speciell einem Kegelschnitte eine Curve $2x^{ten}$ Grades. Geht nun der Kegelschnitt durch fünf der Grundpunkte, so entspricht ihm eine C_{2x}, welche zerfällt, und zwar in die fünf C_y der angenommenen Grundpunkte, und die Gerade der beiden übrigen. Es ist also:

$$(\beta.) \quad 2x = 5y+1.$$

Aus den beiden Gleichungen (α.) und (β.) zieht man $x = 8$ und $y = 3$, was mit den beiden bereits gefundenen Resultaten übereinstimmt. Man kann übrigens jetzt aus der Formel (β.) folgenden Satz herleiten, welcher in gewisser Beziehung den Satz 2. ergänzt:

5. *Wenn von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades sieben fest bleiben, während der achte einen Kegelschnitt beschreibt, so durchläuft der neunte eine Curve sechszehnten Grades, C_{16}, welche die sieben festen Punkte zu sechsfachen Punkten hat. Wenn insbesondere der Kegelschnitt durch fünf der Grundpunkte geht, so zerfällt die C_{16} in fünf leicht zu bestimmende Curven dritten Grades und die Gerade der beiden übrigen Grundpunkte.*

Unter Anwendung des Satzes 4. und vermittelst einiger bekannter Principien lässt sich nun die gestellte Aufgabe für jedes beliebige Gesetz der Bewegung des Punktes (8) vollständig lösen, worauf aber des geringen Interesses wegen hier nicht eingegangen werden soll.

IV.

Wir wollen noch die Frage beantworten: Giebt es Punkte (8), welche mit ihrem entsprechenden Punkte (9) zusammenfallen? Die Betrachtungen, welche den Satz 3. in §. II. zur Folge hatten, geben hierüber vollständige Auskunft. Fallen nämlich die Punkte (8) und (9) zusammen, so construire man die C_3, welche durch (1) bis (6) geht und (8) zum Doppelpunkte hat. Diese hat mit irgend einer anderen Curve der Schaar (1)—(9) zunächst die acht Punkte (1)—(6), (8) und (9) gemein und gehört also selbst dieser Schaar an, d. h. sie geht auch durch (7). Wenn also (8) und (9) zusammenfallen sollen, so muss (8) ein Doppelpunkt irgend einer Curve dritten Grades durch (1)—(7) sein. Das Umgekehrte versteht sich von selbst.

Unter Zuhülfenahme des *Steiner*schen Satzes: *Soll eine Curve dritten Grades durch gegebene sieben Punkte gehen, und einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort dieses Doppelpunktes eine Curve sechsten Grades, welche die sieben Punkte zu Doppelpunkten hat,*“ folgt nun:

6. *Sollen von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades, von denen sieben fest sind, die beiden übrigen zusammenfallen, so ist*

der Ort dieser zusammenfallenden Punkte eine Curve sechsten Grades, welche die sieben Grundpunkte zu Doppelpunkten hat.

Von der Curve sechsten Grades lassen sich übrigens sofort noch eine Reihe von Punkten angeben. Man lege nämlich durch je fünf Grundpunkte einen Kegelschnitt, und durch die beiden übrigen eine Gerade, so haben Kegelschnitt und Gerade zwei Punkte gemein, welche der Curve sechsten Grades angehören; da eine solche Zusammenstellung auf 21 verschiedene Arten möglich ist, so erhält man zu den sieben Doppelpunkten noch 42 einfache Punkte.

V.

Es ist stets angenommen worden, dass die sieben Grundpunkte von einander unabhängig seien. Einzelne Ausnahmen sollen hier noch behandelt werden.

a. Drei der Grundpunkte z. B. (1), (2), (3) liegen auf einer Geraden. Die drei Curven dritten Grades, welche dann diesen drei Punkten entsprechen, zerfallen je in einen Kegelschnitt und eine Gerade, die leicht zu bestimmen sind. Liegt nun ein Punkt (8) auf der Geraden (123), so entspricht ihm nothwendigerweise diese ganze Gerade. Daraus folgt auch, dass die einer beliebigen Geraden entsprechende C_8 in eine Gerade und eine Curve siebenten Grades zerfällt. Einem beliebigen Kegelschnitte durch (4) (5) (6) (7) entspricht eine C_{16}, welche aus vier leicht zu bestimmenden Curven dritten Grades, der doppelt gelegten Geraden (123) und dem Kegelschnitte selbst besteht. Die C_6, welche der Ort der sich selbst entsprechenden Punkte ist, zerfällt in die Gerade (123) und eine C_5 etc.

b. Die sechs Grundpunkte (1) — (6) sollen auf einem Kegelschnitte liegen. Einem Grundpunkte des Kegelschnitts entspricht dann eine C_3, welche in den Kegelschnitt selbst und eine Gerade zerfällt. Einem Punkte auf dem Kegelschnitt entspricht der ganze Kegelschnitt; zu einer beliebigen Geraden gehört eine C_8, welche in den doppelt gelegten Kegelschnitt und eine C_4 zerfällt. Einer der Geraden durch (7) gehört eine C_8 zu, welche aus einer C_3, dem doppelt gelegten Kegelschnitt und einer Geraden besteht. — Die C_6 zerfällt in $C_4 + C_2$.

c. Die sieben Grundpunkte mögen folgendermassen vertheilt sein: (1), (2), (3) bilden die Ecken eines Dreiecks in der Weise, dass (6) auf der Seite (23), (5) auf (31), (4) auf (12) liegt, während (7) der Durchschnitt ist von (16), (25) und (34). Den Grundpunkten selbst entsprechen jeweilen drei

Gerade. Irgend einem Punkte auf einer der sechs Geraden, welche je drei der Grundpunkte enthalten, entspricht die zugehörige Gerade selbst. Die Curve der sich selbst entsprechenden Punkte besteht aus diesen sechs Geraden. Die C_8 einer beliebigen Geraden besteht aus denselben sechs Geraden und einem Kegelschnitt durch (4), (5), (6): einem Kegelschnitt durch (1237) entspricht eine C_{16}, welche zerfällt in die sechs Geraden, jede doppelt gezählt, und eine C_4 mit (456) als Doppelpunkten.

d. Ebenso leicht discutirt man den Fall, wo (123456) auf einem Kegelschnitte liegen, während die Geraden (14), (25), (36) sich in dem Punkte (7) treffen *).

Ein der behandelten Aufgabe analoges Problem bieten die Flächen zweiten Grades. Wenn von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades sieben gegeben sind, so ist durch sie der achte im Allgemeinen eindeutig bestimmt, und durch Herrn *Hesse* ist im 26sten Bande dieses Journals gezeigt worden, wie derselbe linear construirt werden kann. Die gegenseitige Abhängigkeit von acht solchen Punkten ist ebenfalls von Herrn *Hesse* in seinen „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes“ (16te Vorlesung) untersucht worden. Eine neue Behandlung des Gegenstandes giebt die nachfolgende Lösung unserer zweiten

Aufgabe:

Von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades sind sechs von einander unabhängige fest, während der siebente nach einem bestimmten Gesetze sich bewegt. Wie verändert der achte seine Lage?

Es genügt übrigens vollständig, wenn man die Aufgabe löst unter der Voraussetzung 1., der siebente Punkt beschreibt eine willkürliche Gerade, 2., der siebente Punkt beschreibt eine willkürliche Ebene, weil dann nach bekannten Principien die Bewegung des achten Punktes für jede beliebige Veränderung des siebenten bestimmt werden kann.

VI.

Bevor wir auf die Beantwortung dieser Frage näher eingehen, untersuchen wir, in welchen verschiedenen Weisen sich drei Flächen zweiten Grades schneiden können. Zunächst sind die folgenden Fälle zu erwähnen:

---

*) Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Fälle *c.* und *d.* gewissermassen als geometrische Verwandtschaften zweiten und ersten Grades aufgefasst werden können.

1. Die Flächen zweiten Grades fallen ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammen.

2. Sie haben eine Raumcurve vierten Grades (die auch in bekannter Weise in Theile zerfallen kann) gemein, d. h. sie gehören zu demselben Büschel.

3. Sie haben nur acht Punkte gemein. —

Es kann nun auch eintreten, dass die drei Flächen je in zwei Ebenen zerfallen, und zwar so, dass sie eine derselben gemein haben; dann besteht der Durchschnitt aus dieser Ebene und einem Punkte oder einer Geraden, je nachdem die drei zweiten Ebenen einen Punkt oder eine Gerade gemein haben. Dieser Fall tritt übrigens bei der gestellten Aufgabe nicht ein, da wir die Unabhängigkeit der sechs Grundpunkte voneinander voraussetzen. — Aber es kann vorkommen, dass die drei Flächen eine Raumcurve von niederem Grade als dem vierten gemein haben, und diesen Fall müssen wir hier noch berücksichtigen.

4. Haben drei Flächen zweiten Grades, die nicht demselben Büschel angehören, eine irreductible Raumcurve dritten Grades gemein, so schneiden sie sich ausserhalb derselben in keinem weiteren Punkte mehr. Denn wäre ein solcher vorhanden, so könnte man durch ihn eine doppeltschneidende Gerade der Raumcurve dritten Grades legen, welche dann allen Flächen angehören müsste, so dass diese demselben Büschel entnommen wären, was ausgeschlossen ist.

5. Die Flächen haben einen Kegelschnitt K_2 und eine Gerade G, welche K_2 in einem Punkte trifft, gemein: alsdann schneiden sie sich aus demselben Grunde wie vorhin in keinem weiteren Punkte mehr. Dies hat auch seine Gültigkeit, wenn K_2 in zwei sich schneidende Gerade zerfällt.

6. Die Flächen haben einen Kegelschnitt gemein, (der auch in zwei sich schneidende Gerade zerfallen kann), dann schneiden sie sich ausserdem noch in zwei Punkten, weil zwei Kegelschnitte, die derselben Fläche zweiten Grades angehören, stets zwei Punkte gemein haben.

7. Drei Flächen zweiten Grades treffen sich in zwei sich nicht schneidenden Geraden, dann ist kein Schnittpunkt ausserhalb derselben vorhanden. In der That: denn sonst könnte man aus ihm eine Gerade ziehen, welche die beiden ersten trifft, und diese würde dann allen dreien gemein sein, was auf den Specialfall in 5. führt.

8. Die Flächen haben eine Gerade gemein. Je zwei von ihnen

schneiden sich ausserdem noch in einer Raumcurve dritten Grades. Da nun dieselben nach einem Satze von *Chasles* *) vier Punkte gemein haben, so folgt, dass sich die drei Flächen zweiten Grades ausser der Geraden noch in vier Punkten schneiden.

VII.

Es ist jetzt festzustellen, ob und welche Ausnahmefälle die eindeutige Beziehung zwischen dem siebenten und dem achten Punkte erleiden könne. Man sieht sofort ein, *dass zunächst einem der sechs Grundpunkte, wenn der siebente Punkt mit ihm zusammenfällt, nicht bloss ein einziger achter Punkt, sondern eine ganze Fläche zugehört.* Es giebt nun auch Punkte, denen Curven entsprechen, und zwar ergeben sich dieselben aus folgenden Sätzen:

1. Hat eine irreductible Raumcurve dritten Grades mit einer Fläche zweiten Grades sieben Punkte gemein, so gehört sie ihrer ganzen Ausdehnung nach dieser Fläche an.

2. Hat eine Gerade mit einer Fläche zweiten Grades drei Punkte gemein, so ist sie eine Gerade dieser Fläche.

Wählt man also zunächst (7) auf der irreductiblen Raumcurve dritten Grades C_3, welche durch die sechs Grundpunkte (1) bis (6) gelegt werden kann, so haben alle Flächen zweiten Grades durch die sieben Punkte die C_3 gemein, und zwar nach VI, 4 keinen weiteren Punkt, d. h.:

Liegt von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades der siebente auf der Raumcurve dritten Grades, welche durch die sechs ersten gelegt werden kann, so erfüllt der achte diese Raumcurve ganz.

Liegt ferner (7) auf der Verbindungsgeraden G zweier Grundpunkte, z. B. (1) und (2), so haben alle Flächen zweiten Grades durch (1)—(7) die Gerade (12) gemein, und können sich ausserdem nach VI, 8. nur noch in den Punkten (3), (4), (5), (6) schneiden, d. h.

Liegt von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades

---

*) Der citirte Satz lautet: Zwei Raumcurven dritten Grades C_3 und C'_3, welche auf demselben Hyperboloid H liegen, haben vier oder fünf Punkte gemein, je nachdem sie von derselben Schaar oder von verschiedenen Schaaren der Geraden des Hyperboloids doppelt geschnitten werden. Der Beweis kann wie folgt geführt werden: Man lege durch C_3 irgend ein zweites Hyperboloid H', welches H ausser in C_3 noch in einer Geraden G schneidet. H' wird nun von C'_3 in sechs Punkten getroffen, welche offenbar auf G und C_3 liegen. G schneidet C'_3 in zwei, und C_3 in zwei oder einem Punkte, je nachdem der erste oder der zweite der angeführten Fälle eintritt, so dass wirklich für die Schnittpunkte der beiden Raumcurven vier oder fünf Punkte übrig bleiben. Unser Fall erledigt sich dadurch leicht.

der siebente auf der Verbindungsgeraden von zweien der sechs ersten, so erfüllt der achte diese Verbindungsgerade ganz.

Da aber fünfzehn Verbindungsgeraden der sechs Grundpunkte möglich sind, so folgt, dass die Ausnahmepunkte der eindeutigen Beziehung bestehen

1. aus den sechs Grundpunkten, deren jedem eine Fläche F_y von noch unbestimmtem Grade y entspricht;

2. aus den Punkten der C_3 deren jedem die C_3 zugehört;

3. aus den Punkten der fünfzehn G, deren jedem die zugehörige Gerade entspricht.

Die Betrachtungen in VI. lehren zudem, dass keine weiteren Ausnahmefälle möglich sind.

VIII.

Wir fügen zu den Ergebnissen in VII. noch folgenden Satz:

Bewegt sich (7) *in der Ebene, welche durch drei der Grundpunkte, z. B.* (1), (2), (3) *geht, so durchläuft* (8) *die Ebene der drei anderen* (4), (5), (6).

Dem Flächensystem zweiten Grades durch (1)—(6) gehört nämlich auch die Fläche an, welche aus den beiden Ebenen (123) und (456) besteht, also muss (8) in einer dieser beiden liegen. Wäre aber (8) in der Ebene (1237) gelegen, so hätten die sämmtlichen Flächen den Kegelschnitt durch (12378) und die Punkte (456) gemein (resp. einen durch dieselben bestimmten zweiten Kegelschnitt), was nach VI, 6 ausgeschlossen ist, folglich liegt (8) in der Ebene (456). Eine Vervollständigung dieses Satzes wird übrigens in IX. gegeben werden.

Lässt man jetzt (7) *auf der Schnittgeraden G' der Ebenen* (123) *und* (456) *sich bewegen, so wird* (8) *auf eben dieser Geraden bleiben, und zwar wird* (7) *stets sich selbst entsprechen, d. h. mit* (8) *zusammenfallen,* was nach dem vorigen Beweise an sich klar ist.

Für jede der zwanzig Ebenen also, welche drei der Grundpunkte enthalten, und für jede der zehn Geraden G' (ausser den fünfzehn G), in welchen zwei solche Ebenen sich schneiden, ist die gestellte Aufgabe gelöst.

IX.

Wenn (7) eine beliebige Ebene e durchläuft, so beschreibt (8) eine Fläche F_x von noch unbekanntem Grade x. Da e und C_3 sich in drei Punkten schneiden, so hat F_x die C_3 zur dreifachen Curve. Ferner schneidet e jede der Geraden G in einem Punkte, dem G entspricht, also liegen sämmtliche

fünfzehn Geraden G auf F_x. Da jeder Ebene eine F_x entspricht, so wird das auch der Fall sein müssen, für diejenigen, welche drei der Grundpunkte enthalten. Tritt dies ein, so zerfällt F_x in eine Ebene (die Ebene der drei anderen Grundpunkte) und drei F_y (die den ersten drei Grundpunkten entsprechen). Es ist also

$$x = 3y + 1. \text{ —}$$

Einer beliebigen Geraden g entspreche eine Raumcurve C_z von noch zu bestimmendem Grade z. Da g jede F_y in y Punkten schneidet, so ist jeder der Grundpunkte ein y facher Punkt der C_z. Jeder beliebigen Geraden entspricht eine C_z, also auch einer der Geraden G'; es ist aber klar, dass dann C_z zerfällt, und zwar 1. in G' selbst, und da G' sechs der Geraden G trifft, 2. in sechs der Geraden G, so dass also C_z als eine Raumcurve siebenten Grades erscheint.

Zwei beliebigen Ebenen entsprechen zwei F_x und diese schneiden sich, wenn sie irreductibel sind (was offenbar der Fall ist, wenn die beiden Ebenen keinen der Grundpunkte gemeinsam enthalten), in einer Raumcurve vom $x^{2\text{ten}}$ Grade. Diese Raumcurve zerfällt aber, denn die beiden F_x haben gemein:

1. Die C_3, welche für jede der beiden F_x eine dreifache Curve ist, und die also in der Schnittcurve neunfach auftritt, d. h. als Raumcurve vom siebenundzwanzigsten Grade.

2. Die fünfzehn G einfach gezählt,

3. die C_7, welche der Schnittgeraden der beiden Ebenen entspricht, so dass also

$$x^2 = 27 + 15 + 7 = 49$$

und

$$x = 7$$

ist. Da aber

$$x = 3y + 1,$$

so findet man

$$y = 2.$$

Was nun noch die Flächen zweiten Grades anbetrifft, welche einem der Grundpunkte entsprechen, z. B. diejenige, welche von (1) abhängt, so erkennt man leicht, dass ihr die Geraden (12), (13), (14), (15), (16) ganz angehören (ebenso die C_3), so dass dieselbe offenbar nichts anderes ist als der Kegel, welcher (1) zum Mittelpunkte hat, und durch die übrigen Grundpunkte geht, wodurch er vollständig bestimmt ist.

X.

Alles zusammengefasst (wobei einzelne der früheren Sätze wiederholt werden) ergeben sich folgende Resultate:

1. *Bleiben von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades* (durch welche eine doppelt unendliche Schaar solcher Flächen gelegt werden kann) *sechs, welche von einander unabhängig sind, fest, so ist der achte im Allgemeinen eindeutig bestimmt, sobald der siebente gegeben wird.* Dies erleidet folgende Ausnahmen:

a. Fällt der siebente Punkt mit einem der sechs Grundpunkte zusammen, so kann der achte beliebig auf demjenigen Kegel zweiten Grades angenommen werden, welcher diesen Grundpunkt zum Mittelpunkte hat, und durch die fünf übrigen geht.

b. Liegt der siebente Punkt auf der irreductiblen Raumcurve dritten Grades, welche durch die sechs Grundpunkte geht, so kann der achte Punkt auf dieser Raumcurve willkürlich gewählt werden.

c. Wird der siebente Punkt auf irgend einer der fünfzehn Verbindungsgeraden der sechs Punkte zu zweien angenommen, so kann der achte auf dieser Verbindungsgeraden willkürlich gewählt werden.

2. *Beschreibt der siebente Punkt irgend eine Ebene, so durchläuft der achte eine Fläche vom siebenten Grade, welche die Raumcurve dritten Grades durch die sechs Grundpunkte zur dreifachen Curve hat, und zudem die fünfzehn Veerbindungsgeraden dieser Punkte einfach enthält.*

3. *Bewegt sich der siebente Punkt auf einer beliebigen Geraden, welche keinen der Grundpunkte enthält, so durchläuft der achte eine Raumcurve siebenten Grades, welche die sechs Grundpunkte zu Doppelpunkten hat.*

XI.

Man kann auch nach den Punkten (7) fragen, welche mit ihren entsprechenden Punkten (8.) zusammenfallen. Zur Beantwortung nehme man an, dass für einen Punkt (7) das Verlangte eintreffe, dann kann man durch (2), (3), (4), (5), (6) einen Kegel zweiten Grades mit dem Mittelpunkte (7) legen. Dieser hat nun mit der doppelt unendlichen Schaar von Flächen zweiten Grades durch (1) bis (8) sieben der gemeinschaftlichen Punkte gemein, nämlich (2) bis (8), also auch den achten (1)*). Die Frage, welche wir uns

*) Diese Betrachtung ergiebt unmittelbar und unabhängig von den früheren Entwickelungen, dass einem der Grundpunkte der Kegel zweiten Grades entspricht, welcher ihn zum Mittelpunkte hat und durch die fünf übrigen geht. Die Gleichung $x=3y+1$ führt dann sofort auf einen der beiden gesuchten Hauptsätze in IX.

gestellt haben, ist also gleichbedeutend mit der anderen: Welches ist der Ort der Mittelpunkte der Kegelflächen zweiten Grades, welche durch sechs voneinander unabhängige Punkte im Raume gelegt werden können? Eine synthetische Lösung derselben findet sich in der zürcherischen Vierteljahrsschrift, Bd. X; ihr entnehmen wir einige der nachfolgenden Angaben: Der gesuchte Ort ist eine Fläche vierten Grades F_4, welche enthält: 1. die irreductible Raumcurve dritten Grades durch die sechs Grundpunkte, 2. die fünfzehn Verbindungsgeraden, welche dieselben zu je zweien verbinden, 3. die zehn Geraden, in denen sich je zwei Ebenen schneiden, welche zusammen alle sechs Grundpunkte enthalten. Zufolge des Satzes: „Enthält eine Fläche drei durch einen Punkt gehende Gerade, welche nicht in derselben Ebene liegen, so ist ihr Schnittpunkt ein Doppelpunkt der Fläche", sind die Grundpunkte Doppelpunkte der betrachteten Fläche F_4. — Wenn nun F_7 die einer Ebene e entsprechende Fläche nach obiger Beziehung ist, so schneidet sie die F_4 in einer Raumcurve vom achtundzwanzigsten Grade. Diese besteht aus der dreifachen Raumcurve dritten Grades C_3, den fünfzehn Verbindungsgeraden G der Grundpunkte, einfach gezählt, und der ebenen Curve vierten Grades, in welcher sich e und F_4 treffen. F_7 hat aber ausser dieser Curve noch eine Curve dritten Grades mit e gemein, die, wie man leicht erkennt, aus den drei Geraden besteht, welche die drei Durchschnittspunkte von e mit C_3 untereinander verbinden.

Eine Reihe von interessanten speciellen Fällen, welche die durchgeführte allgemeine Entwickelung gewährt, kann hier des Raumes wegen nicht näher erörtert werden.

Zürich, den 20. October 1866.

Darstellung symmetrischer Functionen durch die Potenzsummen.

(Von Herrn *Hermann Hankel* in Leipzig.)

Bekanntlich hat *Waring* in seinen „meditationes algebraicae" 1770 eine Formel gegeben, durch welche jede homogene, rationale ganze, symmetrische Function der Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_m$ einer algebraischen Gleichung als Function der Potenzsummen und zwar durch eine Summe von Producten solcher dargestellt wird. In einer viel übersichtlicheren, aber, wie es scheint, bisher noch nicht bemerkten Weise kann man dieselbe Aufgabe mit Hülfe von Determinanten lösen.

I. *Es lässt sich nämlich jede symmetrische Function*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = \Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

wo unter dem Summenzeichen alle möglichen Combinationen und Permutationen der Wurzeln $x_1 \dots x_m$ an Stelle von $x_1 \dots x_n$ zu setzen sind, *durch eine Summe von Determinanten ausdrücken, welche aus*

$$(1.)\quad \begin{vmatrix} s_{\alpha_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2} & s_{\alpha_2} & 2 & \dots & 0 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} & s_{\alpha_2+\alpha_3} & s_{\alpha_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} & s_{\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n} & s_{\alpha_3+\dots+\alpha_n} & \dots & s_{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

hervorgehen, wenn man die $\alpha_1, \dots \alpha_n$ *auf jede Weise permutirt; und zwar ist diese Summe*:

$$= n!(\alpha_1, \dots \alpha_n).$$

Die wirkliche Darstellung gestaltet sich auf diese Weise keineswegs so complicirt, als es auf den ersten Blick scheinen könnte. So hat man z. B. um

$$5!\Sigma x_1^a x_2^b x_3^c x_4^d x_5^e$$

durch die Potenzsummen darzustellen, zunächst die Determinante:

$$\begin{vmatrix} s_a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_{a+b} & s_b & 2 & 0 & 0 \\ s_{a+b+c} & s_{b+c} & s_c & 3 & 0 \\ s_{a+b+c+d} & s_{b+c+d} & s_{c+d} & s_d & 4 \\ s_{a+b+c+d+e} & s_{b+c+d+e} & s_{c+d+e} & s_{d+e} & s_e \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = s_a s_b s_c s_d s_e & - \{4 s_a s_b s_c s_{d+e} + 3 s_a s_b s_e s_{c+d} + 2 s_a s_d s_c s_{b+c} + s_e s_d s_c s_{a+b}\} \\ & + \{12 s_a s_b s_{c+d+e} + 6 s_a s_e s_{b+c+d} + 2 s_d s_e s_{a+b+c}\} \\ & - \{24 s_a s_{b+c+d+e} + 6 s_e s_{a+b+c+d}\} + \{8 s_a s_{b+c} s_{d+e} + 4 s_c s_{a+b} s_{d+e} + 3 s_e s_{a+b} s_{c+d}\} \\ & - \{12 s_{a+b} s_{c+d+e} + 8 s_{d+e} s_{a+b+c}\} + 24 s_{a+b+c+d+e} \end{aligned}$$

zu entwickeln. Dann hat man alle Permutationen der a, b, c, d, e vorzunehmen und zu addiren; dabei wird z. B. aus $s_a s_b s_e s_{c+d}$ jedes Product dieser Form also $s_a s_b s_c s_{d+e}$ nur einmal erzeugt, wenn zunächst die Vertauschbarkeit der Factoren s_a, s_b, s_c und der Summanden d und e in s_{d+e} ignorirt wird. Ebenso wird aus $s_a s_d s_c s_{b+c}$ und $s_e s_d s_c s_{a+b}$ in diesem Sinne das Product $s_a s_b s_c s_{d+e}$ nur einmal erhalten. In der Summe wird dasselbe sonach mit dem Factor $4+3+2+1=10$ erscheinen, und so überhaupt:

$$\begin{aligned} 5!(a, b, c, d, e) = \Sigma\{ & s_a s_b s_c s_d s_e - 10 s_a s_b s_c s_{d+e} + 20 s_a s_b s_{c+d+e} \\ & - 30 s_a s_{b+c+d+e} + 15 s_a s_{b+c} s_{d+e} - 20 s_{a+b} s_{c+d+e} + 24 s_{a+b+c+d+e}\}; \end{aligned}$$

wo in dieser Summe alle möglichen Permutationen zu bilden sind. Da aber die sämmtlichen so entstehenden Glieder von der Form $s_a s_b s_c s_d s_e$ identisch sind, so ist $\Sigma s_a s_b s_c s_d s_e = 5! s_a s_b s_c s_d s_e$. Da ferner die Permutationen von a, b, c einerseits und c, d andererseits, das Product $s_a s_b s_c s_{d+e}$ in Wahrheit nicht ändern, so wird dasselbe $3!2!$ mal in der obigen Summe erscheinen und so $\Sigma s_a s_b s_c s_{d+e} = 12 \mathfrak{S} s_a s_b s_c s_{d+e}$ sein, wenn unter $\mathfrak{S}$ nur die Summe der wirklich verschiedenen Producte verstanden wird. Ebenso wird jedes Product $s_a s_b s_{c+d+e}$ in obiger Summe $2!3!$ mal gebildet, $s_a s_{b+c+d+e}$ $4!$ mal; in $s_a s_{b+c} s_{d+e}$ wird man sowohl b und c als auch d und e, sowie auch überdies diese beiden Gruppen $b+c$ und $d+e$ mit einander vertauschen können, ohne dass ein anderes Product erhalten wird; dasselbe wird daher $2!2!2!$ mal in der obigen Summe erzeugt. Ferner erhält man $s_{a+b} s_{c+d+e}$ $2!3!$ mal und endlich $s_{a+b+c+d+e}$ $5!$ mal, so dass man:

$$\begin{aligned} (a, b, c, d, e) = & \; s_a s_b s_c s_d s_e - \mathfrak{S} s_a s_b s_c s_{d+e} + 2 \mathfrak{S} s_a s_b s_{c+d+e} \\ & - 6 \mathfrak{S} s_a s_{b+c+d+e} + \mathfrak{S} s_a s_{b+c} s_{d+e} - 2 \mathfrak{S} s_{a+b} s_{c+d+e} + 24 s_{a+b+c+d+e} \end{aligned}$$

findet, wo sich die Summen überall auf die Bildung aller wirklich verschiedenen Glieder derselben Form beziehen.

Ein besonderer Fall unserer allgemeinen Formel ist schon bekannt: Wenn nämlich alle Exponenten $\alpha_1, \dots \alpha_n = 1$ und damit auch alle Determinanten der obigen Summe einander gleich sind, so erhält man:

$$\Sigma x_1 x_2 \dots x_n = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Diese Summe ist aber nicht unmittelbar der n^{te} Coefficient der algebraischen Gleichung, deren Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$ sind, sondern das $n!$ fache desselben; denn in der Σ hat man nicht allein alle Combinationen zu je n, sondern auch alle Permutationen innerhalb einer jeden Combination $x_1, x_2, \dots x_n$ eintreten zu lassen. Auf diesen Umstand hat man überhaupt zu achten, wenn man eine symmetrische Function $(\alpha_1, \dots \alpha_n)$, in der nicht alle Exponenten von einander verschieden sind, durch die Summe von Determinanten darstellen will.

II. Um den obigen Satz I. nun allgemein zu erweisen, gehe ich von einer anderen Form desselben aus. Ich werde nämlich zeigen:

Dass $(n-1)!(\alpha_1, \dots \alpha_n)$ *durch eine Summe von* $(n-1)!$ ***Determinanten*** *von der Form* (1.) *dargestellt wird, welche man durch Permutation der Indices* $\alpha_1, \dots \alpha_{n-1}$ *erhält, während der letzte Index* α_n *und damit die letzte Verticalreihe in den Determinanten überall unverändert bleibt.*

Dass hiermit zugleich die obige Form I. des Satzes erwiesen wird, ist evident, denn man braucht, um diese zu erhalten, nur in jeder Determinante noch die Permutationen von α_n mit $\alpha_1, \dots \alpha_{n-1}$ vorzunehmen.

Was aber die jetzige Form betrifft, so kann dieselbe für $n = 2, 3$ leicht verificirt werden; denn nach ihr ist:

$$\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = \begin{vmatrix} s_{\alpha_1} & 1 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2} & s_{\alpha_2} \end{vmatrix} = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} - s_{\alpha_1+\alpha_2},$$

$$2!\,\Sigma x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} = \begin{vmatrix} s_{\alpha_1} & 1 & 0 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2} & s_{\alpha_2} & 2 \\ s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} & s_{\alpha_2+\alpha_3} & s_{\alpha_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{\alpha_2} & 1 & 0 \\ s_{\alpha_2+\alpha_1} & s_{\alpha_1} & 2 \\ s_{\alpha_2+\alpha_1+\alpha_3} & s_{\alpha_1+\alpha_3} & s_{\alpha_3} \end{vmatrix}$$

$$= 2\{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_3} - s_{\alpha_1} s_{\alpha_2+\alpha_3} - s_{\alpha_2} s_{\alpha_3+\alpha_1} - s_{\alpha_3} s_{\alpha_1+\alpha_2} + 2 s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\}.$$

Durch eine bekannte Schlussweise kann man hieraus die Formel allgemein

erweisen mittels des Satzes:

$$(2.)\qquad (\alpha_1, \dots \alpha_n) = s_{\alpha_{i_n}}(\alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_{n-1}}) - \Sigma(\alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_{n-2}}, \alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n})$$

worin i_n eine beliebige, aber bestimmte Zahl aus der Reihe $1, 2, \dots n$ bezeichnet, und i_{n-1} in der Σ folgeweise die Werthe $1, 2, \dots n$, mit Ausschluss der für i_n gewählten Zahl zu durchlaufen hat, die Zahlen $i_1, \dots i_{n-2}$ aber die übrigen $(n-2)$ Zahlen aus $1, 2, \dots n$ in irgend einer Reihenfolge bezeichnen.

Setzt man nun voraus, dass der Satz in der II. Form für eine homogene Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erwiesen ist, so hat man danach

$$(n-2)!(\alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_{n-2}}, \alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}) =$$

$$\Sigma \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_{n-2}}} & s_{\alpha_{i_2}+\dots+\alpha_{i_{n-2}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-2}}} & n-2 \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_n}} & s_{\alpha_{i_2}+\dots+\alpha_{i_n}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-2}}+\alpha_{i_{n-1}}+\alpha_{i_n}} & s_{\alpha_{i_{n-1}}+\alpha_{i_n}} \end{vmatrix},$$

wo in dieser Summe $i_1, \dots i_{n-2}$ alle möglichen Permutationen der Zahlenwerthe $1, 2, \dots n$, mit Ausschluss der für i_{n-1} und i_n gewählten, zu durchlaufen haben. Durch Hinzufügung einer neuen vertikalen und horizontalen Reihe kann man für dieselbe Summe:

$$-\frac{1}{n-1}\Sigma \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_{n-2}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-2}}} & n-2 & 0 \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_{n-1}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-2}}+\alpha_{i_{n-1}}} & s_{\alpha_{i_{n-1}}} & n-1 \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_n}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-2}}+\alpha_{i_{n-1}}+\alpha_{i_n}} & s_{\alpha_{i_{n-1}}+\alpha_{i_n}} & 0 \end{vmatrix}$$

schreiben, und man sieht daher, dass

$$-\Sigma(\alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_{n-2}}, \alpha_{i_{n-1}} + \alpha_{i_n}),$$

wo die Summe in dem oben bei (2.) angegebenen Sinne zu nehmen ist, durch

$$(3.)\qquad \frac{1}{(n-1)!}\Sigma \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_{n-1}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-1}}} & n-1 \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_n}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-1}}+\alpha_{i_n}} & 0 \end{vmatrix}.$$

dargestellt wird, in welcher Summe jetzt $i_1, \dots i_{n-2}$ und i_{n-1} alle Permutationen in der Zahlenreihe $1, 2, \dots n$ mit Ausschluss des für i_n gewählten Werthes zu durchlaufen haben.

Gilt ferner unser Satz II. für eine Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so gilt, wie schon bemerkt, für eben diese auch der Satz I., es ist also:

$$(\alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_{n-1}}) = \frac{1}{(n-1)!}\Sigma \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_{n-1}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-1}}} \end{vmatrix},$$

oder durch Hinzufügung einer horizontalen und einer vertikalen Reihe:

$$(4.)\qquad s_{\alpha_{i_n}}(\alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_{n-1}}) = \frac{1}{(n-1)!}\Sigma \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_{n-1}}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-1}}} & 0 \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_n}} & \dots & s_{\alpha_{i_{n-1}}+\alpha_{i_n}} & s_{\alpha_{i_n}} \end{vmatrix},$$

wo das Summenzeichen sich auf dieselben Permutationen bezieht, wie in (3.). Die Determinanten in (3.) und (4.) unterscheiden sich nur in der letzten Columne, können also sofort addirt werden und man erhält so nach (2.):

$$(\alpha_1, \dots \alpha_n) = \frac{1}{(n-1)!}\Sigma \begin{vmatrix} s_{\alpha_{i_1}} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ s_{\alpha_{i_1}+\dots+\alpha_{i_n}} & \dots & s_{\alpha_{i_n}} \end{vmatrix},$$

worin i_n irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots n$ bedeutet und $i_1, \dots i_{n-1}$ die Permutationen der übrig bleibenden Zahlen zu durchlaufen haben, q. e. d.

Leipzig, April 1865.

Note sur une transformation géométrique.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

La lecture de la Note de M. *Hesse* „Ein Uebertragungsprincip" (t. 66. p. 15 de ce Journal) m'a suggéré les remarques suivantes:

Soient (a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2), (a_3, b_3, c_3, d_3) des constantes données, on peut supposer que les coordonnées (x, y) d'un point quelconque dans un plan soient exprimées en fonctions des paramètres variables (u, v) par les équations

$$x = \frac{a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 uv}{a_3 + b_3 u + c_3 v + d_3 uv}, \qquad y = \frac{a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 uv}{a_3 + b_3 u + c_3 v + d_3 uv}.$$

En introduisant une nouvelle indéterminée s, ces équations peuvent être écrites dans la forme:

$$\begin{aligned} sx &= a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 uv, \\ sy &= a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 uv, \\ s &= a_3 + b_3 u + c_3 v + d_3 uv. \end{aligned}$$

Pour des valeurs données des coordonnées (x, y) la quantité s est en général déterminée par une équation quadratique, et les paramètres u et v sont des fonctions linéaires données de s; il y a cependant deux cas particuliers qu'il convient de distinguer.

1°. L'équation quadratique en s peut avoir la racine $s = 0$ et débarassée de ce facteur se réduire par conséquent à une équation linéaire; ce cas particulier a lieu si la condition $(abc)(bcd) = (abd)(acd)$ est remplie, où la notation (abc) désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dans ce cas u et v sont des fonctions rationnelles de (x, y) et la transformation a la signification géométrique suivante:

En considérant deux droites quelconques L, M dans l'espace, et en menant par le point donné (x, y) la droite unique G qui rencontre ces deux droites on peut supposer que u et v soient des paramètres qui déterminent les

positions des points de rencontre sur les deux droites respectivement; c. à. d. que u soit la distance d'un point fixe sur la droite L au point de rencontre avec la droite G, et de même que v soit la distance d'un point fixe sur la droite M au point de rencontre avec la droite G.

2°. Supposons $b_1:c_1 = b_2:c_2 = b_3:c_3$ ou ce qui est au fond la même chose $b_1-c_1=0$, $b_2-c_2=0$, $b_3-c_3=0$; alors s est déterminée par une équation simple, mais u et v ne sont plus des fonctions rationnelles de s; on voit que dans ce cas $u+v$ et uv sont des fonctions rationnelles de (x, y), et que par conséquent u et v sont les racines d'une équation quadratique qui contient (x, y) linéairement. On peut supposer que u et v soient les paramètres de deux points sur une droite donnée, c. à. d. que u et v soient les distances de ces deux points respectivement à un point fixe situé sur la droite donnée; on a ainsi la transformation de M. *Hesse.*

Je n'ai pas cherché la signification géométrique des formules générales.

Cambridge, 10. octobre 1866.

Ueber die Transformation dritten Grades und die zugehörigen Modulargleichungen der *Abel*schen Functionen erster Ordnung.

(Von Herrn *Königsberger* zu Greifswald.)

Nachdem ich im 65sten Bande dieses Journals die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen algebraischer Gleichungen zwischen den oberen Integralgrenzen zweier in einander transformirbarer *Abel*schen Systeme erster Ordnung angegeben, behandelte ich in diesem Bande die rationale Transformation zweiten Grades, wobei sich mir zwei Hauptgattungen von Transformationen, für welche sich das transformirte ϑ entweder durch eine Summe von vier ϑ-Quadraten oder eine Summe von zwei ϑ-Producten darstellen liess, und einfache Ausdrücke für die Zusammensetzung der Integralmoduln des neuen Systems aus denen des ursprünglichen ergaben. Da nun die Transformationen von unpaarem Grade sich wesentlich in der Art, wie sie zu behandeln, von denen paaren Grades unterscheiden, worauf ich in der vorliegenden Arbeit bei verschiedenen Punkten besonders aufmerksam machen werde, so beabsichtige ich den einfachsten Fall derselben, die Transformation dritten Grades, an dieser Stelle durchzuführen, einzelne bei der Behandlung derselben vorkommende Untersuchungen für jeden beliebigen unpaaren Grad anzustellen und endlich die in einfacher Gestalt sich ergebenden Modulargleichungen herzuleiten, welche in homogenen linearen Gleichungen zwischen vier Producten von je zwei ϑ-Functionen bestehen, von denen die eine zu dem ursprünglichen, die andere zu dem transformirten *Abel*schen Systeme gehört.

Setzt man mit Beibehaltung der schon früher vielfach von mir gebrauchten Bezeichnungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \omega_{11} = \varrho_{11} + \sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{21}\tau_{12}, & \omega_{21} = \varrho_{21} + \sigma_{11}\tau_{21} + \sigma_{21}\tau_{22}, \\ \omega_{12} = \varrho_{12} + \sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{12}, & \omega_{22} = \varrho_{22} + \sigma_{12}\tau_{21} + \sigma_{22}\tau_{22}, \\ \omega'_{11} = \varrho'_{11} + \sigma'_{11}\tau_{11} + \sigma'_{21}\tau_{12}, & \omega'_{21} = \varrho'_{21} + \sigma'_{11}\tau_{21} + \sigma'_{21}\tau_{22}, \\ \omega'_{12} = \varrho'_{12} + \sigma'_{12}\tau_{11} + \sigma'_{22}\tau_{12}, & \omega'_{22} = \varrho'_{22} + \sigma'_{12}\tau_{21} + \sigma'_{22}\tau_{22}, \end{cases}$$

wobei die in diesen Ausdrücken vorkommenden Transformationszahlen

$$\varrho \quad \sigma \quad \varrho' \quad \sigma'$$

den Bedingungsgleichungen genügen müssen

$$(2.)\quad \begin{cases} \sum\limits_\alpha (\varrho_{1\alpha}\varrho'_{2\alpha}-\varrho_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha}-\sigma_{1\alpha}\varrho'_{2\alpha}) = 0, \\ \sum\limits_\alpha (\sigma_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha}-\sigma_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha}) = 0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha}-\sigma_{1\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 3, \\ \sum\limits_\alpha (\varrho_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha}-\sigma_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{2\alpha}\sigma'_{2\alpha}-\sigma_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha}) = 3. \end{cases}$$

oder:

$$(3.)\quad \begin{cases} \sum\limits_\alpha (\varrho_{\alpha 1}\sigma_{\alpha 2}-\varrho_{\alpha 2}\sigma_{\alpha 1}) = 0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{\alpha 2}\sigma'_{\alpha 1}-\sigma_{\alpha 2}\varrho'_{\alpha 1}) = 0, \\ \sum\limits_\alpha (\varrho'_{\alpha 1}\sigma'_{\alpha 2}-\varrho'_{\alpha 2}\sigma'_{\alpha 1}) = 0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{\alpha 1}\sigma'_{\alpha 1}-\sigma_{\alpha 1}\varrho'_{\alpha 1}) = 3, \\ \sum\limits_\alpha (\varrho_{\alpha 1}\sigma'_{\alpha 2}-\sigma_{\alpha 1}\varrho'_{\alpha 2}) = 0, & \sum\limits_\alpha (\varrho_{\alpha 2}\sigma'_{\alpha 2}-\sigma_{\alpha 2}\varrho'_{\alpha 2}) = 3. \end{cases}$$

so sind die transformirten Moduln und Argumente durch die Gleichungen bestimmt:

$$(4.)\quad v'_1 = \frac{3(\omega_{22}v_1-\omega_{12}v_2)}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}, \qquad v'_2 = \frac{3(\omega_{11}v_2-\omega_{21}v_1)}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}.$$

$$(5.)\quad \begin{cases} \tau'_{11} = \dfrac{\omega'_{11}\omega_{22}-\omega'_{21}\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{21} = \dfrac{\omega'_{12}\omega_{22}-\omega'_{22}\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}, \\ \tau'_{12} = \dfrac{\omega'_{21}\omega_{11}-\omega'_{11}\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{22} = \dfrac{\omega'_{22}\omega_{11}-\omega'_{12}\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}. \end{cases}$$

Sämmtliche Transformationen k^{ter} Ordnung *) lassen sich nun nach den von *Eisenstein* **) und *Hermite* ausgeführten Untersuchungen über die Zusammensetzung linearer Substitutionen, wenn die in den obigen Gleichungen vorkommenden Transformationszahlen in das System

$$(6.)\quad \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho'_{21} & -\varrho'_{22} & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho'_{11} & -\varrho'_{12} & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{Bmatrix}$$

gebracht werden, in eine Zahl von

$$1+k+k^2+k^3$$

nicht äquivalenten Klassen theilen, die so beschaffen sind, dass sämmtliche in einer Klasse befindlichen Systeme durch Transformationen aus einander abgeleitet werden können, deren Determinante die Einheit ist. Unter allen einander äquivalenten Transformationen einer Klasse giebt es eine und nur

---

*) Ich spreche hier von der allgemeinen Transformation k^{ter} Ordnung, weil die nachfolgende Aenderung der *Hermite*schen Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen sich auf einen beliebigen Grad, insofern dieser ein unpaarer ist, erstreckt. —

**) s. die Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1852.

eine, für welche das Product der Glieder der Diagonalreihe gleich der Substitutionsdeterminante k^2, sämmtliche Glieder zu der einen Seite der Diagonalreihe $= 0$, und die zu der anderen Seite derselben kleiner sind als diejenigen von ihnen, die auf derselben Horizontalreihe der Diagonale angehören, so dass *Hermite* zu folgenden reducirten Systemen gelangt:

$$(7.)\quad \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & 0 & i & i' \\ 0 & k & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right.,$$

in denen die Zahlen i, i', i'' die Werthe $0, 1, 2, \dots k-1$ annehmen.

Wenn auch diese die einfachsten Formen sind, die sich für die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen finden lassen, so habe ich es doch bei meinen Untersuchungen über die Transformation für den Fall, dass k eine ungerade Zahl ist, wegen der Gleichförmigkeit der algebraischen Ausdrücke sowie der Form der Modulargleichungen (worauf ich noch am Ende der vorliegenden Arbeit zurückkomme) als nothwendig erkannt, statt dieser *Hermite*schen Systeme neue Repräsentanten für die einzelnen Klassen aufzustellen, die beziehungsweise aus den früheren durch die Anwendung der vier Transformationen ersten Grades:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ai & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ai & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ ai' & 0 & -ai & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ai & ai'' & 1 & 0 \\ ai' & ai & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

hergeleitet werden, wenn a eine Lösung der Congruenz:

$$ak \equiv -1 \pmod{8}$$

ist, so dass ich als Repräsentanten der $1+k+k^2+k^3$ nicht äquivalenten Klassen jetzt folgende definire:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & i(ak+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & i(ak+1) & 0 & i'(ak+1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -i(ak+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k & 0 & i(ak+1) & i'(ak+1) \\ 0 & k & i''(ak+1) & i(ak+1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

welche, wie man sieht, mit den früheren reducirten Systemen die Eigenschaft theilen, dass das Product der Diagonalglieder $= k^2$ und die Glieder zu der einen Seite derselben $= 0$ sind, während die dritte Bedingung, dass die Glieder der andern Seite im Restensystem, dessen Modul das zugehörige Diagonalglied

ist, enthalten sein sollen, für diese Repräsentanten nicht mehr erfüllt ist. — Für die Transformation dritten Grades wähle ich also als Repräsentanten der 40 nicht äquivalenten Klassen die folgenden Systeme:

$$(8.)\quad \left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & -8i & 0 & -8i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 0 & -8i & -8i' \\ 0 & 3 & -8i'' & -8i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \right. .$$

Setzen wir nun mit *Hermite:*

$$(9.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_\lambda = e^{i\pi[-(\sigma'_{11}v_1+\sigma'_{21}v_2)(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)-(\sigma'_{12}v_1+\sigma'_{22}v_2)(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)]} \\ \qquad\qquad \times e^{i\pi[\tau'_{11}(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)^2+2\tau'_{12}(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)+\tau'_{22}(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2)^2]} \\ \qquad\qquad \times \vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_\lambda, \end{cases}$$

so gelten die für die Π-Function charakteristischen Gleichungen:

$$(10.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1+1, v_2)_\lambda = (-1)^{\mathfrak{m}}\,\Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1, v_2+1)_\lambda = (-1)^{\mathfrak{n}}\,\Pi(v_1, v_2)_\lambda, \\ \Pi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{21})_\lambda = (-1)^{\mathfrak{q}}\,\Pi(v_1, v_2)_\lambda . e^{-3i\pi(2v_1+\tau_{11})}, \\ \Pi(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22})_\lambda = (-1)^{\mathfrak{p}}\,\Pi(v_1, v_2)_\lambda . e^{-3i\pi(2v_2+\tau_{22})}, \end{cases}$$

worin die Zahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ durch die Ausdrücke bestimmt sind:

$$(11.)\quad \begin{cases} \mathfrak{m} = n_1^\lambda\sigma'_{11}+n_2^\lambda\sigma'_{12}-m_2^\lambda\sigma_{12}-m_1^\lambda\sigma_{11}-\sigma_{11}\sigma'_{11}-\sigma_{12}\sigma'_{12}, \\ \mathfrak{n} = n_1^\lambda\sigma'_{21}+n_2^\lambda\sigma'_{22}-m_2^\lambda\sigma_{22}-m_1^\lambda\sigma_{21}-\sigma_{21}\sigma'_{21}-\sigma_{22}\sigma'_{22}, \\ \mathfrak{p} = -n_1^\lambda\varrho'_{21}-n_2^\lambda\varrho'_{22}+m_2^\lambda\varrho_{22}+m_1^\lambda\varrho_{21}-\varrho_{21}\varrho'_{21}-\varrho_{22}\varrho'_{22}, \\ \mathfrak{q} = -n_1^\lambda\varrho'_{11}-n_2^\lambda\varrho'_{12}+m_2^\lambda\varrho_{12}+m_1^\lambda\varrho_{11}-\varrho_{11}\varrho'_{11}-\varrho_{12}\varrho'_{12}. \end{cases}$$

Bringt man nun die Function Π auf die Form:

$$(12.)\quad \begin{cases} \qquad\qquad \Pi(v_1, v_2)_\lambda \\ = \sum_{m,n}(-1)^{\mathfrak{p}n+\mathfrak{q}m}A_{m,n}\,e^{i\pi[(2m+\mathfrak{m})v_1+(2n+\mathfrak{n})v_2]+\frac{i\pi}{12}[(2m+\mathfrak{m})^2\tau_{11}+2(2m+\mathfrak{m})(2n+\mathfrak{n})\tau_{12}+(2n+\mathfrak{n})^2\tau_{22}]}, \end{cases}$$

so sind nach *Hermite* die ersten beiden Bedingungsgleichungen von selbst erfüllt, während die beiden anderen folgende Beziehungen zwischen den Coefficienten ergeben:

$$(13.)\quad \begin{cases} A_{m+3,n} = A_{m,n}, \qquad A_{m,n+3} = A_{m,n}, \\ \qquad A_{m+3,n+3} = A_{m,n}, \\ \text{oder} \\ \qquad A_{3\mu+\alpha,3\nu+\beta} = A_{\alpha,\beta}, \end{cases}$$

so dass von den Coefficienten der für Π angenommenen Reihenentwickelung (12.), so lange wenigstens nur die Bedingungen (7.) berücksichtigt werden, 9 unbestimmt bleiben, nämlich:

$$A_{00} \quad A_{01} \quad A_{02} \quad A_{10} \quad A_{11} \quad A_{12} \quad A_{20} \quad A_{21} \quad A_{22}.$$

Endlich liefert noch die Bedingung:

$$(14.) \qquad \Pi(-v_1, -v_2)_\lambda = (-1)^{\mathfrak{p}\mathfrak{n}+\mathfrak{q}\mathfrak{m}} \Pi(v_1, v_2)_\lambda$$

die Relation:

$$(15.) \qquad A_{-m-\mathfrak{m},\, -n-\mathfrak{n}} = A_{m,n},$$

so dass von den 9 Coefficienten nur fünf von einander unabhängig sind und sich also die Function Π in die Form setzen lässt:

$$(16.) \qquad \Pi(v_1, v_2)_\lambda = A_1 R_1 + A_2 R_2 + A_3 R_3 + A_4 R_4 + A_5 R_5,$$

worin $A_1, A_2, \ldots A_5$ noch unbestimmte Constanten, die von den anderweitigen Eigenschaften der Function Π abhängen, und $R_1, R_2, \ldots R_5$ unendliche Reihen bedeuten, die aus den Gliedern der für die Π-Function angenommenen Reihe (12.) bestehen.

Es kommt nun nach der von *Hermite* vorgezeichneten Methode darauf an, diese unendlichen Reihen mittelst des Prinzipes zu bestimmen, dass jede synektische Function von v_1, v_2, welche den Bedingungen (10.) und (14.) genügt, sich bis auf die Coefficienten A in der Form (16.) muss darstellen lassen.

Bildet man das folgende Product:

$$(17.) \qquad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^r \mu_2^r \nu_1^r \nu_2^r} \cdot \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^s \mu_2^s \nu_1^s \nu_2^s} \cdot \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^t \mu_2^t \nu_1^t \nu_2^t},$$

in welchem die Indices der Bedingung unterworfen werden:

$$(18.) \qquad \begin{cases} \mu_1^r + \mu_1^s + \mu_1^t \equiv \mathfrak{q}, & \nu_1^r + \nu_1^s + \nu_1^t \equiv \mathfrak{m}, \\ \mu_2^r + \mu_2^s + \mu_2^t \equiv \mathfrak{p}, & \nu_2^r + \nu_2^s + \nu_2^t \equiv \mathfrak{n}, \end{cases} \quad (\text{mod. } 2)$$

so erkennt man unmittelbar, dass dieses Product den Bedingungsgleichungen (10.) Genüge leistet, und fügt man noch die beschränkende Congruenz hinzu:

$$(19.) \qquad \mu_1^r \nu_1^r + \mu_2^r \nu_2^r + \mu_1^s \nu_1^s + \mu_2^s \nu_2^s + \mu_1^t \nu_1^t + \mu_2^t \nu_2^t \equiv \mathfrak{p}\mathfrak{n} + \mathfrak{q}\mathfrak{m} \quad (\text{mod. } 2),$$

so wird das ϑ-Product (17.) den fünf für die Π-Function geltenden Bedingungsgleichungen (10.) und (14.) genügen und sich also auf die Form:

$$(20.) \qquad \vartheta(v_1, v_2)_r \, \vartheta(v_1, v_2)_s \, \vartheta(v_1, v_2)_t = A'_1 R_1 + A'_2 R_2 + A'_3 R_3 + A'_4 R_4 + A'_5 R_5$$

bringen lassen.

Da sich nun die Indices

$$\mu_\alpha^r \quad \nu_\alpha^r \quad \mu_\alpha^s \quad \nu_\alpha^s \quad \mu_\alpha^t \quad \nu_\alpha^t$$

auf mannigfache Art so bestimmen lassen, dass den Bedingungscongruenzen (18.) und (19.) genügt wird, so wollen wir fünf ϑ-Producte auswählen, in welche eine möglichst geringe Zahl von ϑ-Functionen eintritt, ohne dass eine lineare Abhängigkeit unter ihnen besteht, um dann aus fünf der Gleichung (20.) analogen und in $R_1, R_2, \dots R_5$ linearen Gleichungen diese Reihen bestimmen zu können.

Für die Annahme:

$$(21.)\quad \begin{cases} \mu_1^r \equiv \mu_1^s \equiv \mu_1^t \equiv \mathfrak{q}, & \nu_1^r \equiv \nu_1^s \equiv \nu_1^t \equiv \mathfrak{m}, \\ \mu_2^r \equiv \mu_2^s \equiv \mu_2^t \equiv \mathfrak{p}, & \nu_2^r \equiv \nu_2^s \equiv \nu_2^t \equiv \mathfrak{n}, \end{cases} \quad (\text{mod. } 2),$$

erhalte ich als erstes ϑ-Product, welches den oben aufgestellten Congruenzen Genüge leistet:

$$(22.)\quad \vartheta(v_1, v_2)^3_{\mathfrak{qpmn}}.$$

Wähle ich sodann die Indices r und s beliebig, nur der einen Bedingung unterworfen, dass:

$$(23.)\quad \begin{cases} \mu_1^r\nu_1^r + \mu_2^r\nu_2^r + \mu_1^s\nu_1^s + \mu_2^s\nu_2^s + (\mathfrak{q}-\mu_1^r-\mu_1^s)(\mathfrak{m}-\nu_1^r-\nu_1^s) + (\mathfrak{p}-\mu_2^r-\mu_2^s)(\mathfrak{n}-\nu_2^r-\nu_2^s) \\ \qquad \equiv \mathfrak{pn}+\mathfrak{qm}, \quad (\text{mod. } 2) \end{cases}$$

oder

$$(24.)\quad \begin{cases} \mu_1^s\nu_1^r + \mu_1^r\nu_1^s + \mu_2^s\nu_2^r + \mu_2^r\nu_2^s \\ + \mathfrak{q}(\nu_1^r+\nu_1^s) + \mathfrak{p}(\nu_2^r+\nu_2^s) + \mathfrak{m}(\mu_1^r+\mu_1^s) + \mathfrak{n}(\mu_2^r+\mu_2^s) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2) \end{cases}$$

und bestimme dann:

$$(25.)\quad \begin{cases} \mu_1^t \equiv \mathfrak{q} - \mu_1^r - \mu_1^s, & \nu_1^t \equiv \mathfrak{m} - \nu_1^r - \nu_1^s, \\ \mu_2^t \equiv \mathfrak{p} - \mu_2^r - \mu_2^s, & \nu_2^t \equiv \mathfrak{n} - \nu_2^r - \nu_2^s, \end{cases} \quad (\text{mod. } 2),$$

so genügt das Product:

$$(26.)\quad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^r\mu_2^r\nu_1^r\nu_2^r} \cdot \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^s\mu_2^s\nu_1^s\nu_2^s} \cdot \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^t\mu_2^t\nu_1^t\nu_2^t}$$

ebenfalls den Bedingungscongruenzen (18.) und (19.).

Da endlich die Function:

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}}$$

wenn man von der bei der Vermehrung der Argumente um ganze Perioden hinzutretenden Exponentialgrösse absieht, ebenfalls die Relationen (10.) und (14.) befriedigt, so werden auch die drei ϑ-Producte:

$$(27.)\quad \begin{cases} \vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}} \cdot \vartheta(v_1, v_2)^2_{\mu_1^r\mu_2^r\nu_1^r\nu_2^r}, \\ \vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}} \cdot \vartheta(v_1, v_2)^2_{\mu_1^s\mu_2^s\nu_1^s\nu_2^s}, \\ \vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}} \cdot \vartheta(v_1, v_2)^2_{\mu_1^t\mu_2^t\nu_1^t\nu_2^t} \end{cases}$$

den vorgeschriebenen Bedingungen Genüge leisten.

Wir haben somit fünf Producte von je drei ϑ-Functionen gefunden, in denen nur die vier von einander verschiedenen ϑ:

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}}, \quad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^r \mu_2^r \nu_1^r \nu_2^r}, \quad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^s \mu_2^s \nu_1^s \nu_2^s}, \quad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^t \mu_2^t \nu_1^t \nu_2^t}$$

vorkommen und die sämmtlich den durch die Gleichungen (10.) und (14.) ausgedrückten Bedingungen Genüge leisten, sich also auch in eine der Gleichung (20.) analoge Form setzen lassen.

Es bleibt nun noch zu beweisen übrig, dass die fünf ϑ-Producte (22.), (26.), (27.) nicht in einer linearen Beziehung zu einander stehen, wobei zu berücksichtigen, dass die ϑ-Function mit dem Index $\mathfrak{qpmn}$ durch die Gleichungen (10.) bestimmt ist, von den beiden anderen mit dem Index r und s nur eine beliebig angenommen werden darf, wodurch aber dann der Index der vierten ϑ-Function gegeben ist. Setzt man nämlich die für die Indices aufgestellten Bedingungscongruenzen (18.) und (19.) in die Form:

$$(28.) \quad \begin{cases} \mu_1^r + \mu_1^s + \mu_1^t + \mathfrak{q} \equiv 0, \quad \mu_2^r + \mu_2^s + \mu_2^t + \mathfrak{p} \equiv 0, \\ \nu_1^r + \nu_1^s + \nu_1^t + \mathfrak{m} \equiv 0, \quad \nu_2^r + \nu_2^s + \nu_2^t + \mathfrak{n} \equiv 0, \\ \mu_1^r \nu_1^r + \mu_2^r \nu_2^r + \mu_1^s \nu_1^s + \mu_2^s \nu_2^s + \mu_1^t \nu_1^t + \mu_2^t \nu_2^t + \mathfrak{qm} + \mathfrak{pn} \equiv 0, \end{cases} \pmod{2}$$

so sind dies bekanntlich die Bedingungen, denen die Indices von vier ϑ-Functionen genügen, zwischen denen eine homogene algebraische Gleichung vierten Grades besteht. Es ergiebt sich somit unmittelbar, dass, wenn die Bestimmung der fünf ϑ-Producte, so wie wir sie oben getroffen, auf die einfachste Art aus vier ϑ-Functionen hergestellt wird, dies solche Functionen sein müssen, zwischen denen eine homogene algebraische Gleichung vierten Grades besteht. Nun könnte zweierlei eintreten. Entweder bestehen die oben angenommene homogene Gleichung dritten Grades und die hier besprochene Gleichung vierten Grades zugleich, oder die biquadratische Gleichung reducirt sich auf eine vom dritten Grade, die mit jener identisch ist. Dass die erste Annahme unstatthaft ist, folgt einfach daraus, dass zwei von einander unabhängige homogene algebraische Gleichungen zwischen denselben vier ϑ-Functionen eine Relation zwischen zwei *Abel*schen Functionen des Systems liefern würden, was nicht angeht. Aber ebenso unmöglich ist die Reduction der Gleichung vierten Grades auf eine von niedrigerem Grade *). Denn, wenn wir die vier ϑ-Functionen, zwischen denen eine biquadratische Gleichung be-

*) Ich wähle diese Beweisart, statt unmittelbar die folgende Substitution auf die angenommene kubische Gleichung anzuwenden, um nachzuweisen, dass keine der biquadratischen Relationen im Grade erniedrigt werden kann.

steht, der Kürze halber mit

$$\vartheta_\alpha \quad \vartheta_\beta \quad \vartheta_\gamma \quad \vartheta_\delta$$

bezeichnen, so hat die Gleichung die Form:

$$\begin{gathered} A\vartheta_\alpha^4+B\vartheta_\beta^4+C\vartheta_\gamma^4+D\vartheta_\delta^4+E\vartheta_\alpha^2\vartheta_\beta^2+F\vartheta_\alpha^2\vartheta_\gamma^2+G\vartheta_\alpha^2\vartheta_\delta^2 \\ +H\vartheta_\beta^2\vartheta_\gamma^2+K\vartheta_\beta^2\vartheta_\delta^2+L\vartheta_\gamma^2\vartheta_\delta^2+M\vartheta_\alpha\vartheta_\beta\vartheta_\gamma\vartheta_\delta = 0 \end{gathered}$$

und bei der als möglich angenommenen Reduction auf eine kubische Gleichung würde diese z. B. in:

$$A\vartheta_\alpha^3+E\vartheta_\alpha\vartheta_\beta^2+F\vartheta_\alpha\vartheta_\gamma^2+G\vartheta_\alpha\vartheta_\delta^2+M\vartheta_\beta\vartheta_\gamma\vartheta_\delta = 0$$

übergehen. Wendet man nun hierauf die Substitution $\alpha\beta$ an, so erhält man, wie unmittelbar zu sehen, die Gleichung:

$$A'.\vartheta_\beta^3+E'.\vartheta_\beta\vartheta_\alpha^2+F'.\vartheta_\beta\vartheta_\delta^2+G'.\vartheta_\beta\vartheta_\gamma^2+M'.\vartheta_\alpha\vartheta_\delta\vartheta_\gamma = 0,$$

welche, von der vorhergehenden verschieden, mit dieser verbunden wieder eine Relation zwischen zwei *Abel*schen Functionen ergeben würde. Es ist somit gezeigt, dass zwischen den vier ϑ-Functionen, welche den Congruenzen (28.) genügen, keine algebraische Gleichung dritten Grades bestehen kann, und dass also die oben aufgestellten in den Reihen R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 linearen Gleichungen, welche zur Bestimmung dieser Grössen dienen sollten, als von einander unabhängig für die Function $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ die Form liefern werden:

$$(29.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_\lambda = (1)\vartheta(v_1, v_2)^3_{\mathfrak{qpmn}}+(2)\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}}\vartheta(v_1, v_2)^2_{\mu_1^r\mu_2^r\nu_1^r\nu_2^r} \\ \qquad +(3)\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}}\vartheta(v_1, v_2)^2_{\mu_1^s\mu_2^s\nu_1^s\nu_2^s}+(4)\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}}\vartheta(v_1, v_2)^2_{\mu_1^t\mu_2^t\nu_1^t\nu_2^t} \\ \qquad +(5)\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^r\mu_2^r\nu_1^r\nu_2^r}\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^s\mu_2^s\nu_1^s\nu_2^s}\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^t\mu_2^t\nu_1^t\nu_2^t}, \end{cases}$$

worin die Zahlen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ durch die Gleichungen (10.) bestimmt, μ_1^r, μ_2^r, ν_1^r, ν_2^r, μ_1^s, μ_2^s, ν_1^s, ν_2^s bis auf die Congruenzen (23.) oder (24.) beliebig, und μ_1^t, μ_2^t, ν_1^t, ν_2^t durch die Congruenzen (25.) gegeben sind.

Ich füge die Bemerkung hinzu, dass, wenn $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, welche durch die Gleichungen (11.) bestimmt werden, sämmtlich gerade Zahlen sind, die Function

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{qpmn}}$$

in das Fundamentaltheta übergeht, während die Indices der anderen durch die Congruenzen bestimmt sind

$$(30.)\quad \begin{cases} \mu_1^r\nu_1^s+\mu_1^s\nu_1^r+\mu_2^r\nu_2^s+\mu_2^s\nu_2^r \equiv 0, \\ \mu_1^t \equiv \mu_1^r+\mu_1^s, \qquad \nu_1^t \equiv \nu_1^r+\nu_1^s, \qquad (\text{mod. } 2). \\ \mu_2^t \equiv \mu_2^r+\mu_2^s, \qquad \nu_2^t \equiv \nu_2^r+\nu_2^s, \end{cases}$$

Für sämmtliche Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen, wie ich sie oben aufgestellt, liefert das Fundamentaltheta des transformirten Systems gerade Transformationszahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, so dass für alle diese die Congruenzen (30.) die zugehörige Darstellung liefern werden.

Unsere nächste Aufgabe ist die Bestimmung der Constanten (1), (2), (3), (4), (5).

Bevor ich jedoch zur Lösung derselben übergehe, sind einige Bemerkungen vorauszuschicken, die für alle Transformationen von unpaarem Grade gültig bleiben.

Da die oben (4.) für die transformirten Argumente v_1', v_2' gegebenen Ausdrücke auch auf die folgende Gestalt gebracht werden können:

$$(31.)\quad \begin{cases} v_1' = \sigma_{11}'v_1+\sigma_{21}'v_2-\tau_{11}'(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)-\tau_{12}'(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2), \\ v_2' = \sigma_{12}'v_1+\sigma_{22}'v_2-\tau_{21}'(\sigma_{11}v_1+\sigma_{21}v_2)-\tau_{22}'(\sigma_{12}v_1+\sigma_{22}v_2), \end{cases}$$

so folgt leicht mit Benutzung der für die transformirten ϑ-Moduln aufgestellten Formeln (5.), dass den auf die ursprünglichen Argumente v_1, v_2 gemachten Substitutionen von halben Perioden für die neuen Argumente ebenfalls Substitutionen in halben Perioden des transformirten Systems entsprechen. Für $v_1:\frac{1}{2}$, $v_2:0$ und $v_1:0$, $v_2:\frac{1}{2}$ liefern die Ausdrücke (31.) unmittelbar resp.:

$$v_1':\tfrac{1}{2}\sigma_{11}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{11}\tau_{11}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{12}\tau_{12}', \qquad v_2':\tfrac{1}{2}\sigma_{12}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{11}\tau_{21}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{12}\tau_{22}',$$
$$v_1':\tfrac{1}{2}\sigma_{21}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{21}\tau_{11}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{22}\tau_{12}', \qquad v_2':\tfrac{1}{2}\sigma_{22}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{21}\tau_{21}'-\tfrac{1}{2}\sigma_{22}\tau_{22}',$$

während man für die Substitutionen:

$$v_1:\tfrac{1}{2}\tau_{11}\quad v_2:\tfrac{1}{2}\tau_{21}\quad \text{und}\quad v_1:\tfrac{1}{2}\tau_{12}\quad v_2:\tfrac{1}{2}\tau_{22},$$

wenn man die von *Brioschi* *) gemachte Bemerkung benutzt, dass das Product der Nenner in den Ausdrücken für die transformirten ϑ-Moduln durch die ursprünglichen und umgekehrt $=k^2$ ist, folgende Veränderungen der transformirten Argumente erhält:

$$v_1':-\tfrac{1}{2}\varrho_{11}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{11}\tau_{11}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{12}\tau_{12}', \quad v_2':-\tfrac{1}{2}\varrho_{12}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{11}\tau_{21}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{12}\tau_{22}',$$
$$v_1':-\tfrac{1}{2}\varrho_{21}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{21}\tau_{11}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{22}\tau_{12}', \quad v_2':-\tfrac{1}{2}\varrho_{22}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{21}\tau_{21}'+\tfrac{1}{2}\varrho_{22}\tau_{22}'.$$

Ich will nun untersuchen, welche Veränderung durch eine Substitution von der Form:

$$v_1:\tfrac{1}{2}m_1+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{11}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{12}, \qquad v_2:\tfrac{1}{2}m_2+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{21}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{22}$$

auf der rechten Seite der Gleichung (29.) die Π-Function auf der linken Seite

*) *Brioschi,* sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes, comptes rendus 1858.

derselben erfährt. Aus den für die Π-Function bei beliebigem ungeradem Transformationsgrade k geltenden Bedingungsgleichungen folgt leicht die Relation:

$$(32.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1+m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12},\ v_2+m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22})_\lambda \\ = (-1)^{mm_1+nm_2+qn_1+pn_2} e^{-k\pi i[2n_1v_1+2n_2v_2+n_1^2\tau_{11}+2n_1n_2\tau_{12}+n_2^2\tau_{22}]}.\ \Pi(v_1,\ v_2)_\lambda. \end{cases}$$

Da sich nun nach dem vorher Bemerkten die transformirten Argumente bei der Substitution der für v_1, v_2 angenommenen Ausdrücke nur um halbe Perioden ändern, so ergiebt sich offenbar, wenn der Exponent der in dem Ausdrucke für $\Pi(v_1, v_2)_\lambda$ enthaltenen Exponentialgrösse mit $f(v_1, v_2)$ bezeichnet wird:

$$(33.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1+\tfrac{1}{2}m_1+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{11}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{12},\ v_2+\tfrac{1}{2}m_2+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{21}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{22})_\lambda \\ = e^{f(v_1,v_2)}\vartheta(v'_1+\tfrac{1}{2}\mu_1+\tfrac{1}{2}\nu_1\tau'_{11}+\tfrac{1}{2}\nu_2\tau'_{12},\ v'_2+\tfrac{1}{2}\mu_2+\tfrac{1}{2}\nu_1\tau'_{21}+\tfrac{1}{2}\nu_2\tau'_{22})_\lambda e^{\pi i(Av_1+Bv_2+C)}, \end{cases}$$

worin A, B, C noch zu bestimmende Constanten und die Zahlen μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 durch die Gleichungen gegeben sind:

$$(34.)\quad \begin{cases} \mu_1 = m_1\sigma'_{11}+m_2\sigma'_{21}-n_1\varrho'_{11}-n_2\varrho'_{21}, & \nu_1 = -m_1\sigma_{11}-m_2\sigma_{21}+n_1\varrho_{11}+n_2\varrho_{21}, \\ \mu_2 = m_1\sigma'_{12}+m_2\sigma'_{22}-n_1\varrho'_{12}-n_2\varrho'_{22}, & \nu_2 = -m_1\sigma_{12}-m_2\sigma_{22}+n_1\varrho_{12}+n_2\varrho_{22}. \end{cases}$$

Substituirt man in (33.) für v_1, v_2:

$$v_1+\tfrac{1}{2}m_1+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{11}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{12}, \qquad v_2+\tfrac{1}{2}m_2+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{21}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{22},$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} &\Pi(v_1+m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12},\ v_2+m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22})_\lambda \\ &= e^{f(v_1,v_2)}\vartheta(v'_1+\mu_1+\nu_1\tau'_{11}+\nu_2\tau'_{12},\ v'_2+\mu_2+\nu_1\tau'_{21}+\nu_2\tau'_{22})_\lambda \times \\ &\times e^{i\pi[A(2v_1+\frac{1}{2}m_1+\frac{1}{2}n_1\tau_{11}+\frac{1}{2}n_2\tau_{12})+B(2v_2+\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{2}n_1\tau_{21}+\frac{1}{2}n_2\tau_{22})+2C]}, \end{aligned}$$

woraus sich durch Vergleichung mit (32.) die Constanten A, B, C bestimmen lassen.

Setzt man nämlich:

$$(35.)\quad \begin{cases} \mu_1 = 2\mu'_1+\mu''_1, & \nu_1 = 2\nu'_1+\nu''_1, \\ \mu_2 = 2\mu'_2+\mu''_2, & \nu_2 = 2\nu'_2+\nu''_2, \end{cases}$$

so ergiebt sich leicht, wenn man die bei der Vermehrung der Argumente v_1, v_2 um die oben angegebene Grösse zur k^{ten} Potenz der ursprünglichen ϑ-Function hinzukommende Exponentialgrösse kurz mit E bezeichnet, für die veränderte Π-Function der Ausdruck:

$$(36.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1+\tfrac{1}{2}m_1+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{11}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{12},\ v_2+\tfrac{1}{2}m_2+\tfrac{1}{2}n_1\tau_{21}+\tfrac{1}{2}n_2\tau_{22})_\lambda \\ \qquad = E.e^{c\pi i}.e^{f(v_1,v_2)}\vartheta(v'_1,\ v'_2,\ \tau'_{11},\ \tau'_{12},\ \tau'_{22})_\nu, \end{cases}$$

worin die Indices der ϑ-Function durch die Congruenzen definirt sind:

$$(37.)\quad \begin{cases} m_1^\nu \equiv m_1^\lambda + \mu_1'', & n^\nu \equiv n_1^\lambda + \nu_1'', \\ m_2^\nu \equiv m_2^\lambda + \mu_2'', & n_2^\nu \equiv n_2^\lambda + \nu_2'', \end{cases} \quad (\text{mod. } 2)$$

und die Grösse c durch folgenden Ausdruck bestimmt wird:

$$(38.)\quad \begin{cases} c = -\frac{1}{2}(\mu_1 n_1^\lambda + \mu_2 n_2^\lambda + \nu_1 m_1^\lambda + \nu_2 m_2^\lambda) + \frac{1}{4}k(m_1 n_1 + m_2 n_2) \\ \quad + \frac{1}{2}(\mathfrak{m} m_1 + \mathfrak{n} m_2 + \mathfrak{q} n_1 + \mathfrak{p} n_2) + \frac{1}{2} n_1^\nu (m_1^\lambda + \mu_1'' - m_1^\nu) + \frac{1}{2} n_2^\nu (m_2^\lambda + \mu_2'' - m_2^\nu) \\ \quad - \frac{1}{2}\nu_1''(m_1^\lambda + \mu_1'') - \frac{1}{2}\nu_2''(m_2^\lambda + \mu_2'') - \frac{1}{4}(\mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2) \\ \quad + \mu_1' n_1^\lambda + \mu_2' n_2^\lambda + \nu_1' m_1^\nu + \nu_2' m_2^\nu. \end{cases}$$

Da bekanntlich die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho_{21}' & -\varrho_{22}' & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho_{11}' & -\varrho_{12}' & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{vmatrix} = k^2$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (34.):

$$m_\alpha = \frac{A_\alpha \mu_1 + B_\alpha \mu_2 + C_\alpha \nu_1 + D_\alpha \nu_2}{k^2},$$

$$n_\alpha = \frac{A_\alpha' \mu_1 + B_\alpha' \mu_2 + C_\alpha' \nu_1 + D_\alpha' \nu_2}{k^2},$$

woraus zu ersehen, dass, wenn k ungerade ist, für verschiedene Werthe von m_α, n_α nicht nach dem Modul 2 congruente Werthe von μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 folgen können, dass somit verschiedenen Substitutionen auch verschiedene Indices der transformirten ϑ-Function entsprechen. Ich will es nicht unterlassen, hier den wesentlichen Unterschied, der zwischen der geradzahligen und ungeradzahligen Transformation besteht, hervorzuheben. Während wir nämlich bei jener fanden, dass nur vier Substitutionen existiren, welche die linke Seite der Transformationsgleichung veränderten, während vier andere sie unverändert liessen *), ergiebt sich für die Transformation von unpaarem Grade, dass man aus dem Ausdrucke eines transformirten ϑ alle anderen durch Substitution von halben Perioden für die ursprünglichen Argumente ableiten kann, so dass also die Coefficienten (1), (2), (3), (4), (5) in der Transformationsgleichung (29.) nur für *ein* solches ϑ zu berechnen sind.

---

*) worauf wesentlich die von mir angegebene Methode zur Bestimmung der Constanten in der Transformationsgleichung zweiten Grades beruhte.

Der Satz von *Hermite*, dass es vier transformirte Π-Functionen giebt, welche durch dieselben vier ϑ des ursprünglichen Systems ausdrückbar sind, folgt aus der einfachen Ueberlegung, dass, wenn diese vier Functionen mit

$$\vartheta_\alpha \quad \vartheta_\beta \quad \vartheta_\gamma \quad \vartheta_{\alpha\beta\gamma}$$

bezeichnet werden (soll nämlich eine homogene algebraische Relation vierten Grades zwischen ihnen stattfinden, so geht der eine Index aus der Zusammensetzung aller anderen hervor), die folgenden durch die Indices

$$\alpha\beta \quad \alpha\gamma \quad \beta\gamma$$

charakterisirten Substitutionen wieder nur ϑ-Functionen mit den Indices α, β, γ, $\alpha\beta\gamma$ liefern, und ebenso ergiebt sich die von *Brioschi* in dem oben erwähnten Briefe an *Hermite* gemachte Bemerkung, dass für diese vier transformirten Π-Functionen die Werthe der Coefficienten dieselben bleiben, während sie selbst nur ihre Stelle ändern.

Nach diesen Auseinandersetzungen kehre ich nun zur Bestimmung der in der Gleichung (29.) noch unbekannt gebliebenen Coefficienten zurück.

Sucht man Substitutionen für v_1, v_2 welche die rechte Seite der Transformationsgleichung ändern, während sie die linke unverändert lassen, so findet man hier nicht wie bei der Transformation zweiten Grades Substitutionen in halben Perioden, welche nur eine Veränderung der Indices der ϑ-Functionen hervorbringen, sondern erhält folgende aus den durch die Zahl 3 getheilten Perioden zusammengesetzte Ausdrücke:

$$(39.)\quad \begin{cases} \qquad\qquad v_1 & \qquad\qquad v_2 \\ \frac{1}{3}\omega_{11} = \frac{1}{3}(\varrho_{11}+\sigma_{11}\tau_{11}+\sigma_{21}\tau_{12}) & \frac{1}{3}\omega_{21} = \frac{1}{3}(\varrho_{21}+\sigma_{11}\tau_{21}+\sigma_{21}\tau_{22}) \\ \frac{1}{3}\omega_{12} = \frac{1}{3}(\varrho_{12}+\sigma_{12}\tau_{11}+\sigma_{22}\tau_{12}) & \frac{1}{3}\omega_{22} = \frac{1}{3}(\varrho_{22}+\sigma_{12}\tau_{21}+\sigma_{22}\tau_{22}) \\ \frac{1}{3}\omega'_{11} = \frac{1}{3}(\varrho'_{11}+\sigma'_{11}\tau_{11}+\sigma'_{21}\tau_{12}) & \frac{1}{3}\omega'_{21} = \frac{1}{3}(\varrho'_{21}+\sigma'_{11}\tau_{21}+\sigma'_{21}\tau_{22}) \\ \frac{1}{3}\omega'_{12} = \frac{1}{3}(\varrho'_{12}+\sigma'_{12}\tau_{11}+\sigma'_{22}\tau_{12}) & \frac{1}{3}\omega'_{22} = \frac{1}{3}(\varrho'_{22}+\sigma'_{12}\tau_{21}+\sigma'_{22}\tau_{22}) \end{cases}$$

welche, wie unmittelbar aus den zwischen den transformirten und ursprünglichen Argumenten bestehenden Relationen (4.) zu erkennen ist, die Argumente der transformirten ϑ nur um ganze Perioden verändern. Was nun die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen betrifft, so geben offenbar, da in der Diagonalreihe zwei der Transformationszahlen der Einheit gleich sind, die Substitutionen (39.) zwei von einander verschiedene Ausdrücke, welche den angegebenen Bedingungen genügen, und wenn man deren Summe und Differenz als neue auf die Transformationsgleichung anzuwendende Substitutionen bestimmt, so erhält man, indem man die Argumente verschwinden lässt, fünf

von einander unabhängige zur Bestimmung der Coefficienten ausreichende lineare Gleichungen. Dass dasselbe auch für die übrigen Transformationen einer jeden Klasse gilt, folgt aus der Bemerkung, dass das durch eine lineare Transformation aus dem Repräsentanten der Klasse abgeleitete ϑ gleich einem mit einer Exponentialgrösse multiplicirten ϑ des ursprünglichen Systems ist. Es ist wohl kaum nöthig hinzuzufügen, dass wenn man den Transformationsausdruck für ein ungerades ϑ finden will, die eben angegebene Methode die Verhältnisse der zu bestimmenden Coefficienten liefert, während wenn das transformirte ϑ ein gerades ist, dasselbe für die Nullwerthe der Argumente als Factor in den für die Coefficienten sich ergebenden Ausdrücken auftritt. Zur Durchführung der Transformation braucht man jedoch nur eine dieser Relationen herzuleiten, da, wie wir oben gezeigt haben, nach der Bestimmung eines transformirten ϑ alle anderen durch Substitution halber Perioden für die ursprünglichen Argumente erhalten werden, ohne dass die Constanten eine Aenderung erleiden *).

Es sind somit die algebraischen Ausdrücke für die transformirten ϑ-Functionen als homogene Functionen dritten Grades der ursprünglichen ϑ gefunden und die Coefficienten derselben rational aus den ϑ-Functionen mit den ursprünglichen Moduln und Argumenten von der Form:

$$\frac{m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12}}{3}, \quad \frac{m_2 + n_1\tau_{21} + n_2\tau_{22}}{3}$$

zusammengesetzt. Durch Substitution von halben Perioden und Division der so entstehenden Gleichungen erhalten wir die algebraischen Transformationsformeln für die *Abel*schen Functionen. Was endlich die Berechnung der in den Coefficienten der Transformationsgleichung vorkommenden Grössen:

---

*) Ich bemerke, dass die von *Brioschi* in dem oben erwähnten Briefe an *Hermite* gegebene Constantenbestimmung unvollständig ist; sie ist auf alle die Fälle nicht anwendbar, in denen alle Glieder einer Verticalreihe der Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\varrho'_{21} & -\varrho'_{22} & \varrho_{22} & \varrho_{21} \\ -\varrho'_{11} & -\varrho'_{12} & \varrho_{12} & \varrho_{11} \end{vmatrix}$$

$\equiv 0 \pmod{k}$ sind, was unter den 40 Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen nur bei einer nicht der Fall ist. Es muss ausser den dort in Betracht gezogenen Veränderungen der Argumente der transformirten Functionen um ganze Vielfache der neuen Moduln, auch die Vermehrung derselben um ganze Zahlen, wie es oben von mir geschehen ist, zu Hülfe genommen werden.

$$(a.)\qquad \frac{\vartheta\left(\frac{m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12}}{k},\ \frac{m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22}}{k}\right)_a}{\vartheta\left(\frac{m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12}}{k},\ \frac{m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22}}{k}\right)_b}$$

angeht, so weiss man*), dass sie von der Auflösung einer Gleichung vom Grade

$$1+k+k^2+k^3$$

abhängen, von der man, um die Grössen $(a.)$ zu finden, nur eine Lösung zu kennen nöthig hat. —

Nachdem ich zur Bestimmung der Coefficienten der Transformationsgleichung die Methode auseinandergesetzt, die ich früher bei der Transformation zweiten Grades angewandt, füge ich eine zweite hinzu, der ich vor der ersten den Vorzug gebe, weil sie uns unmittelbar zur Aufstellung der Modulargleichungen der Transformation dritten Grades führen und für die Coefficienten mit Hülfe der für die Nullwerthe der Argumente genommenen ursprünglichen und transformirten ϑ-Functionen ziemlich einfache Ausdrücke liefern wird.

Da es nach den früher angestellten Betrachtungen gleichgültig ist, für welches transformirte ϑ man den aus den ϑ-Functionen des gegebenen Systems algebraisch homogen zusammengesetzten Ausdruck herstellt, da man ohne Aenderung der Coefficienten durch Substitution von halben Perioden jedes andere ϑ desselben Transformationssystems daraus herleiten kann, so will ich die Transformationsgleichung für ein ϑ suchen, dessen Indices die Transformationszahlen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ sämmtlich geradzahlig machen. Dass es in jedem Transformationssystem ein solches giebt, ist an sich klar, da für die oben aufgestellten Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen das Fundamentaltheta diese Eigenschaft besitzt, während es für die anderen Systeme daraus folgt, dass deren ϑ gleich der mit einer Exponentialgrösse multiplicirten ϑ-Function des zugehörigen Repräsentanten ist. Sind nun $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ sämmtlich geradzahlig, so wird die in der Transformationsgleichung (29.) zuerst vorkommende Function

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}\mathfrak{m}\mathfrak{n}}$$

das Fundamentaltheta des gegebenen Systems; für die beiden anderen ϑ-Functionen:

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^r \mu_2^r \nu_1^r \nu_2^r} \quad \text{und} \quad \vartheta(v_1, v_2)_{\mu_1^s \mu_2^s \nu_1^s \nu_2^s}$$

wähle ich zwei ungerade, deren Indices jedoch der Bedingungscongruenz:

$$\mu_1^r \nu_1^s + \mu_1^s \nu_1^r + \mu_2^r \nu_2^s + \mu_2^s \nu_2^r \equiv 0 \pmod{2}$$

---

*) *Hermite*, sur la division des fonctions abéliennes.

genügen, also z. B. die Functionen

$$\vartheta(v_1, v_2)_1 \quad \text{und} \quad \vartheta(v_1, v_2)_{12},$$

so dass die Congruenzen (30.) als Index der vierten ϑ-Function 34 ergeben und die Transformationsgleichung somit die Gestalt erhält:

$$(40.)\quad \begin{cases} \Pi(v_1, v_2)_\lambda = (1)\vartheta(v_1, v_2)_5^3 + (2)\vartheta(v_1, v_2)_5 \vartheta(v_1, v_2)_1^2 + (3)\vartheta(v_1, v_2)_5 \vartheta(v_1, v_2)_{12}^2 \\ \qquad + (4)\vartheta(v_1, v_2)_5 \vartheta(v_1, v_2)_{34}^2 + (5)\vartheta(v_1, v_2)_1 \vartheta(v_1, v_2)_{12} \vartheta(v_1, v_2)_{34}, \end{cases}$$

die, um es noch einmal hervorzuheben, in jedem Transformationssystem für irgend ein λ besteht.

Multiplicirt man die Gleichung (40.) mit $\vartheta(v_1, v_2)_5$ und wendet sodann die drei Substitutionen in halben Perioden auf dieselbe an, welche von den beiden Functionen:

$$\vartheta(v_1, v_2)_5 \quad \text{und} \quad \vartheta(v_1, v_2)_1$$

die erste zu einer geraden, die zweite zu einer ungeraden Function machen, so erhält man, wenn man die Argumente verschwinden lässt und mit θ die transformirte, mit ϑ die ursprüngliche ϑ-Function, mit ε_α achte Einheitswurzeln bezeichnet, die folgenden Gleichungen:

$$(41.)\quad \begin{cases} \theta_\lambda \vartheta_5 = (1)\vartheta_5^4 + (4)\vartheta_5^2 \vartheta_{34}^2, \\ \varepsilon_\mu \theta_\mu \vartheta_{03} = (1)\vartheta_{03}^4 + (3)\vartheta_{03}^2 \vartheta_{23}^2, \\ \varepsilon_\nu \theta_\nu \vartheta_{23} = (1)\vartheta_{23}^4 - (3)\vartheta_{23}^2 \vartheta_{03}^2, \\ \varepsilon_\varrho \theta_\varrho \vartheta_{34} = (1)\vartheta_{34}^4 + (4)\vartheta_{34}^2 \vartheta_5^2, \end{cases}$$

welche mit Berücksichtigung der bekannten Relation:

$$(42.)\quad \vartheta_{03}^4 + \vartheta_{23}^4 = \vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4$$

die Modulargleichung:

$$(43.)\quad \varepsilon_\mu \theta_\mu \vartheta_{03} + \varepsilon_\nu \theta_\nu \vartheta_{23} + \varepsilon_\varrho \theta_\varrho \vartheta_{34} = \theta_\lambda \vartheta_5$$

und für die Coefficienten (1), (3), (4) die Werthe liefern;

$$(44.)\quad \begin{cases} (1) = \dfrac{\varepsilon_\varrho \theta_\varrho \vartheta_{34} - \theta_\lambda \vartheta_5}{\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4}, \quad (3) = \dfrac{\varepsilon_\mu \theta_\mu \vartheta_{23} - \varepsilon_\nu \theta_\nu \vartheta_{03}}{\vartheta_{03} \vartheta_{23} (\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{03}^4)}, \\ \qquad (4) = \dfrac{\theta_\lambda \vartheta_{34}^3 - \varepsilon_\varrho \theta_\varrho \vartheta_5^3}{\vartheta_5 \vartheta_{34} (\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4)}. \end{cases}$$

Wendet man ebenso auf Gleichung (40.) für v_1, v_2 die durch die Indices 4, 14 bezeichneten Substitutionen an, welche von den Functionen

$$\vartheta(v_1, v_2)_5 \quad \text{und} \quad \vartheta(v_1, v_2)_{12}$$

die erste zu einer geraden, die zweite zu einer ungeraden Function machen,

so erhält man:

$$(45.)\quad \begin{cases} \varepsilon_\sigma \theta_\sigma \vartheta_4 = (1)\vartheta_4^4 - (2)\vartheta_4^2\,\vartheta_{14}^2, \\ \varepsilon_\tau \theta_\tau \vartheta_{14} = (1)\vartheta_{14}^4 + (2)\vartheta_{14}^2\vartheta_4^2, \end{cases}$$

woraus in Verbindung mit den Gleichungen (41.) und mit Benutzung der Relation:

$$(46.)\quad \vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4 = \vartheta_5^4 - \vartheta_{34}^4$$

die zweite Modulargleichung:

$$(47.)\quad \varepsilon_\sigma \theta_\sigma \vartheta_4 + \varepsilon_\tau \theta_\tau \vartheta_{14} + \varepsilon_\varrho \theta_\varrho \vartheta_{34} = \theta_5 \vartheta_5$$

folgt und sich der Coefficient (2.) in der Form ergiebt:

$$(48.)\quad (2) = \frac{\varepsilon_\tau \theta_\tau \vartheta_4^4 - \varepsilon_\sigma \theta_\sigma \vartheta_{14}^4}{\vartheta_4 \vartheta_{14}(\vartheta_4^4 + \vartheta_{14}^4)}.$$

Der Coefficient (5) folgt jetzt aus der Gleichung (40.), wenn man auf dieselbe eine beliebige Substitution in halben Perioden anwendet, welche der Index eines geraden ϑ ist. Man findet endlich leicht durch Benutzung der Relation:

$$\vartheta_{01}^4 + \vartheta_{14}^4 = \vartheta_5^4 - \vartheta_{12}^4$$

eine dritte Modulargleichung in der Form:

$$(49.)\quad \varepsilon_\alpha \theta_\alpha \vartheta_{01} + \varepsilon_\beta \theta_\beta \vartheta_{12} + \varepsilon_\tau \theta_\tau \vartheta_{14} = \theta_5 \vartheta_5.$$

Ueberträgt man die eben gefundenen Resultate auf die Repräsentanten der nicht äquivalenten Klassen und beachtet, dass mit Ausnahme der Glieder in der Diagonalreihe des die Transformation darstellenden Schema's sämmtliche Transformationszahlen $\equiv 0$ (mod. 8), dass die Grössen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ für das transformirte Fundamentaltheta geradzahlig, dass endlich für dieses letztere

$$\mu_1 \equiv m_1, \quad \mu_2 \equiv m_2, \quad \nu_1 \equiv n_1, \quad \nu_2 \equiv n_2$$

sind, so erhält man die folgenden für alle 40 Repräsentanten gültigen Relationen, von denen je drei die zur Transformation gehörigen Modulargleichungen vorstellen:

$$(50.)\quad \begin{cases} \theta_{34}\vartheta_{34} + \theta_{03}\vartheta_{03} + \theta_{23}\vartheta_{23} = \theta_5\vartheta_5, & \theta_2\vartheta_2 + \theta_4\,\vartheta_4 + \theta_0\,\vartheta_0 = \theta_5\vartheta_5, \\ \theta_4\,\vartheta_4 \pm \theta_{14}\vartheta_{14} + \theta_{34}\vartheta_{34} = \theta_5\vartheta_5, & \theta_0\vartheta_0 + \theta_{03}\vartheta_{03} + \theta_{01}\vartheta_{01} = \theta_5\vartheta_5, \\ \theta_{01}\vartheta_{01} \pm \theta_{14}\vartheta_{14} + \theta_{12}\vartheta_{12} = \theta_5\vartheta_5, & \theta_2\vartheta_2 + \theta_{12}\vartheta_{12} + \theta_{23}\vartheta_{23} = \theta_5\vartheta_5, \end{cases}$$

wobei zu bemerken, dass das positive Vorzeichen der Grösse $\theta_{14}\vartheta_{14}$ für die durch das zweite und dritte Schema von (8.), das negative für die durch das erste und vierte dargestellten Transformationen gültig ist. Aus den für diejenigen Transformationen geltenden Modulargleichungen, für welche sowohl

die Argumente als auch die Moduln der transformirten ϑ-Functionen die dreifachen der ursprünglichen sind, ersieht man, dass die in meiner ersten Abhandlung über die Transformation der *Abel*schen Functionen (Bd. 64 dieses Journals) mit Hülfe des Additionstheoremes der ϑ-Functionen hergeleiteten Relationen zwischen den *Abel*schen Functionen mit dreifachem und einfachem Modul (für die Nullwerthe der Argumente) aus den durch die Ausdrücke (50.) gegebenen Modulargleichungen zusammengesetzt sind. — Somit wären für die Transformation dritten Grades die Modulargleichungen, sowie mit Hülfe derselben die algebraischen Ausdrücke der transformirten ϑ-Functionen hergeleitet und zugleich die Behandlungsweise für eine beliebige Transformation von unpaarem Grade vorgezeichnet. Verbindet man die in dieser Abhandlung gefundenen Resultate mit denen, die sich bei der Untersuchung der Transformation zweiten Grades ergaben, so erhält man ohne Schwierigkeit die algebraischen Gleichungen zwischen den ϑ-Functionen der in einander zu transformirenden *Abel*schen Systeme für einen beliebigen Grad der Transformation.

Greifswald, im November 1866.

Beweis eines Satzes von *Legendre*.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

1.

Legendre stellt in seinem *traité des intégrales Euleriennes* einen Satz auf, welchen er durch Induction gefunden hat, und den man, meines Wissens, bis jetzt nicht bewiesen hat. Ist nämlich s eine gegebene ganze positive Zahl und legt man die beiden bekannten Gleichungen

$$(A.)\quad \Gamma x.\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

$$(B.)\quad \Gamma x.\Gamma\left(\frac{1}{a}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{a-1}{a}+x\right) = \Gamma ax.a^{\frac{1}{2}-ax}(2\pi)^{\frac{1}{2}(a-1)}$$

zu Grunde, so kann man, nach diesem Satze, mit Hülfe dieser Gleichungen, die sämmtlichen in der Reihe

$$(C.)\quad \Gamma\frac{1}{s},\quad \Gamma\frac{2}{s},\quad \ldots\quad \Gamma\frac{s-1}{s}$$

enthaltenen Grössen finden, wenn man von denselben bereits die Anzahl

$$N = \frac{s}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots$$

kennt, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ u. s. w. die Primzahlen bedeuten, durch welche s theilbar ist, so dass also N der Hälfte der Anzahl der Zahlen gleich ist, welche relative Primzahlen zu s sind.

Legendre bemerkt jedoch zugleich, dass man nicht willkürlich N Grössen aus der Reihe ($C.$) zu diesem Zwecke auswählen kann, dass vielmehr diese Auswahl Beschränkungen unterliegt, und dass es nicht leicht sei, vorauszusehen, welche N Grössen für einen gegebenen Werth s mit Sicherheit zur Berechnung der übrigen führen. Ich hoffe, dass die folgenden Erörterungen zur Aufklärung dieses Gegenstandes beitragen werden.

2.

Zur Abkürzung soll im Folgenden statt $\log.\Gamma\frac{b}{n}$ das Zeichen $\left[\frac{b}{n}\right]$ gesetzt werden. Setzt man in ($B.$)

$$x = \frac{b}{n};\quad a = \frac{n}{c}$$

und nimmt die Logarithmen, so hat man also

$$\log.(a^{\frac{1}{2}-\frac{ab}{n}}.2^{\frac{1}{2}(a-1)}.\pi^{\frac{1}{2}(a-1)})+\left[\frac{ab}{n}\right] = \left[\frac{b}{n}\right]+\left[\frac{b+c}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{b+(a-1)c}{n}\right].$$

Ich werde jedoch den in dieser Formel erscheinenden Logarithmen, auf welchen bei der Beweisführung Nichts ankommt, weglassen und kürzer schreiben

$$(D.)\quad \left[\frac{ab}{n}\right] = \left[\frac{b}{n}\right]+\left[\frac{b+c}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{b+(a-1)c}{n}\right],$$

so dass man jedesmal, wenn die Formel streng richtig sein soll, den betreffenden Logarithmen noch zu suppliren hat. In demselben Sinne schreibe ich statt der Gleichung $(A.)$, die Gleichung

$$(E.)\quad [x] = -[1-x].$$

Auch werde ich, statt zu sagen $\log \Gamma\frac{b}{n}$, mich des Ausdrucks bedienen: der Bruch mit dem Zähler b und dem Nenner n, oder: der Bruch $\left[\frac{b}{n}\right]$, was zu keinem Missverständnisse führen kann, da von anderen Grössen in Bruchform keine Rede sein wird. Sind zwei solche Brüche $\left[\frac{b}{n}\right]$ und $\left[\frac{b'}{n}\right]$ so beschaffen, dass $b+b'=n$, so sage ich: diese Brüche *ergänzen* sich, und man hat also nach $(E.)$

$$\left[\frac{b}{n}\right] = -\left[\frac{b'}{n}\right].$$

Auch werde ich die Zahlen, welche zu n Primzahlen und nicht grösser als $\frac{n}{2}$ sind, die *Hauptzahlen* von n nennen.

3.

Sei nun zuerst $s = n^a$ und n eine Primzahl (2 nicht ausgeschlossen). Es ist also zu beweisen, dass man sämmtliche in der Reihe

$$(F.)\quad \left[\frac{1}{n^a}\right],\ \left[\frac{2}{n^a}\right],\ \ldots\ \left[\frac{n^a-1}{n^a}\right]$$

enthaltenen Brüche finden kann, wenn man gewisse in dieser Reihe enthaltene Glieder kennt, deren Anzahl $\frac{n^a}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ ist.

Dies ist aber auch die Anzahl der Hauptzahlen von n^a. Man nehme daher an, dass alle Brüche aus der Reihe $(F.)$ bekannt sind, deren Zähler die Hauptzahlen von n^a sind und es wird nun leicht zu zeigen sein, dass man aus diesen alle übrigen Brüche der Reihe $(F.)$ finden kann.

Zunächst findet man durch Formel ($E.$) die Brüche, welche die als bekannt angenommenen ergänzen, man kennt also alle in ($F.$) enthaltenen Brüche, deren Zähler nicht durch n theilbar sind. Man bilde nun alle Brüche von der Form $\left[\frac{k}{n^{\alpha-1}}\right]$ wo k die Hauptzahlen von $n^{\alpha-1}$ bedeutet. Nach ($D.$) hat man, wenn man für k seine verschiedenen Werthe setzt, die $\frac{n^{\alpha-1}}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ Gleichungen

$$(G.)\quad\begin{cases}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right]=\left[n\cdot\frac{1}{n^\alpha}\right]=\left[\frac{1}{n^\alpha}\right]+\left[\frac{1}{n^\alpha}+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^\alpha}+\frac{n-1}{n}\right],\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left[\frac{n^{\alpha-1}-1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right]=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n^{\alpha-1}-1}{n^\alpha}\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n^{\alpha-1}-1}{n^\alpha}+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n^{\alpha-1}-1}{n^\alpha}+\frac{n-1}{n}\right].\end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen enthält auf der rechten Seite n Brüche; in allen Gleichungen zusammen genommen kommen also auf der rechten Seite $\frac{n^\alpha}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ Brüche vor. Es ist klar, dass sich keiner dieser Brüche auf einen Bruch mit kleinerem Nenner als n^α reduciren lässt. Auch können nicht zwei dieser Brüche gleich sein. Denn aus $\left[\frac{l}{n^\alpha}+\frac{l'}{n}\right]=\left[\frac{m}{n^\alpha}+\frac{m'}{n}\right]$ würde $l-m=(m'-l')n^{\alpha-1}$ folgen, es wäre also $l-m$ durch $n^{\alpha-1}$ theilbar, während sowohl l als m kleiner als $\frac{n^{\alpha-1}}{2}$ sind. Es folgt hieraus zugleich, dass auch $l+m$ nicht durch $n^{\alpha-1}$ theilbar ist, es können sich also auch nicht zwei dieser Brüche $\left[\frac{l}{n^\alpha}+\frac{l'}{n}\right]$ und $\left[\frac{m}{n^\alpha}+\frac{m'}{n}\right]$ ergänzen, da hieraus $l+m+(l'+m')n^{\alpha-1}=n^\alpha$ folgen würde, also $l+m$ durch $n^{\alpha-1}$ theilbar wäre.

Es ergiebt sich hieraus, dass alle diese Brüche entweder die ursprünglich als bekannt angenommenen oder deren Ergänzungen sind, mithin jedenfalls bekannt sind. Es folgt aber zugleich, dass man, um sie kennen zu lernen, auch wirklich die *sämmtlichen* als bekannt vorausgesetzten Brüche (oder ihre Ergänzungen) kennen muss.

Vermittelst der Gleichungen ($G.$) findet man nun alle oben erwähnten Brüche von der Form $\left[\frac{k}{n^{\alpha-1}}\right]$ und aus diesen wieder ihre Ergänzungen, d. h. also, man kennt nun alle Brüche aus der Reihe ($F.$) bei welchen der Zähler durch n und keine höhere Potenz von n theilbar ist, oder, mit anderen Worten, alle Brüche aus der Reihe

$$\left[\frac{1}{n^{a-1}}\right] \cdots\cdots \left[\frac{n^{a-1}-1}{n^{a-1}}\right]$$

bei welchen der Zähler nicht durch n theilbar ist.

Aus diesen findet man nun wieder alle Brüche aus der Reihe $(F.)$ bei welchen der Zähler durch n^2 und keine höhere Potenz von n theilbar ist. Diese Brüche (oder ihre Ergänzungen) sind nämlich in der Form $\left[\frac{k'}{n^{a-2}}\right]$ enthalten, wenn k' eine der Hauptzahlen von n^{a-2} bezeichnet. Nun folgt aus $(D.)$

$$\left[\frac{k'}{n^{a-2}}\right] = \left[\frac{k'}{n^{a-1}}\right]+\left[\frac{k'}{n^{a-1}}+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{k'}{n^{a-1}}+\frac{n-1}{n}\right].$$

Die Brüche auf der rechten Seite dieser Gleichung, welche sämmtlich in der Form $\left[\frac{k'+l.n^{a-2}}{n^{a-1}}\right]$ enthalten sind, haben aber Zähler, welche nicht durch n theilbar sind, sie sind also bekannt und mithin auch die Brüche von der Form $\left[\frac{k'}{n^{a-2}}\right]$ und ihre Ergänzungen. Aus diesen Brüchen findet man wieder auf dieselbe Weise alle Brüche der Reihe $(F.)$, bei welchen der Zähler durch n^3 und keine höhere Potenz von n theilbar ist, und so sieht man, wie allmählich alle Brüche der Reihe $(F.)$ vermittelst der ursprünglich als bekannt angenommenen Brüche gefunden werden. Es ist mithin für diesen Fall der *Legendre*sche Satz bewiesen.

4.

Sei nun $s = ab$, wo a und b Primzahlen sind. Man nehme zuerst an, dass man alle Brüche kennt, deren Zähler die Hauptzahlen von ab sind, deren Anzahl mithin $\frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$ ist. Aus diesen findet man ihre Ergänzungen und kennt mithin die sämmtlichen Brüche, deren Zähler Primzahlen zu a und b sind. Man nehme ferner an, dass b nicht $=2$ ist und bezeichne durch k eine der Hauptzahlen von b, also eine der Zahlen $1, 2, \ldots \frac{1}{2}(b-1)$. Nun hat man nach $(D.)$

$$(H.)\qquad \left[\frac{ak}{ab}\right] = \left[\frac{k}{ab}\right]+\left[\frac{k+b}{ab}\right]+\cdots+\left[\frac{k+(a-1)b}{ab}\right].$$

Indem man für k seine verschiedenen Werthe setzt, erhält man mithin $\frac{1}{2}(b-1)$ solche Gleichungen. Die Brüche auf der rechten Seite der Gleichung sind alle in der Form $\left[\frac{k+lb}{ab}\right]$ enthalten, ihre Zähler also jedenfalls nicht durch b theilbar. Ferner sind alle in diesen $\frac{1}{2}(b-1)$ Gleichungen enthaltenen Brüche von

einander verschieden. Dass nämlich diejenigen, welche zu demselben Werthe von k gehören, nicht gleich sein können, versteht sich von selbst. Wäre aber $\left[\frac{k+nb}{ab}\right]=\left[\frac{k'+n'b}{ab}\right]$, also $k-k'=b(n'-n)$, so müsste $k-k'$ durch b theilbar sein, während k und k' beide kleiner als b sind. In jeder Gleichung wird aber unter diesen Brüchen *einer* und *nur* einer vorkommen, dessen Zähler durch a theilbar ist, da man der Gleichung $k+bx=ay$, wenn x und y ganze Zahlen bedeuten, immer durch ein einziges Werthenpaar $x<a$, $y<b$ genügen kann. Ist also l der Werth, für welchen $k+lb=ma$, so bringe man den entsprechenden Bruch $\left[\frac{am}{ab}\right]$ auf die linke Seite der Gleichung und zwar nehme man, wenn $m>\frac{1}{2}b$, statt dessen seine Ergänzung mit entgegengesetztem Zeichen. Unter dieser Voraussetzung hat man also

$$(H'.)\left[\frac{ak}{ab}\right]-\left[\frac{am}{ab}\right]=\left[\frac{k}{ab}\right]+\cdots+\left[\frac{k+(l-1)b}{ab}\right]+\left[\frac{k+(l+1)b}{ab}\right]+\cdots+\left[\frac{k+(a-1)b}{ab}\right].$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen nun nur Brüche, deren Zähler Primzahlen zu ab sind, deren Werthe mithin bekannt sind, ihre Anzahl ist $a-1$. Indem man dann statt k seine verschiedenen Werthe setzt, erhält man also ein System Gleichungen $(H'.)$, welche auf der rechten Seite

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2}=\frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

verschiedene Brüche enthalten, d. h. so viel als man als bekannt angenommen hat.

Die Brüche, deren Differenz auf der linken Seite steht, $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ und $\left[\frac{am}{ab}\right]$ gehören beide zu der Reihe von Brüchen, deren Zähler durch a und nicht durch b theilbar ist, und zugleich sind k und m kleiner als $\frac{1}{2}b$. Nun giebt es überhaupt nur $\frac{1}{2}(b-1)$ verschiedene Brüche dieser Art, in den $\frac{1}{2}(b-1)$ Gleichungen $(H'.)$ kommen aber $b-1$ solcher Brüche vor. Es muss daher jeder dieser Brüche *zweimal* und nicht öfter vorkommen, da die Brüche, welche sich aus $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ ergeben, wenn man für k seine verschiedenen Werthe setzt, unter einander verschieden sind, wie auch die Brüche, die sich aus $\left[\frac{am}{ab}\right]$ ergeben.

Es sind nun folgende Fälle möglich:

1) Für einen bestimmten Werth von k ist $\left[\frac{ak}{ab}\right]=-\left[\frac{am}{ab}\right]$. Dann findet man aus der entsprechenden Gleichung $(H'.)$ unmittelbar den Werth von $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ und dieser Bruch kommt nun in keiner einem anderen Werthe von k entsprechenden Gleichung $(H'.)$ weiter vor.

Dieser Fall wird immer und nur dann eintreten, wenn $a+1$ durch b theilbar ist. Ist nämlich $\left[\frac{ak}{ab}\right] = -\left[\frac{am}{ab}\right]$, so ist $ak = ab - am$, nun sei $am = k + lb$, also $k(a+1) = (a-l)b$, da nun k nicht durch b theilbar ist, so muss mithin b ein Factor von $a+1$ sein. Ist umgekehrt $a+1$ durch b theilbar, so hat man

$$ak = ab - \left[k + b\left(a - \frac{(a+1)k}{b}\right)\right].$$

Nun ist $k < \frac{1}{2}b$, also $\frac{(a+1)k}{b} < \frac{a+1}{2}$, mithin $a - \frac{(a+1)k}{b}$ eine ganze positive Zahl, die kleiner als a ist; setzt man sie $= l$, so kommt der Zähler $k+lb$ auf der rechten Seite der Gleichung $(H'.)$ vor und da mithin

$$ak = ab - (k+lb),$$

so ist $k + lb = am$ und $\left[\frac{ak}{ab}\right] = -\left[\frac{am}{ab}\right]$.

Ist z. B. $s = 45$, $a = 9$, $b = 5$, so findet man

$$\left[\frac{1.9}{45}\right] = \left[\frac{1}{45}\right] + \left[\frac{6}{45}\right] + \left[\frac{11}{45}\right] + \left[\frac{16}{45}\right] + \left[\frac{21}{45}\right] + \left[\frac{26}{45}\right] + \left[\frac{31}{45}\right] + \left[\frac{36}{45}\right] + \left[\frac{41}{45}\right],$$

$$\left[\frac{2.9}{45}\right] = \left[\frac{2}{45}\right] + \left[\frac{7}{45}\right] + \left[\frac{12}{45}\right] + \left[\frac{17}{45}\right] + \left[\frac{22}{45}\right] + \left[\frac{27}{45}\right] + \left[\frac{32}{45}\right] + \left[\frac{37}{45}\right] + \left[\frac{42}{45}\right],$$

es ist aber $\left[\frac{36}{45}\right] = -\left[\frac{9}{45}\right]$, $\left[\frac{27}{45}\right] = -\left[\frac{18}{45}\right]$.

Wie in diesem Beispiele, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass überhaupt, sobald die Gleichung $\left[\frac{ak}{ab}\right] = -\left[\frac{am}{ab}\right]$ für irgend einen Werth von k Statt findet, dies bei allen Werthen von k der Fall ist, d. h. man findet in diesem Falle für jedes gegebene k unmittelbar den entsprechenden Werth von $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ aus der Gleichung $(H'.)$, in welcher dieser Bruch vorkommt.

2) Für einen bestimmten Werth von k ist $\left[\frac{ak}{ab}\right] = \left[\frac{am}{ab}\right]$. Die entsprechende Gleichung $(H'.)$ geht also in

$$0 = \left[\frac{k}{ab}\right] + \cdots + \left[\frac{k+(a-1)b}{ab}\right]$$

über, d. h. der Bruch $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ lässt sich nun nicht mehr aus dieser Gleichung bestimmen, er kommt aber auch in keiner anderen weiter vor. Statt dessen hat man aber nun eine Bedingungsgleichung zwischen den Brüchen, welche man als ursprünglich gegebene und von einander unabhängige angenommen hat. Man streiche also einen dieser Brüche aus der Reihe der gegebenen und

nehme dafür den Bruch $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ als gegeben an, so dass man im Ganzen wieder dieselbe Zahl gegebener Brüche hat.

Dieser Fall wird immer und nur dann eintreten, wenn b ein Factor $a-1$ ist. Soll er nämlich eintreten, so muss $ka = k+lb$ sein, da nun k nicht durch b theilbar ist, so muss b ein Factor von $a-1$ sein. Ist umgekehrt $k(a-1) = lb$ also $ka = k+lb$ so ist $l < a$ und mithin kommt in der Gleichung $(H'.)$, der Bruch $\left[\frac{k+lb}{ab}\right]$ nothwendig auf der rechten Seite vor. Es findet dies aber offenbar in jeder der $\frac{1}{2}(b-1)$ Gleichungen statt, die sich aus (H') ergeben, indem man für k seine verschiedenen Werthe setzt, d. h. man muss alsdann $\frac{1}{2}(b-1)$ der ursprünglich als gegeben angenommenen Brüche streichen und dafür die Brüche $\left[\frac{a}{ab}\right] \ldots\ldots \left[\frac{\frac{1}{2}(b-1)a}{ab}\right]$ als gegeben voraussetzen, und zwar so, dass man in jeder Gleichung $(H'.)$ *einen* der darin vorkommenden ursprünglich als bekannt angenommenen Brüche aus der Reihe der gegebenen streicht und dafür den in derselben Gleichung vorkommenden Bruch $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ als bekannt annimmt.

Wäre z. B. $s = 21$, $a = 7$, $b = 3$, so müsste man, nach der früheren Vorschrift zunächst die Brüche $[\frac{1}{21}]$, $[\frac{2}{21}]$, $[\frac{4}{21}]$, $[\frac{5}{21}]$, $[\frac{8}{21}]$, $[\frac{10}{21}]$ als bekannt annehmen, aus welchen sich dann ihre Ergänzungen ergäben. Man hätte aber

$$[\tfrac{7}{21}] = [\tfrac{1}{21}]+[\tfrac{4}{21}]+[\tfrac{7}{21}]+[\tfrac{10}{21}]+[\tfrac{13}{21}]+[\tfrac{16}{21}]+[\tfrac{19}{21}]$$

mithin

$$0 = [\tfrac{1}{21}]+[\tfrac{4}{21}]+[\tfrac{10}{21}]+[\tfrac{13}{21}]+[\tfrac{16}{21}]+[\tfrac{19}{21}].$$

Man nimmt daher $[\frac{7}{21}]$ als gegeben an, während man etwa $[\frac{1}{21}]$ aus der Reihe der gegebenen Brüche streicht und seinen Werth aus der letzten Gleichung findet.

3) Findet keiner dieser zwei Fälle statt, so kommt in den Gleichungen $(H'.)$ jeder der auf der linken Seite stehenden Brüche $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ in zwei verschiedenen Gleichungen vor und zwar jedesmal mit einem von ihm verschiedenen verbunden. Er kann aber nicht beidemal mit demselben Bruche und *demselben Zeichen* verbunden sein. Käme nämlich auf der linken Seite in der einen Gleichung die Differenz $\left[\frac{ak}{ab}\right] - \left[\frac{am}{ab}\right]$ und in der anderen die Differenz $\left[\frac{ak'}{ab}\right] - \left[\frac{am'}{ab}\right]$ vor und wäre $\left[\frac{ak}{ab}\right] = -\left[\frac{am'}{ab}\right]$, ferner $\left[\frac{ak'}{ab}\right] = -\left[\frac{am}{ab}\right]$, so dass man zweimal die Differenz $\left[\frac{ak}{ab}\right] - \left[\frac{am}{ab}\right]$ hätte, so sei $am = k+lb$,

$am' = k' + l'b$, man hätte also

$$ak = ab - (k' + l'b),$$
$$ak' = ab - (k + lb),$$

mithin

$$(a-1)(k-k') = (l-l')b,$$

es müsste also $a-1$ durch b theilbar sein und mithin, wie oben bewiesen wurde, $m = k$ und $m' = k'$, also $ak = ab - ak'$ und $k + k' = b$, was nicht sein kann, da k und k' beide kleiner als $\frac{1}{2}b$ sind.

Dagegen kann es vorkommen, dass drei der Gleichungen (H'.) die Form haben

$$\left[\frac{ak}{ab}\right] - \left[\frac{am}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak'}{ab}\right] + \left[\frac{am'}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak''}{ab}\right] + \left[\frac{am''}{ab}\right] = \cdots$$

und zugleich $k = m''$, $k' = m$, $k'' = m'$ ist. Dann ist die Summe der auf der linken Seite der zwei ersten Gleichungen stehenden Ausdrücke, dem auf der linken Seite der dritten Gleichung stehenden Ausdrucke gleich. Man hat mithin wieder eine Bedingungsgleichung zwischen den als bekannt angenommenen Brüchen, man streicht daher einen dieser Brüche aus der Reihe der gegebenen und nimmt statt dessen einen der drei Brüche $\left[\frac{ak}{ab}\right]$, $\left[\frac{ak'}{ab}\right]$, $\left[\frac{ak''}{ab}\right]$ als bekannt an, aus welchem sich dann die zwei anderen vermittelst der erwähnten Gleichungen ergeben.

Es können auch complicirtere Beziehungen zwischen den Brüchen von der Form $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ statt finden, welche zu Bedingungsgleichungen zwischen den ursprünglich als bekannt angenommenen Grössen führen. Man kann z. B. das System von fünf Gleichungen haben

$$\left[\frac{ak}{ab}\right] + \left[\frac{am}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak'}{ab}\right] + \left[\frac{am'}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak''}{ab}\right] - \left[\frac{am''}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak'''}{ab}\right] - \left[\frac{am'''}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak^{\text{IV}}}{ab}\right] - \left[\frac{am^{\text{IV}}}{ab}\right] = \cdots$$

wo zugleich $k = m^{\text{IV}}$, $k' = m$, $k'' = m'''$, $k''' = m'$, $k^{\text{IV}} = m''$.

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man die Differenz $\left[\frac{ak'''}{ab}\right]-\left[\frac{ak}{ab}\right]$ und dasselbe erhält man, wenn man die drei übrigen Gleichungen zusammen addirt; man hat also wieder eine Bedingungsgleichung zwischen den als gegeben angenommenen Grössen. Man muss daher einen der fünf Brüche $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ . . . $\left[\frac{ak^{IV}}{ab}\right]$ als bekannt annehmen, und dafür einen der in der entsprechenden Gleichung (H'.) auf der rechten Seite vorkommenden Brüche aus der Reihe der gegebenen streichen, dessen Werth man alsdann aus der Bedingungsgleichung kennen lernt.

Dies wäre z. B. der Fall, wenn $z=55$, $a=5$, $b=11$. Hier hätte man

$$\left[\frac{1.5}{55}\right] = \left[\frac{1}{55}\right]+\left[\frac{12}{55}\right]+\left[\frac{23}{55}\right]+\left[\frac{34}{55}\right]+\left[\frac{45}{55}\right],$$
$$\left[\frac{2.5}{55}\right] = \left[\frac{2}{55}\right]+\left[\frac{13}{55}\right]+\left[\frac{24}{55}\right]+\left[\frac{35}{55}\right]+\left[\frac{46}{55}\right],$$
$$\left[\frac{3.5}{55}\right] = \left[\frac{3}{55}\right]+\left[\frac{14}{55}\right]+\left[\frac{25}{55}\right]+\left[\frac{36}{55}\right]+\left[\frac{47}{55}\right],$$
$$\left[\frac{4.5}{55}\right] = \left[\frac{4}{55}\right]+\left[\frac{15}{55}\right]+\left[\frac{26}{55}\right]+\left[\frac{37}{55}\right]+\left[\frac{48}{55}\right],$$
$$\left[\frac{5.5}{55}\right] = \left[\frac{5}{55}\right]+\left[\frac{16}{55}\right]+\left[\frac{27}{55}\right]+\left[\frac{38}{55}\right]+\left[\frac{49}{55}\right],$$

und demnach

$$\left[\frac{5}{55}\right]+\left[\frac{10}{55}\right] = \left[\frac{1}{55}\right]+\cdots$$
$$\left[\frac{10}{55}\right]+\left[\frac{20}{55}\right] = \left[\frac{2}{55}\right]+\cdots$$
$$\left[\frac{15}{55}\right]-\left[\frac{25}{55}\right] = \left[\frac{3}{55}\right]+\cdots$$
$$\left[\frac{20}{55}\right]-\left[\frac{15}{55}\right] = \left[\frac{4}{55}\right]+\cdots$$
$$\left[\frac{25}{55}\right]-\left[\frac{5}{55}\right] = \left[\frac{16}{55}\right]+\cdots.$$

Die Differenz der zweiten und der ersten Gleichung giebt $\left[\frac{20}{55}\right]-\left[\frac{5}{55}\right]$ und dasselbe erhält man, wenn man die drei letzten Gleichungen addirt. Man streicht also z. B. $\left[\frac{1}{55}\right]$ aus der Reihe der gegebenen Grössen und nimmt $\left[\frac{5}{55}\right]$ als bekannt an, dann findet man den Werth von $\left[\frac{1}{55}\right]$ aus der Bedingungsgleichung und ferner aus den vorstehenden Gleichungen die Werthe von $\left[\frac{10}{55}\right]$, $\left[\frac{15}{55}\right]$ u. s. w.

Jedenfalls wird man, indem man die Werthe der Grössen $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ aus den Gleichungen (H'.) zu bestimmen sucht, entweder auf solche Bedingungsgleichungen zwischen den ursprünglich als gegeben angenommenen Grössen geführt, oder man findet die Grössen $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ wirklich durch Elimination. Demnach ergiebt sich, dass man alle Brüche, deren Zähler weder durch a noch durch b theilbar sind, sowie alle Brüche, deren Zähler durch a und nicht durch b theilbar sind, kennen lernt, indem man nur dieselbe Anzahl Brüche, wie anfänglich, als bekannt voraussetzt, und sieht zugleich, dass man diese Anzahl nothwendig kennen muss. Auf dieselbe Weise behandelt man die Brüche, deren Zähler durch b und nicht durch a theilbar sind. Es ist also auch in diesem Falle der *Legendre*sche Satz bewiesen.

Zur Ergänzung ist nur noch der früher ausgeschlossene Fall zu betrachten, wenn $b=2$. In diesem Falle giebt es nur einen Bruch von der Form $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ nämlich $\left[\frac{a}{2a}\right]$ oder $[\frac{1}{2}]$ dessen Werth sich, wie bekannt, unmittelbar aus (A.) ergiebt, wenn man dort $x=\frac{1}{2}$ setzt, es bleibt also Alles wie früher.

5.

Um das Vorhergehende an einem Beispiele zu erläutern, sei $s=77$. Man nimmt also zuerst die 30 Brüche als bekannt an, deren Zähler die Hauptzahlen von 77 sind. Schreibt man statt $[\frac{1}{77}]$ zur Abkürzung nur einfach die Ziffer 1 und so in allen übrigen Fällen, so sind diese Brüche: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 34, 36, 37, 38.

Aus diesen findet man zunächst ihre Ergänzungen. Dann hat man nach (D.)

$$\left[\frac{1.7}{77}\right] = 1+12+23+34+45+56+67,$$

$$\left[\frac{2.7}{77}\right] = 2+13+24+35+46+57+68,$$

$$\left[\frac{3.7}{77}\right] = 3+14+25+36+47+58+69,$$

$$\left[\frac{4.7}{77}\right] = 4+15+26+37+48+59+70,$$

$$\left[\frac{5.7}{77}\right] = 5+16+27+38+49+60+71.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
7+21 &= 1+12+23+34+45+67,\\
14-35 &= 2+13+24+46+57+68,\\
21-14 &= 3+25+36+47+58+69,\\
28+\ 7 &= 4+15+26+37+48+59,\\
35+28 &= 5+16+27+38+60+71,
\end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen man durch Elimination alle auf der linken Seite stehenden Brüche und dann ihre Ergänzungen findet, so dass man nun alle Brüche kennt, deren Zähler durch 7 theilbar sind.

Ferner hat man

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1.11}{77}\right] &= 1+\ 8+15+22+29+36+43+50+57+64+71,\\
\left[\frac{2.11}{77}\right] &= 2+\ 9+16+23+30+37+44+51+58+65+72,\\
\left[\frac{3.11}{77}\right] &= 3+10+17+24+31+38+45+52+59+66+73,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
11-22 &= 1+\ 8+15+29+36+43+50+57+64+71,\\
22+33 &= 2+\ 9+16+23+30+37+51+58+65+72,\\
33+11 &= 3+10+17+24+31+38+45+52+59+73,
\end{aligned}$$

die zwei ersten dieser Gleichungen geben den Werth von $11+33$ wie auch die dritte. Hier erhält man also eine Bedingungsgleichung zwischen den Brüchen die man als bekannt angenommen hat. Man streicht daher einen dieser Brüche aus der Reihe der gegebenen und nimmt statt dessen einen der Brüche 11, 22, 33 als bekannt an, wodurch man die Werthe aller Brüche findet, deren Zähler durch 11 theilbar sind.

6.

Es ist nun leicht auf den allgemeinen Fall überzugehen. Sei $z = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ und $a, b, c \ldots$ verschiedene Primzahlen. Man berücksichtige nur, dass, sobald man alle Brüche von der Form $\left[\frac{k a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1}\ldots}{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}\right] = \left[\frac{k}{a^{\alpha-\alpha_1} b^{\beta-\beta_1} c^{\gamma-\gamma_1}\ldots}\right]$ kennt, wo $\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 < \beta$, $\gamma_1 < \gamma$ u. s. w. und k eine der Hauptzahlen von

$$a^{\alpha-\alpha_1} b^{\beta-\beta_1} c^{\gamma-\gamma_1}\ldots$$

ist, man auch deren Ergänzungen, mithin alle Brüche kennt, deren Zähler zu $a^{\alpha-\alpha_1} b^{\beta-\beta_1} c^{\gamma-\gamma_1}\ldots$ Primzahlen und kleiner als diese Zahl sind.

Man geht auch hier wieder zunächst von der Voraussetzung aus, dass die Brüche bekannt sind, deren Zähler die Hauptzahlen von s sind, deren Anzahl also $\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots$ ist, und aus welchen man ihre Ergänzungen findet, so dass alle Brüche bekannt sind, deren Zähler Primzahlen zu s sind.

Man berechnet nun die Brüche, deren Zähler durch $a, a^2 \ldots$ aber nicht durch $b, c \ldots$ theilbar sind, auf folgende Weise. Versteht man unter k die Hauptzahlen von $a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots$, so hat man

$$\left[\frac{ka}{s}\right] = \left[\frac{k}{s}\right] + \left[\frac{k + a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots}{s}\right] + \cdots + \left[\frac{k + (a-1) a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots}{s}\right].$$

Man setze zunächst voraus, dass $\alpha > 1$. Alsdann sind die Zähler aller auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Brüche weder durch a noch durch b, c u. s. w. theilbar; diese Brüche sind mithin bekannt und man findet aus denselben alle Brüche von der Form $\left[\frac{ka}{s}\right]$. Setzt man für k seine verschiedenen Werthe, deren Anzahl $\frac{a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots}{s}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right) \ldots$ ist, so erhält man ein System Gleichungen, welche auf der rechten Seite im Ganzen $\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right) \ldots$ Brüche enthalten, und man zeigt wieder leicht, dass keine zwei dieser Brüche identisch sind. Dass nämlich die in derselben Gleichung vorkommenden nicht gleich sein können, versteht sich von selbst. Wären aber zwei Brüche aus verschiedenen Gleichungen einander gleich, so würde aus $k + l a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots = k' + l' a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots$ folgen, dass $k - k'$ durch $a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots$ theilbar ist, während k und k' kleiner als $a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots$ sind. Es finden sich also auf der rechten Seite gerade so viel verschiedene Brüche, als man als bekannt angenommen hat. Weniger als diese Anzahl darf daher nicht als bekannt angenommen werden, wenn alle Brüche von der Form $\left[\frac{ka}{s}\right]$ und mithin alle Brüche, deren Zähler durch die erste und keine höhere Potenz von a (und nicht durch b, c u. s. w.) theilbar sind, gefunden werden sollen.

Aus diesen letzteren Brüchen findet man nun ebenso die Brüche von der Form $\left[\frac{ka^2}{s}\right]$, indem man jetzt für k die Hauptzahlen von $a^{\alpha-2} b^\beta c^\gamma \ldots$ nimmt, denn man hat

$$\left[\frac{ka^2}{s}\right] = \left[\frac{ka}{s}\right] + \left[\frac{ka + a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots}{s}\right] + \cdots + \left[\frac{ka + (a-1) a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \ldots}{s}\right].$$

Nun sind hier die Zähler aller auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Brüche durch a und keine höhere Potenz von a, auch nicht durch $b, c \ldots$ theilbar, also bekannt und daher auch $\left[\frac{ka^2}{z}\right]$. Auf diese Weise fährt man fort, bis man zuletzt noch die Brüche von der Form $\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right]$ zu berechnen hat, wo nun k die Hauptzahlen von $b^\beta c^\gamma \ldots$ bedeutet, während man die Werthe der Brüche, deren Zähler durch $a^{\alpha-1}$ (und nicht durch a^α, b, $c \ldots$) theilbar sind, schon als bekannt voraussetzt. Hier bedarf die Rechnung einer Modification. Man hat nämlich nun

$$\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right] = \left[\frac{ka^{\alpha-1}}{z}\right] + \left[\frac{ka^{\alpha-1} + a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \ldots}{z}\right] + \cdots + \left[\frac{ka^{\alpha-1} + (a-1)a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \ldots}{z}\right].$$

Die Zähler aller auf der rechten Seite stehenden Glieder sind jedenfalls durch $a^{\alpha-1}$ und nicht durch $b, c \ldots$ theilbar. Setzt man nun für k einen seiner Werthe, welcher nicht durch a theilbar ist, so findet sich unter diesen Gliedern eines, und nur eines, dessen Zähler $ka^{\alpha-1} + la^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \ldots = a^{\alpha-1}(k + lb^\beta c^\gamma \ldots)$ so beschaffen ist, dass $k + lb^\beta c^\gamma \ldots$ durch a theilbar ist, da man der Gleichung $ax - b^\beta c^\gamma \ldots y = k$ immer und nur durch einen einzigen Werth von y, der kleiner als a ist, Genüge leisten kann. Mithin findet sich auf der rechten Seite *ein* und *nur* ein Bruch, dessen Zähler durch a^α theilbar ist. Setzt man dagegen für k einen der Werthe, welche durch a theilbar sind, so ist $ka^{\alpha-1}$ durch a^α theilbar, es findet sich also auch in diesem Falle ein einziger Bruch auf der rechten Seite, dessen Zähler durch a^α theilbar ist, nämlich der erste $\left[\frac{ka^{\alpha-1}}{z}\right]$, während offenbar die Zähler der übrigen auf dieser Seite stehenden Brüche nur durch $a^{\alpha-1}$ theilbar sind. Jedenfalls findet sich also auf der rechten Seite *ein* und *nur* ein Glied, welches durch a^α theilbar ist. Dieses Glied bringe man auf die linke Seite der Gleichung. Sei $ka^{\alpha-1} + la^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \ldots = ma^\alpha$ (wo auch $l = 0$ sein kann), so hat man nun

$$\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right] - \left[\frac{ma^\alpha}{z}\right] = \cdots$$

sollte aber $m > \frac{b^\beta c^\gamma \ldots}{2}$ sein, so nimmt man wieder statt $\left[\frac{ma^\alpha}{z}\right]$ seine Ergänzung mit entgegengesetztem Zeichen. Indem man nun für k seine verschiedenen Werthe setzt, erhält man also ein System von

$$\frac{b^\beta c^\gamma \ldots}{2}\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \cdots$$

Gleichungen. Man kann nun wieder leicht zeigen, dass alle auf der rechten

Seite dieser Gleichungen stehenden Brüche von einander verschieden sind und diese Brüche sind alle bekannt, da ihre Zähler durch keine höhere Potenz von a als die $\alpha-1^{\text{te}}$ theilbar sind. Auch ist klar, dass unter den Brüchen $\left[\frac{ma^\alpha}{s}\right]$ keine zwei gleichen vorkommen können und da dies auch bei den Brüchen $\left[\frac{ka^\alpha}{s}\right]$ der Fall ist, so folgt, dass jeder dieser Brüche zweimal vorkommt. Es treten daher hier wieder dieselben Fälle ein, wie sie schon in §. 4 besprochen worden sind. Ist für einen Werth von k der Werth von $\left[\frac{ka^\alpha}{s}\right]$ und des correspondirenden $\left[\frac{ma^\alpha}{s}\right]$ derselbe, so giebt dies eine Bedingungsgleichung zwischen den auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Ausdrücken. Diese sind aber alle von der Form $\left[\frac{ha^{\alpha-1}}{s}\right]$ wo h gegen s Primzahl, und man kann sie auf die ursprünglich als bekannt angenommenen, d. h. auf diejenigen zurückführen, deren Zähler Primzahlen gegen s sind. Denn man hat

$$\left[\frac{ha^{\alpha-1}}{s}\right] = \left[\frac{h}{s}\right]+\left[\frac{h+ab^\beta c^\gamma\ldots}{s}\right]+\left[\frac{h+2ab^\beta c^\gamma\ldots}{s}\right]+\cdots,$$

wo die Zähler aller auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke offenbar Primzahlen zu s sind. Eine Bedingungsgleichung zwischen den Grössen $\left[\frac{ha^{\alpha-1}}{s}\right]$ heisst also soviel als eine Bedingungsgleichung zwischen den ursprünglich gegebenen Grössen. Man streicht daher eine dieser letzteren aus der Reihe der als bekannt angenommenen Grössen und nimmt dagegen das entsprechende $\left[\frac{ka^\alpha}{s}\right]$ als bekannt an. Man beweist auch hier, ähnlich wie in dem einfacheren früher betrachteten Falle (§. 4), dass dies immer und nur dann eintreten wird, wenn $a-1$ durch $b^\beta c^\gamma\ldots$ theilbar ist.

Auch in allen übrigen Fällen, wo sich eine Bedingungsgleichung zwischen den ursprünglich gegebenen Grössen herausstellt, verfährt man in ähnlicher Weise, wie dies schon bei dem erwähnten einfacheren Falle erörtert worden ist.

Man sieht hieraus, dass man nun schliesslich die Werthe sämmtlicher Brüche kennt, deren Zähler entweder durch keine der Zahlen $a, b, c, \ldots$ oder durch die verschiedenen Potenzen von a und nicht durch $b, c, \ldots$ theilbar sind, während die Zahl der ursprünglich als bekannt angenommenen Brüche immer dieselbe geblieben ist.

Im Vorhergehenden wurde $\alpha>1$ angenommen. Ist $\alpha=1$, so hat man

gleich von Anfang $\left[\frac{ka^\alpha}{s}\right]$ zu berechnen und führt dies nach dem so eben besprochenen Verfahren aus.

Dasselbe Verfahren zeigt nun auch, wie man die Werthe der Brüche finden kann, deren Zähler *nur* durch die verschiedenen Potenzen von b oder *nur* durch die verschiedenen Potenzen von c u. s. w. theilbar sind, während die *Anzahl* der als bekannt angenommenen Brüche immer dieselbe bleibt.

Um nun die Brüche zu finden, welche in der Form $\left[\frac{kab}{s}\right]$ enthalten sind, wo k eine der Hauptzahlen von $a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^\gamma \ldots$ bedeutet, geht man von der Gleichung aus

$$\left[\frac{kab}{s}\right] = \left[\frac{kb}{s}\right] + \left[\frac{kb + a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \ldots}{s}\right] + \cdots + \left[\frac{kb + (a-1)a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \ldots}{s}\right].$$

Die Brüche auf der rechten Seite dieser Gleichung haben Zähler, welche nur durch die erste Potenz von b und nicht durch $a, c, \ldots$ u. s. w. theilbar und mithin bekannt sind. Aus den Brüchen mit dem Zähler kab findet man dann wieder auf dieselbe Weise die Brüche mit dem Zähler ka^2b, wo nun k die Hauptzahlen von $a^{\alpha-2}b^{\beta-1}c^\gamma \ldots$ sind u. s. w. Schliesslich sind noch die Brüche mit den Zählern $ka^\alpha b$ zu finden. Hier bezeichnet k die Hauptzahlen von $b^{\beta-1}c^\gamma \ldots$ und man hat

$$\left[\frac{ka^\alpha b}{s}\right] = \left[\frac{ka^{\alpha-1}b}{s}\right] + \left[\frac{ka^{\alpha-1}b + a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \ldots}{s}\right] + \cdots + \left[\frac{ka^{\alpha-1}b + (a-1)a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \ldots}{s}\right].$$

Man beweist nun wieder, wie früher, dass auf der rechten Seite dieser Gleichung ein und nur ein Glied vorkommt, welches durch a^α theilbar ist, und dass in jeder Gleichung, die man durch Specialisirung des Werthes von k erhält, ein anderes Glied dieser Art erscheint. Bringt man daher wieder alle diese Glieder, oder, falls sie grösser als $\frac{1}{2}$ sind, ihre Ergänzungen mit entgegengesetztem Zeichen, auf die andere Seite der Gleichung, so zeigt man nun auch wieder, wie in den ähnlichen früheren Fällen, dass jedes dieser Glieder zweimal vorkommt, und dass man daher entweder ihre Werthe durch Elimination findet, oder hierdurch zu einer Bedingungsgleichung zwischen den auf der rechten Seite gebliebenen Gliedern geführt wird. Im letzteren Falle hat man wieder eine Bedingungsgleichung zwischen den ursprünglich als bekanut angenommenen Grössen, da jedes Glied von der Form $\left[\frac{ka^{\alpha-1}b + la^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \ldots}{s}\right]$ in die Reihe $\left[\frac{k + lb^{\beta-1}c^\gamma \ldots}{s}\right] + \left[\frac{k + lb^{\beta-1}c^\gamma \ldots + ab^{\beta-1}c^\gamma \ldots}{s}\right] + \cdots$ verwandelt werden kann, deren Glieder nur Zähler enthalten, die Primzahlen zu s sind. Man

streicht daher wieder eine dieser Grössen aus der Reihe der bekannten und nimmt einen der Brüche $\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right]$ als bekannt an.

Aus den bekannten Brüchen von der Form $\left[\frac{kab}{z}\right]$ findet man dann wieder die Brüche von der Form $\left[\frac{kab^2}{z}\right]$ und überhaupt sieht man nun, wie man, immer in derselben Weise fortschreitend, allgemein die Brüche finden kann, deren Zähler in der Form $ka^{\alpha_1}b^{\beta_1}c^{\gamma_1}\ldots$ enthalten sind, wo k die Hauptzahlen von $a^{\alpha-\alpha_1}b^{\beta-\beta_1}c^{\gamma-\gamma_1}\ldots$ bezeichnet, während die Anzahl der als bekannt anzunehmenden Brüche immer die ursprünglich vorausgesetzte bleibt, wodurch der *Legendre*sche Satz in seiner ganzen Allgemeinheit bewiesen ist.

Göttingen, 1. August 1866.

Zur Theorie der windschiefen Flächen.

(Von Herrn *J. Lüroth* in Mannheim.)

§. 1. Coordinaten einer geraden Linie.

Sind a_1, a_2, a_3, a_4 und b_1, b_2, b_3, b_4 die homogenen Coordinaten zweier Punkte im Raum, so führen wir als Punktcoordinaten der durch diese Punkte bestimmten geraden Linie mit *Plücker* (Phil. Trans. 1865) die Verhältnisse der sechs Grössen

$$a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad a_1 b_3 - a_3 b_1, \quad a_1 b_4 - a_4 b_1,$$
$$a_3 b_4 - a_4 b_3, \quad a_2 b_4 - a_4 b_2, \quad a_2 b_3 - a_3 b_2$$

ein. Wir sind hierzu berechtigt, weil diese Quotienten die wesentliche Eigenschaft der Coordinaten besitzen, dass sie ungeändert bleiben, wenn man die Elemente, von welchen sie abhängen, auf dem Gebilde, welches sie bestimmen, beliebig verlegt. In der That, setzen wir $a_i + \lambda b_i$ für a_i, $a_i + \mu b_i$ für b_i so multipliren sich alle sechs Grössen mit dem Factor $(\mu - \lambda)$ und ihre Verhältnisse ändern sich nicht. Jene Grössen selbst werden wir homogene Coordinaten der Linie nennen und folgende Zeichen für sie gebrauchen:

$$(1.) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1, & x_2 = a_1 b_3 - a_3 b_1, & x_3 = a_1 b_4 - a_4 b_1, \\ x_4 = a_3 b_4 - a_4 b_3, & x_5 = a_4 b_2 - a_2 b_4, & x_6 = a_2 b_3 - a_3 b_2. \end{cases}$$

Zwischen diesen sechs Coordinaten besteht die identische Gleichung

$$(2.) \qquad x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0,$$

so dass sie nur vier unabhängige Grössen vertreten; wie dies sein muss, da eine Gerade durch vier Bedingungen bestimmt ist.

Sollen umgekehrt sechs Grössen $x_1, \dots x_6$ Coordinaten einer geraden Linie sein, so müssen sich Grössen a, b so bestimmen lassen, dass die Gleichungen (1.) befriedigt werden. Aus diesen folgen aber die Gleichungen

$$\begin{aligned} -a_2 x_4 - a_3 x_5 - a_4 x_6 &= 0, \\ a_1 x_4 \qquad\quad - a_3 x_3 + a_4 x_2 &= 0, \\ a_1 x_5 + a_2 x_3 \qquad\quad - a_4 x_1 &= 0, \\ a_1 x_6 - a_2 x_2 + a_3 x_1 \qquad\quad &= 0 \end{aligned}$$

und damit diese zusammen bestehen können, muss ihre Determinante ver-

schwinden. Diese ist eine überschlagene und das Quadrat von $x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6$, was also Null sein muss.

Hiermit ist gezeigt, dass die Bedingung (2.) nothwendig und hinreichend dafür ist, dass sechs Grössen $x_1, \dots x_6$ Coordinaten einer Geraden sind.

Sind andererseits $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ die homogenen Coordinaten zweier Ebenen, so werden wir aus demselben Grunde wie oben die Grössen

$$y_1 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \quad y_2 = \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1, \quad y_3 = \alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1,$$
$$y_4 = \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3, \quad y_5 = \alpha_4\beta_2 - \alpha_2\beta_4, \quad y_6 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2$$

als homogene Ebenencoordinaten der Schnittlinie beider Ebenen bezeichnen. Diese beiden Arten von Coordinaten einer geraden Linie sind jedoch nicht wesentlich von einander verschieden. Bezeichnen wir mit ξ die laufenden Coordinaten, mit p, q die Coordinaten zweier beliebigen Punkte, so sind die Gleichungen zweier Ebenen, welche durch a und b gehen

$$\Sigma \pm \xi_1 a_2 b_3 p_4 = 0, \quad \Sigma \pm \xi_1 a_2 b_3 q_4 = 0.$$

Entnehmen wir hieraus die Coordinaten der Ebenen und bilden die Grössen y, so finden wir mit Hülfe eines bekannten Satzes der Determinantentheorie, wenn $\Sigma \pm a_1 b_2 p_3 q_4' = D$ gesetzt wird

$$y_1 = Dx_4, \quad y_4 = Dx_1, \quad y_2 = Dx_5, \quad y_5 = Dx_2, \quad y_3 = Dx_6, \quad y_6 = Dx_3.$$

Es seien nun $x_1, \dots x_6, y_1, \dots y_6$ die Coordinaten zweier Geraden; wir wollen die Bedingung aufsuchen, unter der sie sich schneiden. Bezeichnen wir mit a, b zwei Punkte der einen, mit α, β zwei Punkte der anderen Linie, so ist die Bedingung des Schnittes das Bestehen der Gleichungen

$$a_i + \lambda b_i = \mu \alpha_i + \nu \beta_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

welches erfordert, dass

$$\Sigma \pm a_1 b_2 \alpha_3 \beta_4 = 0$$

sei. Durch Entwickelung ergiebt sich hieraus die Bedingung

$$(3.) \quad x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_5 + x_5y_2 + x_3y_6 + x_6y_3 = 0.$$

Bezeichnen wir, wie im Folgenden stets,

$$x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 \quad \text{mit} \quad R,$$

so schreibt sich die Gleichung (3.) auch

$$\Sigma y_i \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0.$$

§. 2. Gebilde aus geraden Linien.

Damit sechs Grössen $x_1, \ldots x_6$ die Coordinaten einer geraden Linie seien, muss die Bedingung bestehen

$$R = 0.$$

Sollen nun die Coordinaten noch einer Gleichung

$$u = 0$$

genügen, wo u eine homogene Function von $x_1, \ldots x_6$, so giebt es eine dreifach unendliche Schaar von Geraden, welche dieser Gleichung Genüge leisten. Das so erhaltene Gebilde heisst nach *Plücker* ein Complex, und zwar vom Grade n, wenn u eine Function n^{ter} Ordnung ist. Die Function u enthält dann

$$\frac{n+1.n+2.n+3.n+4.n+5}{1.2.3.4.5} = (n+5)_5$$

Glieder und $(n+5)_5-1$ willkürliche Constanten, von welchen man noch, wenn $n \geqq 2$ ist, mit Hülfe der Gleichung $R=0$ $(n+3)_5$ zerstören kann, so dass noch $\frac{n+1.(n+2)^2.n+3}{3.4}-1$ übrig bleiben. Für $n=1$ stimmen beide Formeln überein, so dass man allgemein sagen kann:

Ein Complex n^{ter} Ordnung wird durch $\frac{n+1.(n+2)^2.n+3}{3.4}-1$ Gerade bestimmt. Wenn Relationen zwischen den Coefficienten Statt haben, so kann der Complex übergehen in das System der Tangenten einer Oberfläche oder in das System der Geraden, welche eine Raumcurve schneiden.

Sollen die Coordinaten $x_1, \ldots x_6$ noch eine dritte Gleichung

$$v = 0$$

erfüllen, so genügt nur noch eine zweifach unendliche Schaar von Geraden diesen Bedingungen. Man nennt die Gesammtheit dieser Linien nach *Plücker* eine Congruenz oder nach älterem Sprachgebrauch ein Strahlensystem.

Tritt zu den drei Gleichungen noch eine vierte

$$w = 0$$

hinzu, so existirt nur eine einfach unendliche Schaar von geraden Linien, deren Coordinaten die vier Gleichungen erfüllen. Diese bilden eine Configuration oder im Allgemeinen eine windschiefe Fläche. Ordnung und Klasse der windschiefen Fläche sind gleich der Anzahl der Geraden, welche eine gegebene Gerade schneiden, also gleich der Zahl der gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen

$$R=0, \quad u=0, \quad v=0, \quad w=0,$$

$$\Sigma a_i \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0,$$

wo a die Coordinaten einer beliebigen Linie sind. Ist u von der n^{ten}, v von der m^{ten}, w von der l^{ten} Ordnung, so ist die Anzahl der gemeinsamen Wurzeln

$$2lmn$$

und dies also die Ordnung und Klasse der Fläche, welche der Schnitt der drei Complexe $u=0$, $v=0$, $w=0$ ist.

§. 3. Das Geschlecht der windschiefen Fläche.

Denkt man sich die vier Gleichungen

$$R=0,\quad u=0,\quad v=0,\quad w=0$$

aufgelöst, so werden sich die Verhältnisse der sechs Coordinaten darstellen als, im Allgemeinen, algebraische Functionen eines Parameters. Statt dessen aber kann man sagen: die Coordinaten werden sich darstellen als ganze Functionen von zwei Parametern, welche durch eine Gleichung verknüpft sind. Diese Gleichung oder, wenn sie reductibel ist, einer ihrer irreductibeln Factoren bedingt dann eine gewisse Klasse von *Abel*schen Integralen und Functionen und zwar $2p$fach periodische, wenn p die charakteristische Zahl der *Abel*schen Functionen ist, auf welche sie führt. Bekanntlich lassen sich dann jene Parameter durch solche Functionen darstellen, und das Gleiche gilt demnach von den Coordinaten einer Erzeugenden derjenigen einfachen windschiefen Fläche, welche dem gewählten irreductibeln Factor entspricht. Wir werden Geschlecht der Fläche die charakteristische Zahl der *Abel*schen Functionen nennen, auf welche sie führt, und stellen uns jetzt die Aufgabe, dieses zu bestimmen. Um die Coordinaten $x_1, \dots x_6$ als Functionen zweier Parameter in der angegebenen Weise darzustellen, verbinden wir mit den Gleichungen:

$$R=0,\quad u=0,\quad v=0,\quad w=0$$

noch zwei Büschel von linearen Complexen

$$a+sb = 0,$$
$$\alpha+z\beta = 0,$$

wo a, b, α, β lineare Ausdrücke der x sind, und eliminiren aus diesen sechs Gleichungen die Coordinaten. Die resultirende Gleichung oder einer ihrer irreductibeln Factoren

$$\varphi(s,z) = 0$$

ist dann die Gleichung, deren p wir suchen. Ist k der Grad der Gleichung, welche in s und z von gleichem Grade ist, ω die Anzahl ihrer Verzweigungspunkte, so ist nach *Riemann*

$$(4.)\qquad p = \frac{\omega}{2}-k+1.$$

k ist nun gleich der Anzahl der Schnittlinien der Fläche mit einem linearen Complexe, also gleich dem Grade der Fläche; ω ist gleich der Anzahl der Werthe von s, für welche $\varphi'(s)=0$ wird, ohne dass zugleich $\varphi'(s)=0$ ist, d. h. gleich der Anzahl von Complexen des Büschels $\alpha+\beta s$, welche zwei benachbarte Erzeugende mit der Fläche gemein haben oder sie berühren. Diese Zahl, welche man, nach der Analogie der Raumcurven, etwa den Rang der Fläche nennen könnte, und damit p, lässt sich bestimmen, wenn, wie wir jetzt annehmen wollen, die windschiefe Fläche der vollständige und nicht in Theile zerlegbare Schnitt der drei Complexe $u=0$, $v=0$, $w=0$ ist. Bezeichnen wir nämlich mit a, b, c, d irgend vier Linien, so bestimmen diese ein Büschel von linearen Complexen und die Bedingung, dass einer derselben durch die Erzeugenden x, $x+dx$ gehe ist dann

$$\Sigma \pm x_1\, dx_2\, a_3\, b_4\, c_5\, d_6 = 0.$$

Um diese Bedingung mit Hülfe der Gleichungen

$$R=0, \qquad u=0, \qquad v=0, \qquad w=0,$$

$$\Sigma R_i\, dx_i=0, \quad \Sigma u_i\, dx_i=0, \quad \Sigma v_i\, dx_i=0, \quad \Sigma w_i\, dx_i=0, \quad \left(\varphi_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$$

zu reduciren, multipliren wir mit

$$\Sigma \pm u_1\, v_2\, w_3\, R_4\, \alpha_5\, \beta_6,$$

in welcher Determinante die α und β beliebige Grössen sind, und erhalten dann, nach Fortlassung eines nicht verschwindenden Factors:

$$(5.) \qquad D=\begin{vmatrix} \Sigma u_i a_i & \Sigma v_i a_i & \Sigma w_i a_i & \Sigma R_i a_i \\ \Sigma u_i b_i & \Sigma v_i b_i & \Sigma w_i b_i & \Sigma R_i b_i \\ \Sigma u_i c_i & \Sigma v_i c_i & \Sigma w_i c_i & \Sigma R_i c_i \\ \Sigma u_i d_i & \Sigma v_i d_i & \Sigma w_i d_i & \Sigma R_i d_i \end{vmatrix}=0.$$

Diese Gleichung ist vom Grade $l+m+n-2$ und der durch sie dargestellte Complex schneidet also die windschiefe Fläche in $2lmn(l+m+n-2)$ Linien. Dies ist die Zahl der gesuchten Complexe, vorausgesetzt, dass die Determinante, mit welcher multiplicirt wurde, nicht verschwindet. Dies geschieht aber unabhängig von den α und β, wenn entweder alle u_i oder v_i oder w_i verschwinden, oder wenn eine Gleichung besteht von der Form

$$\lambda_1 u_i+\lambda_2 v_i+\lambda_3 w_i+\lambda_4 R_i=0, \qquad (i=1,2,\dots 6)$$

in welchen beiden Fällen die windschiefe Fläche Doppelerzeugende besitzt, für die mit $\varphi'(s)$ auch $\varphi'(s)$ zu Null wird. Ist die Anzahl dieser Linien d,

so ist demnach

$$(6.)\qquad \omega = 2lmn(l+m+n-2)-2d;$$

und somit, da hier $k=2lmn$,

$$(7.)\qquad p = lmn(l+m+n-4)+1-d.$$

Wenn die Fläche nicht der vollständige Schnitt dreier Complexe ist, ziehen wir aus der Gleichung (4.) das Resultat

$$(8.)\qquad \omega = 2k+2(p-1).$$

Um nun andere, auch für diesen Fall geltende, Formeln für p zu erlangen, stellen wir die folgende Betrachtung an. Wie leicht zu sehen ist, sind die Coordinaten des Schnittpunktes einer Geraden und einer Ebene lineare Functionen der Coordinaten der Geraden. Schneiden wir also die windschiefe Fläche durch eine Ebene, so werden sich die Coordinaten eines Punktes der Schnittcurve darstellen als ganze Functionen von zwei Parametern, zwischen welchen eine Gleichung besteht, die auf $2p$ fach periodische Functionen führt. Das Geschlecht der Schnittcurve ist also gleich dem Geschlechte der Fläche selbst*). Die Schnittcurve hat einen Doppelpunkt, wo ihre Ebene eine Doppelcurve oder eine Doppelerzeugende schneidet. Bezeichnen wir also die Anzahl der Doppelerzeugenden mit d, die Summe der Grade der Doppelcurven mit δ, so ist

$$(9.)\qquad p = \frac{k-1.k-2}{2}-d-\delta.$$

Andererseits stellen sich auch die Coordinaten einer Ebene, welche durch eine Gerade und einen Punkt geht, als lineare Functionen der Coordinaten der Geraden dar, und so findet man das Geschlecht der Fläche auch gleich dem Geschlechte des Tangentenkegels, den man von einem Punkte an sie legen kann, wenn man den Kegel als Einhüllende einer Schaar von Ebenen betrachtet. Die Klasse dieses Kegels ist aber gleich der Ordnung k der Fläche; er hat eine Doppeltangentenebene, wo die Fläche eine Doppelerzeugende besitzt und ausserdem möge er noch δ' Doppeltangentenebenen besitzen, welche Doppeltangentenebenen der Fläche sind. Dann ist

$$p = \frac{k-1.k-2}{2}-d-\delta'.$$

Wir sehen aus der Vergleichung beider Formeln für p dass $\delta=\delta'$, dass also die Summe der Ordnungen der Doppelcurven einer windschiefen Fläche gleich ist der Summe der Klassen der abwickelbaren Flächen der Doppeltangenten-

*) Dies wurde, soviel ich weiss, zuerst von Herrn *H. Schwarz* ausgesprochen (dieses Journal Bd. 64, pag. 2).

ebenen. Wobei unter Klasse, wie gebräuchlich, die Anzahl der Ebenen verstanden ist, welche durch einen Punkt gehen. Mit Hülfe dieses Ausdrucks für p finden wir noch

$$\omega = k(k-1)-2d-2\delta.$$

Wenn wir endlich aus (9.) δ berechnen und für p seinen Werth (7.) anwenden, indem wir k entprechend $=2lmn$ setzen, so finden wir

$$(10.) \qquad \delta = lmn(2lmn-l-m-n+1)-d$$

als die Summe der Ordnungen der Doppelcurven einer windschiefen Fläche, welche der vollständige Schnitt dreier Complexe ist.

§. 4. Die allenthalben endlichen Integrale.

Den im vorigen Paragraphen gefundenen Werth (7.) von p kann man bestätigen durch directe Aufstellung der Integrale erster Gattung, deren es bekanntlich p verschiedene giebt. Die Form dieser Integrale ist nach Herrn *Clebsch* (dieses Journal Bd. 63, pag. 224)

$$\int \frac{\theta\, \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 x_5\, dx_6}{D},$$

wo D die Bedeutung hat, die es im vorigen Paragraphen besass und wo θ eine homogene Function der Coordinaten ist vom Grade $l+m+n-4$. Diese Function enthält nun $(l+m+n+1)_5$ Glieder, von welchen sich jedoch mit Hülfe der gegebenen Gleichungen leicht manche zerstören lassen.

Es möge allgemein eine Function k^{ten} Grades der sechs Grössen x bestehen neben einer Gleichung von den Graden k_1, k_2, k_3, k_4, so sieht man leicht man, dass man, wenn $k > k_1+k_2+k_3+k_4$, mit Hülfe der gegebenen Gleichungen, in der Function k^{ten} Grades so viele Glieder zerstören kann, dass nur noch

$$(k+5)_5 - \sum_{\iota}(k-k_\iota+5)_5 + \sum_{\iota,\varkappa}(k-k_\iota-k_\varkappa+5)_3 - \sum_{\iota,\varkappa,\lambda}(k-k_\iota-k_\varkappa-k_\lambda+5)_3 + (k-k_1-k_2-k_3-k_4+5)_5$$

übrig bleiben, wo $\sum\limits_{\iota,\varkappa}$ die Summe bedeutet ausgedehnt über alle Combinationen ohne Wiederholungen der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 zu zweien, $\sum\limits_{\iota,\varkappa,\lambda}$ zu dreien u. s. w. Um die obige Zahl auszuwerthen, beachten wir, dass $(n+5)_5$ der Coefficient ist von x^5 in der Entwickelung von $(1+x)^{n+5}$ nach Potenzen von x; der obige Ausdruck ist dann gleich dem Coefficienten von x^5 in der Entwickelung von

$$(1+x)^{k+5}.\{1-(1+x)^{-k_1}\}.\{1-(1+x)^{-k_2}\}.\{1-(1+x)^{-k_3}\}.\{1-(1+x)^{-k_4}\}$$
$$= x^4.(1+x)^{k+5}.k_1 k_2 k_3 k_4\{1-(k_1+k_2+k_3+k_4+4)x+\cdots\}$$

nach Potenzen von x, und findet sich also

$$(11.)\qquad = kk_1k_2k_3k_4 - \frac{k_1k_2k_3k_4}{2}(k_1+k_2+k_3+k_4-6).$$

Ist, wenn k_1, k_2, k_3, k_4 nach der Grösse geordnet sind, $k < k_1+k_2+k_3+k_4$ dagegen $> k_2+k_3+k_4$, so ist die obige Zahl zu vermindern um

$$(k-k_1-k_2-k_3-k_4+5)_5$$

d. h. zu vermehren um $(k_1+k_2+k_3+k_4-k-1)_6$. Wenn k auch noch

$$< k_2+k_3+k_4,$$

so ist der Ausdruck weiter zu vermindern um $(k_2+k_3+k_4-k-1)_5$. Hier, wo $k=l+m+n-4$ und $k_1=2$, tritt der letzte Fall ein und es findet sich demnach die Zahl der Glieder

$$= 2lmn(l+m+n-4)-lmn(l+m+n-4)+1$$
$$= lmn(l+m+n-4)+1.$$

Da aber der Complex θ noch durch die Doppelerzeugenden gehen muss, für welche die Determinante $D=0$, so ist diese Zahl noch zu vermindern um d, so dass in der That nur p Glieder übrig bleiben, welche mit willkürlichen Constanten multiplicirt sind.

Die windschiefe Fläche wird von einem Complex in einer endlichen Anzahl Linien geschnitten. Wie nun Herr *Clebsch* a. a. O. gezeigt hat, ist die Summe von *Abel*schen Integralen erster Gattung ausgedehnt über dieses Schnittsystem constant, wenn der Complex durch die Doppelerzeugenden geht. Durch passende Wahl der unteren Grenzen, oder indem man von einem Schnittsystem bis zu einem anderen integrirt, kann dieser constante Werth gleich Null oder wenigstens gleich einem Periodicitätsmodul gemacht werden. Ist der Complex von der Ordnung k, so erhält man auf diese Weise zwischen den $2klmn-2d$ Schnittlinien beider Gebilde p Gleichungen und p dieser Linien sind also durch die übrigen bestimmt. Und in der That beträgt, wenn $k > l+m+n-3$, die Anzahl der in k noch bleibenden Constanten nach (11.)

$$2klmn - lmn(l+m+n-4).$$

Man kann also von dem Schnittsystem $2klmn-lmn(l+m+n-4)-d-1$ Linien beliebig wählen und $lmn(l+m+n-4)-d+1=p$ sind dadurch bestimmt. Die aus dem *Abel*schen Theorem fliessenden Gleichungen sind also gerade hinreichend zur Bestimmung dieser Erzeugenden. Wenn $k < l+m+n-3$, so wird die Zahl der durch die übrigen bestimmten Schnittlinien kleiner, ohne

dass jedoch die Gleichungen des *Abel*schen Theorems zu bestehen aufhören können.

Man kann mit Hülfe des *Abel*schen Theorems, nach Analogie der von Herrn *Clebsch* bei den Curven aufgestellten Sätze, mit Leichtigkeit Sätze aufstellen über die Berührungen von Complexen mit windschiefen Flächen, die wir jedoch, da sie sich beinahe wörtlich aus jenen ablesen lassen, übergehen.

§. 5. Die singulären Erzeugenden.

Zwei aufeinanderfolgende Erzeugende einer windschiefen Fläche schneiden sich im Allgemeinen nicht, und es existirt nur eine endliche Anzahl von solchen, bei welchen es Statt hat. Wir wollen diese singuläre Erzeugende nennen und uns jetzt die Aufgabe stellen, deren Anzahl zu bestimmen, für den Fall einer windschiefen Fläche, welche der Schnitt dreier Complexe ist.

Es seien $x_1, \dots x_6$ die Coordinaten einer Geraden, $x+dx$ die einer benachbarten. Es bestehen dann die Gleichungen

$$R(x)=0,\quad R(x+dx)=\Sigma dx_i\frac{\partial R}{\partial x_i}+\tfrac{1}{2}\Sigma dx_i dx_k\frac{\partial^2 R}{\partial x_i\partial x_k}=0.$$

Sollen sich beide Linien schneiden, so muss

$$\Sigma(x_i+dx_i)\frac{\partial R}{\partial x_i} = 0$$

sein. Verbindet man diese Gleichung mit der vorigen, so zeigt sich, dass, wenn zwei Systeme von Grössen x, $x+dx$ die Coordinaten zweier sich schneidenden Linien sein sollen, die Gleichungen bestehen müssen

$$(12.)\qquad R(x)=0,\quad \Sigma R_i dx_i=0,\quad \Sigma\frac{\partial^2 R}{\partial x_i\partial x_k}dx_i dx_k=0.$$

Neben diesen gelten für unseren Fall die Gleichungen

$$u=0,\qquad v=0,\qquad w=0,$$
$$\Sigma u_i dx_i=0,\quad \Sigma v_i dx_i=0,\quad \Sigma w_i dx_i=0.$$

Bestimmen wir aus den drei letzten Gleichungen, der zweiten (12.) und einer Gleichung

$$\Sigma k_i dx_i = 0,$$

welche aus einer Beziehung $\Sigma k_i x_i=1$ zwischen den homogenen Coordinaten hervorgeht, die Verhältnisse der dx und setzen sie in die letzte Gleichung (12.) ein, so erhalten wir in der mit

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 \end{array}$$

geränderten *Hesse*schen Determinante von R die Gleichung des Complexes, welcher die windschiefe Fläche in den gesuchten Erzeugenden schneidet. In der so erhaltenen Gleichung kommen die willkürlichen Constanten k noch im zweiten Grade vor. Diese kann man auf bekannte Weise in einen Factor $(k_1x_1+\cdots+k_6x_6)^2=1$ vereinigen und erlangt so endlich die Gleichung des Complexes, wenn man noch die Werthe der $\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_k}$ einträgt:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & w_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & u_2 & v_2 & w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u_3 & v_3 & w_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_4 & v_4 & w_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_5 & v_5 & w_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & u_6 & v_6 & w_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Complex ist vom Grade $2(l+m+n-3)$. Die Anzahl seiner Schnittlinien mit der Fläche ist somit $=4lmn(l+m+n-3)$. Jede Doppelerzeugende ist aber auch Doppelerzeugende dieses Complexes, und somit sind von dieser Zahl die $4d$ Schnittlinien, welche in Doppelerzeugende fallen, fortzulassen, weil sich dort wohl benachbarte, aber nicht aufeinanderfolgende Erzeugende schneiden. Es bleibt also die Zahl der singulären Erzeugenden

$$(13.)\qquad \begin{cases} = 4lmn(l+m+n-3)-4d \\ = 2k+4(p-1). \end{cases}$$

Für ein Hyperboloid ist $k=2$, $p=0$. Daher die Zahl wie bekannt $=0$. Setzen wir $l=2$, $m=1$, $n=1$, so wird $k=4$, $p=1$ und also die Zahl der singulären Erzeugenden $=8$.

§. 6. Beziehung der windschiefen Fläche auf eine Curve.

Wir haben gesehen, dass die Coordinaten der Erzeugenden einer windschiefen Fläche sich darstellen als homogene Functionen dreier Parameter, zwischen welchen eine Gleichung besteht. Fassen wir diese Parameter als die Dreieckscoordinaten eines Punktes in einer Ebene auf, so stellt die Gleichung zwischen ihnen eine Curve dar und es ist also, durch die homogenen Functionen, eine solche Beziehung festgesetzt zwischen der Fläche und der Curve, dass, im Allgemeinen, jedem Punkte der Curve eine Erzeugende der Fläche entspricht und umgekehrt. Jedem Punkte der Ebene wird aber auch eine gerade Linie zugehören, deren Coordinaten man findet, indem man in jene Functionen die Coordinaten des Punktes einträgt; alle diese Linien bilden eine zweifach unendliche Schaar, d. h. ein Strahlensystem und sind durch gewisse Eigenthümlichkeiten an einander geknüpft. Jeder Curve der Ebene entspricht dann eine windschiefe Fläche des Strahlensystems, und der Geometrie der Ebene eine Geometrie im Strahlensystem.

Es mögen die Coordinaten x einer geraden Linie gegeben sein als homogene Functionen m^{ter} Ordnung

$$(14.) \qquad \varrho x_i = \varphi^{(i)}(y_1 y_2 y_3),$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfactor ist, und die Functionen φ als so beschaffen vorausgesetzt werden, dass sie die Gleichung

$$(15.) \qquad \varphi^{(1)}\varphi^{(4)}+\varphi^{(2)}\varphi^{(5)}+\varphi^{(3)}\varphi^{(6)} = 0$$

identisch erfüllen.

Wir wollen ferner voraussetzen, dass Punkte, Ausnahmspunkte, vorhanden sind, für welche alle Functionen φ gleichzeitig verschwinden; und zwar mögen die Curven $\varphi=0$ im i^{ten} Ausnahmspunkte alle einen $\eta_i$fachen Punkt haben. Da für einen solchen Punkt die linken Seiten von (14.) gleich Null werden, so müssen entweder alle x verschwinden, was keinen Sinn hat, oder ϱ muss Null sein und zwar $\eta_i$fach. Differentiiren wir nun die Gleichungen (14.) η mal, so erhalten wir, da für den Ausnahmspunkt $d\varrho=d^2\varrho=\cdots=d^{\eta-1}\varrho=0$,

$$d^\eta\varrho\,.\,x_i = \Sigma\, dy_1^{\alpha_1}\,dy_2^{\alpha_2}\,dy_3^{\alpha_3}\,.\,\partial_\alpha^\eta\varphi^{(i)},$$

wo der Kürze wegen $\partial_\alpha^\eta\varphi^{(i)}$ für $\dfrac{\partial^\eta\varphi^{(i)}}{\partial y_1^{\alpha_1}\,\partial y_2^{\alpha_2}\,\partial y_3^{\alpha_3}}$ gesetzt ist. Man sieht hieraus, dass jeder Richtung in der Ebene der y, in der man vom Ausnahmspunkte fortgeht, eine bestimmte Linie entspricht.

Denken wir uns nun in der Ebene der y eine Curve n^{ter} Ordnung $f=0$, welche im i^{ten} Ausnahmspunkte einen $\alpha_i$fachen Punkt hat, und bestimmen die Ordnung der ihr entsprechenden Fläche. Diese ist gleich der Anzahl von Schnittpunkten mit einer Geraden a oder gleich der Anzahl der gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen

$$f=0, \qquad \Sigma\varphi^{(i)}\frac{\partial R}{\partial a_i} = 0.$$

Es sind deren $m.n$. Da aber die zweite Gleichung, unabhängig von den a befriedigt wird durch die Coordinaten der Ausnahmspunkte, so sind die diesen entsprechenden Schnittpunkte zu verwerfen und der Grad der Fläche ist also

$$(16.) \qquad k = m.n - \Sigma\alpha_i\eta_i.$$

Das Geschlecht der Fläche ist gleich dem Geschlechte der Curve f und somit, wenn wir mit β die Anzahl der Zweige eines vielfachen Punktes bezeichnen, der kein Ausnahmspunkt ist

$$(17.) \qquad p = \frac{n-1.n-2}{2} - \Sigma\frac{\alpha_i(\alpha_i-1)}{2} - \Sigma\frac{\beta_i(\beta_i-1)}{2}.$$

Die Fläche wird dann die Erzeugenden, die vielfachen Punkten entsprechen, welche nicht zugleich Ausnahmspunkte sind, zu vielfachen Erzeugenden haben, und zwar zu βfachen, wenn der betreffende Punkt β Zweige hat. Ausserdem werden noch Doppelerzeugende auftreten, welche von der Natur des Strahlensystems herrühren. Deren Anzahl plus der Summe der Grade der Doppelcurven findet man aus (9.) §. 3, indem man die oben gefundenen Werthe für k und p einträgt und von der berechneten Summe $d+\delta$ noch $\Sigma\frac{\beta_i(\beta_i-1)}{2}$ abzieht.

Es ist hier, wie im Folgenden, vorausgesetzt, dass die vielfachen Punkte keine zusammenfallenden Tangenten haben.

§. 7. Der Rang der windschiefen Fläche.

Die Zahl der linearen Complexe eines Büschels, welche eine windschiefe Fläche berühren, könnten wir, mit Hülfe der obigen Zahlen, aus (8.) berechnen. Wir wollen jedoch hier, um eine Anwendung der eben entwickelten Principien zu machen, jene Formel direct verificiren.

Die Gleichung des Büschels sei $u+\lambda v=0$, wo u und v lineare Ausdrücke in den x sind. Wenn man nun in der Gleichung eines Complexes für die Coordinaten x die φ setzt, so erhält man die Gleichung einer Curve, deren Schnittpunkte mit $f=0$ den Schnittlinien des Complexes mit der Fläche entsprechen. Aus dem Büschel von Complexen $u+\lambda v=0$ entsteht so ein Curvenbüschel und der gesuchte Rang der Fläche ist gleich der Anzahl von Curven dieses Büschels, welche $f=0$ berühren, d. h. gleich der Anzahl der Schnittpunkte dieser Curve mit der *Jacobi*schen Curve der Functionen f, u, v, deren Gleichung $T=0$ wir abkürzend schreiben wollen

$$(18.)\qquad T=\begin{vmatrix} f_i \\ u_i \\ v_i \end{vmatrix}=0.$$

Diese Curve ist von der Ordnung $2m+n-3$ und die Anzahl ihrer Schnittlinien mit $f=0$, also $n(2m+n-3)$. Hievon gehen aber einige ab. Hat $f=0$ einen βfachen Punkt, der kein Ausnahmspunkt ist, so hat T einen $(\beta-1)$fachen und die hier entstehenden $\beta(\beta-1)$ Punkte sind nicht zu zählen.

Hat aber f einen αfachen Punkt in einem ηfachen Ausnahmspunkt, so wird T $(2\eta+\alpha-3)$fach Null. Um die Natur dieses Punktes näher zu untersuchen, setzen wir in T für y $y+\lambda z$, wo unter y die Coordinaten des betrachteten Punktes verstanden sind und entwickeln. Das erste Glied, welches nicht verschwindet, enthält $\lambda^{2\eta+\alpha-3}$, dessen Coefficient ist

$$\begin{vmatrix} \partial^{\alpha-1} f_i \\ \partial^{\eta-1} u_i \\ \partial^{\eta-1} v_i \end{vmatrix} = \partial^{2\eta+\alpha-3} T,$$

wo $\partial^\eta \varphi$ symbolisch gleich ist $\frac{1}{\eta!}\cdot\left(z_1\frac{\partial}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial}{\partial y_3}\right)^\eta\varphi$. Aber auch dieser Coefficient ist gleich Null. Um dies zu zeigen, bilden wir, unter A beliebige Grössen verstanden,

$$(A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3)\,\partial^{2\eta+\alpha-3}T = \begin{vmatrix} A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3 & A_i \\ 0 & \partial^{\alpha-1}f_i \\ 0 & \partial^{\eta-1}u_i \\ 0 & \partial^{\eta-1}v_i \end{vmatrix}.$$

Aus der symbolischen Darstellung von $\partial^\eta\varphi$ folgen nun leicht die Gleichungen

$$\partial^{\eta-1}\varphi_i = \frac{\partial}{\partial y_i}\partial^{\eta-1}\varphi = \frac{\partial}{\partial z_i}\partial^\eta\varphi,$$

mit deren Hülfe die rechte Seite der vorigen Gleichung

$$= -\begin{vmatrix} 0 & A_i \\ (n-\alpha+1)\partial^{\alpha-1}f & \partial^{\alpha-1}f_i \\ (m-\eta+1)\partial^{\eta-1}u & \partial^{\eta-1}u_i \\ (m-\eta+1)\partial^{\eta-1}v & \partial^{\eta-1}v_i \end{vmatrix}$$

wird. Dieser Ausdruck verschwindet aber, da ja $\partial^{\alpha-1}f$ und $\partial^{\eta-1}u$, $\partial^{\eta-1}v$ verschwinden, weil f einen αfachen, u und v aber einen ηfachen Punkt haben. Wir müssen also den Coefficienten von $\lambda^{2\eta+\alpha-2}$ betrachten, der sich findet

$$\partial^{2\eta+\alpha-2}T = \begin{vmatrix} \partial^{\alpha}f_i \\ \partial^{\eta-1}u_i \\ \partial^{\eta-1}v_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial^{\alpha-1}f_i \\ \partial^{\eta}u_i \\ \partial^{\eta-1}v_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial^{\alpha-1}f_i \\ \partial^{\eta-1}u_i \\ \partial^{\eta}v_i \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir wieder mit $A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3$, so geht mit Benutzung der früheren Gleichungen der erste Term über in

$$-\begin{vmatrix} 0 & A_i \\ (n-\alpha)\partial^{\alpha}f & \partial^{\alpha}f_i \\ 0 & \partial^{\eta-1}u_i \\ 0 & \partial^{\eta-1}v_i \end{vmatrix}$$

und ähnlich verwandeln sich der zweite und dritte Term, so dass man schreiben kann

$$(A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3)\partial^{2\eta+\alpha-2}T = -\begin{vmatrix} 0 & A_i \\ (n-\alpha)\partial^{\alpha}f & \partial^{\alpha-1}f_i \\ (m-\eta)\partial^{\eta}u & \partial^{\eta-1}u_i \\ (m-\eta)\partial^{\eta}v & \partial^{\eta-1}v_i \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die drei letzten Reihen mit $\frac{m-\eta}{\eta}z_1$, $\frac{m-\eta}{\eta}z_2$, $\frac{m-\eta}{\eta}z_3$ und subtrahirt von der ersten, so kommt:

$$(19.)\quad \begin{cases} (A_1y_1+A_2y_2+A_3y_3)\partial^{2\eta+\alpha-2}T = -\begin{vmatrix} \frac{m-\eta}{\eta}(A_1\eta_1+A_2\eta_2+A_3\eta_3) & A_i \\ \frac{n\eta-m\alpha}{\eta}\partial^{\alpha}f & \partial^{\alpha-1}f_i \\ 0 & \partial^{\eta-1}u_i \\ 0 & \partial^{\eta-1}v_i \end{vmatrix} \\ \qquad = \frac{n\eta-m\alpha}{\eta}\partial^{\alpha}f\,.\begin{vmatrix} \partial A_i \\ \partial^{\eta-1}u_i \\ \partial^{\eta-1}v_i \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die Curve T hat also einen $(2\eta+\alpha-2)$fachen Punkt, von dessen Tangenten α mit denen des Punktes von $f=0$ zusammenfallen; und die Anzahl der fortzulassenden Schnittpunkte ist somit $\alpha(\alpha+1)+(2\eta-2)\alpha$. Die gesuchte Zahl wird also:

$$= n(2m+n-3)-\Sigma\beta_i(\beta_i-1)-\Sigma 2\eta_i\alpha_i-\Sigma\alpha_i(\alpha_i-1)$$
$$= 2k+2(p-1),$$

wie wir oben gefunden hatten.

§. 8. Die singulären Erzeugenden.

Wir wollen jetzt die Anzahl der singulären Erzeugenden bestimmen, welche auf der durch die Curve $f=0$ dargestellten Fläche liegen.

Die Bedingung, dass sich zwei durch die Punkte y und $y+dy$ repräsentirte Linien schneiden, ist die

$$0=\varphi^{(1)}(y)\varphi^{(4)}(y+dy)+\varphi^{(4)}(y)\varphi^{(1)}(y+dy)+\varphi^{(2)}(y)\varphi^{(5)}(y+dy)+\varphi^{(5)}(y)\varphi^{(2)}(y+dy)$$
$$+\varphi^{(3)}(y)\varphi^{(6)}(y+dy)+\varphi^{(6)}(y)\varphi^{(3)}(y+dy).$$

Entwickeln wir hier die $\varphi(y+dy)$ und bedenken, dass der identischen Gleichung (15.) wegen,

$$(20.)\quad \begin{cases} \varphi^{(1)}\varphi_i^{(4)}+\varphi^{(4)}\varphi_i^{(1)}+\varphi^{(2)}\varphi_i^{(5)}+\varphi^{(5)}\varphi_i^{(2)}+\varphi^{(3)}\varphi_i^{(6)}+\varphi^{(6)}\varphi_i^{(3)} = 0, \\ \varphi^{(1)}\varphi_{ik}^{(4)}+\varphi^{(4)}\varphi_{ik}^{(1)}+\cdots+\varphi_i^{(1)}\varphi_k^{(4)}+\varphi_i^{(4)}\varphi_k^{(1)}+\cdots = 0, \end{cases}$$

so verschwinden die Glieder erster Ordnung und die Glieder zweiter Ordnung schreiben sich,

$$(21.)\quad \varphi_i^{(1)}\varphi_k^{(4)}+\varphi_k^{(1)}\varphi_i^{(4)}+\varphi_i^{(2)}\varphi_k^{(5)}+\varphi_k^{(2)}\varphi_i^{(5)}+\varphi_i^{(3)}\varphi_k^{(6)}+\varphi_k^{(3)}\varphi_i^{(6)} = a_{ik}$$

gesetzt,

$$(22.)\quad \sum_{i,k} a_{ik}\,dy_i\,dy_k = 0.$$

Setzen wir hier für die Verhältnisse der dy die Werthe, welche sich aus den Gleichungen

$$\Sigma f_i dy_i = 0, \quad \Sigma k_i dy_i = 0$$

ergeben, so erhalten wir in

$$(23.)\quad S=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & f_1 & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & f_2 & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f_3 & k_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

die Gleichung der Curve, welche $f=0$ in den Punkten schneidet, welchen singuläre Erzeugende entsprechen. Diese Gleichung enthält noch die Grössen k im zweiten Grade, und diese müssen in einem Factor abgesondert werden. Dass dies möglich ist, sieht man leicht ein. Denn bildet man, einen Ausdruck wie $a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3=a$ gesetzt, $S.l^2$, indem man der obigen Determinante noch die Zeilen

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l & 0 \end{matrix}$$

und die entsprechenden Colonnen zufügt, so kann man diese Gleichung leicht transformiren. Es dienen hierzu die aus (21.) wegen des Satzes der homogenen Functionen hervorgehenden identischen Gleichungen

$$(24.)\qquad \sum_i a_{ik}y_i=0,\qquad (k=1,2,3).$$

Die transformirte Determinante ist dann gleich $S'.k^2$, wo S' sich von S nur dadurch unterscheidet, dass die l an die Stelle der k getreten sind. Aus der Gleichung $S.l^2=S'.k^2$ folgt aber, dass $\frac{S}{k^2}$ von den k frei sein muss, w. z. b. w. Um den Factor $k^2=1$ wirklich abzusondern, bedarf es einer genaueren Untersuchung der Form der Grössen a_{ik}. Wir glauben diese hier um so mehr übergehen zu können, als die Untersuchung der Singularitäten von S sich leichter an die obige Form anschliesst, und die andere, von k^2 befreite Form, keine Vortheile bietet.

Die Curve $S=0$ ist von der Ordnung $2(m+n-3)$ und hat also $2n(m+n-3)$ Schnittpunkte mit $f=0$. Von diesen Punkten sind jedoch manche zu verwerfen. Hat zunächst die Curve $f=0$ einen βfachen Punkt, der kein Ausnahmspunkt ist, so hat S dort einen $(2\beta-2)$fachen Punkt, und die Anzahl der in diesem Punkte vereinigten Schnittpunkte beträgt somit $2\beta(\beta-1)$. Diese sind aber nicht zu zählen, weil sich in der entsprechenden Linie wohl unendlich nahe aber nicht aufeinanderfolgende Erzeugende schneiden.

Hat aber die Curve f einen αfachen Punkt in einem Ausnahmspunkt, so ist der Fall, dass dieser ein einfacher Punkt aller Curven $\varphi=0$ ist, von dem zu trennen, dass er ein vielfacher Punkt ist.

Im ersten der beiden Fälle wird S $(2\alpha-1)$fach Null, da, wie aus (20.) erhellt, a_{ik} daselbst Null wird. Um die Natur dieses Punktes zu erforschen, haben wir zu betrachten

$$\partial^{2a-1}S = \begin{vmatrix} \partial a_{11} & \partial a_{12} & \partial a_{13} & \partial^{a-1}f_1 & k_1 \\ \partial a_{21} & \partial a_{22} & \partial a_{23} & \partial^{a-1}f_2 & k_2 \\ \partial a_{31} & \partial a_{32} & \partial a_{33} & \partial^{a-1}f_3 & k_3 \\ \partial^{a-1}f_1 & \partial^{a-1}f_2 & \partial^{a-1}f_3 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen, welche die a_{ik} definiren, erkennen wir nun leicht, dass für einen Ausnahmspunkt die Gleichung Statt findet:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial y_h} + \frac{\partial a_{kh}}{\partial y_i} + \frac{\partial a_{hi}}{\partial y_k} = 0,$$

aus der sich die speciellen Fälle

$$\frac{\partial a_{hh}}{\partial y_h} = 0; \quad \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_i} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial a_{ii}}{\partial y_k}$$

ergeben.

Weil ferner für einen Ausnahmspunkt $a_{ik} = 0$, so hat man auch die Gleichung:

$$0 = \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_2} y_2 + \frac{\partial a_{ik}}{\partial y_3} y_3.$$

Berechnet man aus diesen Formeln die Werthe der Differentialquotienten, so findet man schliesslich

$$\begin{aligned} \partial a_{11} &= 2M(y_3 z_2 - y_2 z_3), & \partial a_{12} &= -My_3 z_1 + Ny_3 z_2 + (My_1 - Ny_2) z_3, \\ \partial a_{22} &= 2N(y_1 z_3 - y_3 z_1), & \partial a_{23} &= (Ny_2 - Py_3) z_1 - Ny_1 z_2 + Py_1 z_3, \\ \partial a_{33} &= 2P(y_2 z_1 - y_1 z_2), & \partial a_{31} &= My_2 z_1 + (Py_3 - My_1) z_2 - Py_2 z_3. \end{aligned}$$

Aus der identischen Gleichung $\Sigma a_{ik} y_i = 0$ folgt noch die Gleichung $\Sigma \partial a_{ik} y_i = 0$, deren Bestehen erfordert, dass

$$My_1 + Ny_2 + Py_3 = 0$$

sei. Dieser Gleichung genügend kann man setzen

$$M : N : P = A_2 y_3 - A_3 y_2 : A_3 y_1 - A_1 y_3 : A_1 y_2 - A_2 y_1.$$

Führt man nun die Werthe der ∂a_{ik} in $\partial^{2a-1}S$ ein, so findet sich dies

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & k_2\partial^{a-1}f_3 - k_3\partial^{a-1}f_2 \\ y_2 & z_2 & k_3\partial^{a-1}f_1 - k_1\partial^{a-1}f_3 \\ y_3 & z_3 & k_1\partial^{a-1}f_2 - k_2\partial^{a-1}f_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_1 & \partial^{a-1}f_1 & A_2 y_3 - A_3 y_2 \\ k_2 & \partial^{a-1}f_2 & A_3 y_1 - A_1 y_3 \\ k_3 & \partial^{a-1}f_3 & A_1 y_2 - A_2 y_1 \end{vmatrix}.$$

Reducirt man diese beiden Determinanten auf die bekannte Art, so findet sich endlich

$$(25.) \quad \partial^{2a-1}S = \partial^a f . (A_1\partial^{a-1}f_1 + A_2\partial^{a-1}f_2 + A_3\partial^{a-1}f_3) . k^2.$$

Die Curve S hat also im Ausnahmspunkt einen $(2\alpha-1)$fachen Punkt, von dessen Tangenten α mit denen des Punktes von f coincidiren. Dieser Punkt absorbirt somit $\alpha(\alpha+1)+\alpha(\alpha-1)=2\alpha^2$ Schnittpunkte, die nicht zu zählen sind.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass der Ausnahmspunkt ein ηfacher Punkt ist, wo $\eta \geqq 2$. Da, wie man aus (21.) sieht, die a_{ik} $(2\eta-2)$fach Null werden, so hat S einen $(2\eta+2\alpha-4)$fachen Punkt.

Um ihn genauer zu untersuchen, betrachten wir die Polare

$$\partial^{2\eta+2\alpha-4}S = \begin{vmatrix} \partial^{2\eta-2}a_{11} & \partial^{2\eta-2}a_{12} & \partial^{2\eta-2}a_{13} & \partial^{\alpha-1}f_1 & k_1 \\ \partial^{2\eta-2}a_{21} & \partial^{2\eta-2}a_{22} & \partial^{2\eta-2}a_{23} & \partial^{\alpha-1}f_2 & k_2 \\ \partial^{2\eta-2}a_{31} & \partial^{2\eta-2}a_{32} & \partial^{2\eta-2}a_{33} & \partial^{\alpha-1}f_3 & k_3 \\ \partial^{\alpha-1}f_1 & \partial^{\alpha-1}f_2 & \partial^{\alpha-1}f_3 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da nun die Gleichung

$$a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+a_{i3}y_3=0 \qquad (i=1,2,3)$$

eine identische ist, so gelten für den Ausnahmspunkt die Gleichungen

$$(26.) \qquad y_1\partial^{2\eta-2}a_{i1}+y_2\partial^{2\eta-2}a_{i2}+y_3\partial^{2\eta-2}a_{i3} = 0.$$

Aus der Gleichung

$$\partial^{2\eta-2}a_{ik} = \partial^{\eta-1}\varphi_i^{(1)}\partial^{\eta-1}\varphi_k^{(4)}+\partial^{\eta-1}\varphi_k^{(1)}\partial^{\eta-1}\varphi_i^{(4)}+\cdots,$$

die, wegen

$$\partial^{\eta-1}\varphi_i = \frac{\partial}{\partial z_i}\partial^\eta\varphi,$$

auch geschrieben werden kann:

$$\partial^{2\eta-2}a_{ik} = \frac{\partial}{\partial z_i}\partial^\eta\varphi^{(1)}\cdot\frac{\partial}{\partial z_k}\partial^\eta\varphi^{(4)}+\frac{\partial}{\partial z_i}\partial^\eta\varphi^{(4)}\cdot\frac{\partial}{\partial z_k}\partial^\eta\varphi^{(1)}+\cdots,$$

folgt nun

$$\Sigma z_i\partial^{2\eta-2}a_{ik} = \partial^\eta\varphi^{(1)}\frac{\partial}{\partial z_k}\partial^\eta\varphi^{(4)}+\partial^\eta\varphi^{(4)}\cdot\frac{\partial}{\partial z_k}\partial^\eta\varphi^{(1)}+\cdots.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist identisch Null, wie sich sogleich zeigt, wenn man die Operation $\partial^{2\eta}$ auf die identische Gleichung

$$\varphi^{(1)}\varphi^{(4)}+\varphi^{(2)}\varphi^{(5)}+\varphi^{(3)}\varphi^{(6)} = 0$$

anwendet, für die y die Coordinaten des Ausnahmspunktes setzt und dann nach z_k differentiirt. Wir haben also auch die Gleichungen

$$(27.) \qquad z_1\partial^{2\eta-2}a_{i1}+z_2\partial^{2\eta-2}a_{i2}+z_3\partial^{2\eta-2}a_{i3}=0 \qquad (i=1,2,3).$$

Wenn wir eine der Gleichungen (26.) mit der entsprechenden Gleichung (27.) verbinden, so können wir die Verhältnisse von

$$\partial^{2\eta-2}a_{11},\quad \partial^{2\eta-2}a_{22},\quad \partial^{2\eta-2}a_{33}$$

berechnen. Durch Vergleich der beiden Werthe von $\partial^{2\eta-2}a_{12}$, $\partial^{2\eta-2}a_{23}$, $\partial^{2\eta-2}a_{31}$ können wir die auftretenden Proportionalitätsfactoren bis auf einen bei allen Grössen gleichen Factor bestimmen und finden so endlich:

$$\partial^{2\eta-2}a_{11} = A(y_2z_3-y_3z_2)^2,\quad \partial^{2\eta-2}a_{12} = A(y_2z_3-y_3z_2)(y_3z_1-y_1z_3),$$
$$\partial^{2\eta-2}a_{22} = A(y_3z_1-y_1z_3)^2,\quad \partial^{2\eta-2}a_{23} = A(y_3z_1-y_1z_3)(y_1z_2-y_2z_1),$$
$$\partial^{2\eta-3}a_{33} = A(y_1z_2-y_2z_1)^2,\quad \partial^{2\eta-2}a_{31} = A(y_1z_2-y_2z_1)(y_2z_3-y_3z_2).$$

Hiermit wird

$$(28.)\qquad \partial^{2\eta+2\alpha-4}S = A\begin{vmatrix} z_1 & y_1 & k_2\partial^{\alpha-1}f_3-k_3\partial^{\alpha-1}f_2 \\ z_2 & y_2 & k_3\partial^{\alpha-1}f_1-k_1\partial^{\alpha-1}f_3 \\ z_3 & y_3 & k_1\partial^{\alpha-1}f_2-k_2\partial^{\alpha-1}f_1 \end{vmatrix}^2 = A.(\partial^\alpha f)^2.k^2.$$

Der Factor A ist von der Ordnung $2\eta-4$ in den z. Die Curve $S=0$ hat somit in dem betrachteten Punkte 2α Zweige, von deren Tangenten je zwei mit den Tangenten des Punktes von f übereinstimmen, und weitere $2\eta-4$ Zweige. Es fallen sonach in diesen Punkt $2\alpha^2+2\alpha+2\alpha\eta-4\alpha$ Schnittpunkte beider Curven. Die Anzahl der für unsern Zweck in Betracht kommenden Schnittpunkte, also die Anzahl der singulären Erzeugenden ist endlich:

$$2n(m+n-3)-\Sigma 2\beta(\beta-1)-2\Sigma\alpha^2-\Sigma(2\alpha^2+2\alpha+2\alpha\eta-4\alpha),$$

wo sich die erste Summe auf die vielfachen Punkte, welche keine Ausnahmspunkte sind, die zweite auf die einfachen und die dritte auf die vielfachen Ausnahmspunkte bezieht. Die obige Zahl ist nach (16.) und (17.) gleich

$$(29.)\qquad 2k+4(p-1).$$

Diese Zahl, welche mit der, im speciellen Falle des §. 5 gefundenen, übereinstimmt, gilt unter der Voraussetzung, dass die vielfachen Punkte von $f=0$ keine zusammenfallenden Tangenten besitzen, eine Voraussetzung, die aber bei allgemeinen Flächen ihrer Art stets von selbst eintreten wird.

§. 9. Die Geometrie im Strahlensystem erster Ordnung.

Als Beispiel für die in §. 6 angedeutete Behandlungsweise der Geometrie im Strahlensystem, wollen wir das Strahlensystem betrachten, welches entsteht durch den Schnitt zweier linearen Complexe.

Es seien

$$a = \Sigma a_i x_i = 0 \quad \text{und} \quad b = \Sigma b_i x_i = 0$$

die Gleichungen der beiden Complexe. Das Strahlensystem, welches sie erzeugen, ist identisch mit dem Schnitte der beiden Complexe

$$a + \lambda_1 b = 0, \quad a + \lambda_2 b = 0.$$

Wir wollen nun für λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung setzen:

$$(a_1 + \lambda b_1)(a_4 + \lambda b_4) + (a_2 + \lambda b_2)(a_5 + \lambda b_5) + (a_3 + \lambda b_3)(a_6 + \lambda b_6) = 0.$$

Jeder der beiden letzterwähnten Complexe stellt dann eine gerade Linie dar, und wir sehen also hieraus:

Alle Strahlen des Strahlensystems, welches der Schnitt zweier linearen Complexe ist, schneiden zwei gerade Linien.

Dass diese Linien sich im Allgemeinen nicht schneiden werden ist klar. Es ist leicht, von dieser Eigenschaft ausgehend die homogenen Functionen des §. 6 zu bilden. Legen wir zwei gegenüberliegende Kanten des Coordinatentetraeders in die beiden Geraden, welche wir mit A und B bezeichnen wollen, so sind die Coordinaten eines Punktes der Linie A etwa

$$0, \quad 0, \quad a_1, \quad \lambda a_2,$$

und eines Punktes der Linie B

$$b_1, \quad \mu b_2, \quad 0, \quad 0.$$

Bilden wir hieraus die Coordinaten ihrer Verbindungslinie und setzen $\frac{y_1}{y_3}$ für λ, $\frac{y_2}{y_3}$ für μ, so sind die Ausdrücke der Coordinaten

$$x_1 = 0, \; x_2 = a_1 b_1 y_3^2, \; x_3 = -a_2 b_1 y_1 y_3, \; x_4 = 0, \; x_5 = -y_1 y_2 a_2 b_2, \; x_6 = -a_1 b_2 y_2 y_3.$$

Wir sehen hieraus, dass die Punkte $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ und $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ einfache Ausnahmspunkte sind. In dem ersten dieser Punkte wird $\frac{y_1}{y_3}$ abhängig von der Richtung, in welcher man von ihm fortgeht; es entsprechen somit den Richtungen um diesen Punkt die Linien, welche man von dem Punkte b_2 der Linie B durch die Linie A ziehen kann. Ebenso entsprechen dem anderen Ausnahmspunkte die Geraden, welche sich von dem Punkte a_2 der Linie A durch die Gerade B legen lassen.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Linie $y_3 = 0$ in allen ihren Punkten nur die eine Linie $a_2 b_2$ darstellt, die wir künftig mit C bezeichnen wollen. Es ist hierbei beachtenswerth, dass C nur abhängig ist von der Wahl des Coordinatentetraeders nicht aber von der Natur des Strahlensystems.

Da zwei Linien des Systems sich nur auf einer der beiden Geraden A, B schneiden können, so ist klar, dass alle in diesem System gelegenen windschiefen Flächen keine anderen vielfachen Curven als diese Geraden haben können. Es ist ferner klar, dass auch keine Doppelerzeugende im Strahlensystem existiren.

Schneiden wir nun das System durch einen Complex von der N^{ten} Ordnung, so erhalten wir die der Schnittfläche entsprechende Curve, wenn wir die Werthe der x, wie sie oben durch die y ausgedrückt sind, eintragen in die Gleichung des Complexes. Es entsteht so eine Curve $2N^{ter}$ Ordnung, welche in den beiden Ausnahmspunkten Nfache Punkte hat.

So wird der Schnitt eines linearen Complexes dargestellt durch einen Kegelschnitt, welcher durch beide Ausnahmspunkte geht. Die entsprechende Fläche ist ein Hyperboloid. Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Fläche unendlich viele Geraden enthält, welche alle Erzeugenden schneiden. Ist nämlich $c=0$ die Gleichung des Complexes, durch dessen Schnitt mit a und b sie entsteht, so liegt jede ihrer Erzeugenden auch auf dem Complexe $\lambda_1 a+\lambda_2 b+\lambda_3 c=0$. Die Grössen λ lassen sich aber auf unendlich viele Arten so bestimmen, dass dieser Complex eine gerade Linie darstellt. Hiermit ist jener bekannte Satz bewiesen.

Der Schnitt eines Complexes zweiten Grades mit dem Strahlensystem ist eine Fläche vierter Ordnung von dem Geschlechte $p=1$, welche durch eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten in den Ausnahmspunkten dargestellt wird u. s. w.

Wir wollen jetzt umgekehrt untersuchen, welche Flächen durch gegebene Curven dargestellt werden. Der Grad einer Fläche, welche durch eine Curve n^{ter} Ordnung, die im Ausnahmspunkte $y_1=0$, $y_3=0$ einen αfachen, im anderen einen βfachen Punkt hat, repräsentirt wird, ist

$$k = 2n-\alpha-\beta.$$

Da hier jedem Werthe von $\frac{y_1}{y_3}$ $n-\alpha$ Werthe von $\frac{y_2}{y_3}$ entsprechen, so gehen durch jeden Punkt der Linie A $n-\alpha$ Erzeugende, so dass diese Linie $(n-\alpha)$fache Curve ist. Ebenso wird B $(n-\beta)$fache Curve. Ferner sieht man, dass jede durch B gelegte Ebene $(n-\alpha)$fache und jede Ebene durch A $(n-\beta)$fache Tangentenebene ist. Da weiter die Curve die Linie $y_3=0$ noch in $n-\alpha-\beta$ Punkten schneidet, welche sämmtlich der Linie C entsprechen, so ist diese Linie $(n-\alpha-\beta)$fache Erzeugende der Fläche.

Wenden wir dies an auf die oben betrachtete Schnittfläche des Systems mit einem Complexe N^{ter} Ordnung, so folgt:

> Eine windschiefe Fläche $2N^{ten}$ Grades, welche der vollständige Schnitt zweier linearen Complexe mit einem Complex N^{ten} Grades ist, hat zwei Nfache Curven, welche gerade Linien sind.

Wir bemerken noch, dass diese Fläche, von allen $2N^{ten}$ Grades, welche der vollständige Schnitt dreier Complexe sind, das höchste p besitzt: wie sich aus Formel (7.) §. 3 leicht ergiebt.

Im speciellen Falle, wo $N=2$, hat die Fläche vierter Ordnung, die beiden Geraden zu Doppelcurven. Wir bemerken noch, dass diese Fläche vierten Grades die einzige ist, für welche $p=1$ ist. Denn setzen wir in (8.) §. 3 $k=4$, $p=1$, $d=0$ so ergiebt sich $\delta=2$, und dass diese Curve nur aus zwei sich nicht schneidenden Geraden bestehen kann, wenn die Fläche eine eigentliche Fläche sein soll, ist klar.

Einer Geraden, welche durch einen Ausnahmspunkt geht, entspricht nun ein Strahlbüschel, welches von einem Punkte der einen der Linien A, B durch die andere gelegt ist.

Geht die Gerade nicht durch einen Ausnahmspunkt, so stellt sie ein Hyperboloid dar, welches, da die Gerade $y_3=0$ in einem Punkte geschnitten wird, die Linie C unter seinen Erzeugenden enthält. Da eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt und die Linie C willkürlich ist, so sehen wir, dass ein Hyperboloid durch drei Erzeugende bestimmt ist.

Ein Kegelschnitt, der durch beide Ausnahmspunkte geht, ist das Bild eines Hyperboloids, welches aber die Linie C nicht enthält. Da nun ein Kegelschnitt eine Curve zweiter Klasse ist, so giebt es zwei Hyperboloide, welche durch zwei Linien des Systems gehen und ein Hyperboloid, welches diese Linien nicht als Erzeugende enthält, in zwei aufeinanderfolgenden Linien schneiden.

Ein Kegelschnitt der durch einen Ausnahmspunkt geht, z. B. durch den $y_1=0$, $y_3=0$, stellt eine Fläche dritter Ordnung dar, welche in der Linie B eine Doppel- und in A eine einfache Curve besitzt. Die Linie C gehört zu den Erzeugenden der Fläche. Wir sehen hieraus, dass die Fläche durch 5 ihrer Erzeugenden bestimmt ist, wenn eine Linie, welche Doppelcurve und eine andere, die einfache Curve werden soll, gegeben ist.

Geht ein Kegelschnitt durch keinen Ausnahmspunkt, so ist die ent-

sprechende Fläche von der vierten Ordnung, A und B sind ihre Doppelcurven und C ist eine Doppelerzeugende.

Diese Fläche erscheint als specieller Fall der allgemeinen Fläche vierter Ordnung mit den Doppelcurven A und B, welche durch eine Curve dritter Ordnung dargestellt wird, die durch die Ausnahmspunkte geht. Für diese Fläche, welche mit der oben erwähnten identisch ist, ist $p=1$. Sie wird, wenn ihre Doppelcurven gegeben sind, durch acht Erzeugende bestimmt. Da eine Curve dritter Ordnung neun Wendepunkte hat, so giebt es neun Hyperboloide des Strahlensystems, welche durch eine gegebene Erzeugende der Fläche gehen und diese in drei auf einander folgenden Linien schneiden u. s. w.

Diese Beispiele werden hinreichen, um die Art der Uebertragung von Sätzen aus der Ebene zu zeigen und es wird leicht sein, diese Uebertragung vorzunehmen, besonders wenn man noch die projectivischen Beziehungen zwischen den windschiefen Flächen, für welche $p=0$ ist, einführt, auf welche die entsprechenden Curven, die ihre Bilder sind, hinweisen.

Mannheim, im November 1866.

Ueber Strahlensysteme der ersten Ordnung und der ersten Classe.

(Von Herrn *O. Hermes.*)

Die Erklärung eines Strahlensystems der ersten Ordnung und der ersten Classe als eines Systems von geraden Linien, von denen durch jeden Punkt im Raume nur eine einzige geht und ebenso in jeder Ebene nur eine einzige enthalten ist, genügt den Anforderungen nicht, welche man von Seiten der Geometrie an eine solche Definition stellt, insofern sie nicht unmittelbar auf die Bedingungen hinweist, unter denen man beispielsweise zu gegebenen Strahlen eines Systems neue Strahlen desselben zu ziehen hat. Bei denjenigen Strahlensystemen der ersten Ordnung und der ersten Classe — und von Systemen dieser Ordnung und Classe ist in dem Folgenden ausschliesslich die Rede, auch wenn Ordnung und Classe nicht besonders hervorgehoben sind, — deren Strahlen sämmtlich zwei bestimmte windschiefe Linien, die Leitlinien, durchschneiden, hat sich aus dieser Eigenschaft eine einfache geometrische Definition herleiten lassen. und bekanntlich sind derartige Systeme von *Steiner* in seiner *System. Entw.* §. 59 für seine Projectionstheorie benutzt worden: wenn man diese Strahlensysteme einer analytischen Behandlung unterzieht, so gelangt man zu dem eigenthümlichen Resultate, dass für gewisse andere Strahlensysteme die Leitlinien als imaginär anzusehen sind, oder vielmehr, dass bei der Darstellung von Strahlensystemen mit Zugrundelegung gemeinschaftlicher Leitlinien man diese Leitlinien als imaginär annehmen kann, ohne dass die sie durchschneidenden Geraden, also die Strahlen der betreffenden Systeme, aufhören reell zu sein. Diese Beziehung zu den Leitlinien ergiebt sich demnach als eine nur zufällige Eigenschaft der Strahlen eines Systems, und es scheint die Kenntniss solcher den Strahlen eines Systems charakteristischer geometrischer Eigenschaften, welche unabhängig von gewissen das Strahlensystem bestimmenden Bedingungen allen Strahlensystemen gleichmässig zukommen, zu einer allgemeinen rein geometrischen Definition derselben führen und ausserdem einfache Constructionen für die einem gegebenen Punkte oder einer gegebenen Ebene zukommenden Strahlen vermitteln, noch zu fehlen. Die folgenden Entwickelungen, welche ihren Ausgang von den oben erwähnten *Steiner*schen Untersuchungen nehmen, sind vielleicht geeignet, diese Lücke zu ergänzen. —

§. 1.

Gerade Linien, welche zwei gegebene windschiefe Gerade, die Leitlinien, durchschneiden, bilden ein Strahlensystem der ersten Ordnung und der ersten Classe; denn durch jeden Punkt im Raume, welcher nicht auf einer Leitlinie liegt, geht nur ein einziger Strahl, nämlich die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, welche durch diesen Punkt und die Leitlinien bestimmt sind, und ebenso liegt in jeder Ebene, welche nicht eine Leitlinie enthält, nur ein einziger Strahl des Systems, nämlich die Verbindungslinie der Schnittpunkte dieser Ebene mit den Leitlinien.

Zur Darstellung eines derartigen Strahlensystems kann man etwa als Leitlinien wählen die Durchschnitte der ganz beliebigen Ebenenpaare:

$$L_1: \begin{array}{l} t-lu \;\;= 0, \\ v-mw = 0, \end{array} \quad \text{und} \quad L_2: \begin{array}{l} t+lu \;\;= 0, \\ v+mw = 0, \end{array}$$

wo also die die erste Leitlinie enthaltenden Ebenen bezüglich conjugirt harmonisch sind zu den beiden die zweite Leitlinie enthaltenden Ebenen in Beziehung auf die Flächenpaare t, u und v, w des Coordinatentetraeders: alsdann werden durch die beiden Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} t-lu+\lambda(v-mw) = 0, \\ t+lu+\mu(v+mw) = 0, \end{cases}$$

für verschiedene Werthe von λ und μ gerade Linien dargestellt, welche die beiden Leitlinien L_1 und L_2 durchschneiden, also demselben Strahlensystem zugehören. Charakteristisch für diese Darstellung ist, dass, wenn in den Gleichungen der beiden Leitlinien L die Coefficienten l und m imaginär werden, sich für die Constanten λ und μ in den Gleichungen der sie durchschneidenden Geraden (1.) Werthe finden lassen, für welche diese Gleichungen noch einer reellen Geraden zugehören. Dies zeigt sich sofort aus den Gleichungen der durch die Linie (1.) und die Ecken des Coordinatentetraeders gelegten Ebenen, von denen jede zwei vereinigt die Linie (1.) darstellen, nämlich:

$$(2.)\quad \begin{cases} \qquad\qquad 2lu - (\lambda-\mu)v + (\lambda+\mu)mw = 0, \\ 2t \qquad\qquad + (\lambda+\mu)v - (\lambda-\mu)mw = 0, \\ (\lambda-\mu)t + (\lambda+\mu)lu \qquad + 2\lambda\mu\, mw = 0, \\ (\lambda+\mu)t + (\lambda-\mu)lu + 2\lambda\mu v \qquad = 0: \end{cases}$$

führt man in diese Gleichungen statt l und m bezüglich li und mi, oder einfacher i ein, so bleiben ihre Coefficienten entweder durchweg reell, oder es



hebt sich aus ihnen der Factor i weg, wenn λ und μ conjugirte complexe Werthe bedeuten, etwa

$$(3.)\qquad \lambda = \alpha-\beta i,\qquad \mu = \alpha+\beta i,$$

und es erhalten alsdann die Gleichungen (2.) die Form

$$(4.)\qquad \begin{cases} \quad\ \ u+\beta v+\alpha w = 0,\\ t\quad\ +\alpha v-\beta w = 0,\\ -\beta t+\alpha u\quad +(\alpha^2+\beta^2)w = 0,\\ \alpha t+\beta u+(\alpha^2+\beta^2)v\quad = 0; \end{cases}$$

diese Gleichungen drücken also reelle Ebenen aus, deren gemeinschaftliche Schnittlinie durch die beiden Gleichungen

$$(5.)\qquad \begin{cases} t-iu+(\alpha-\beta i)(v-iw) = 0,\\ t+iu+(\alpha+\beta i)(v+iw) = 0 \end{cases}$$

dargestellt wird. In der That nehmen auch diese Gleichungen durch Trennung der reellen und imaginären Theile die Form an:

$$(6.)\qquad \begin{cases} t+\alpha v-\beta w-i(u+\beta v+\alpha w) = 0,\\ t+\alpha v-\beta w+i(u+\beta v+\alpha w) = 0, \end{cases}$$

welche gleichbedeutend sind mit den ersten beiden Gleichungen des Systems (4.).

Nunmehr lässt sich auch umgekehrt zeigen, dass durch zwei Gleichungen von der Form (4.) bei veränderlichen Werthen von α und β allgemein die Strahlen eines Systems dargestellt werden:

Durch die Gleichungen einer geraden Linie

$$(7.)\qquad \begin{cases} t = \lambda v+\lambda_1 w,\\ u = \mu v+\mu_1 w \end{cases}$$

werden nämlich für veränderliche Werthe der Constanten λ, λ_1, μ, μ_1 die Strahlen eines Systems der ersten Ordnung und der ersten Classe dargestellt, wenn zwischen diesen Constanten ausserdem zwei Gleichungen des ersten Grades stattfinden, wie etwa

$$(8.)\qquad \begin{cases} \lambda_1 = a\lambda+b\mu+c,\\ \mu_1 = a_1\lambda+b_1\mu+c_1, \end{cases}$$

und es wird durch die Werthe der Coefficienten a, b, c, a_1, b_1, c_1 das Strahlensystem definirt. Wenn man nämlich zu diesen beiden Gleichungen noch die Bedingungen hinzufügt, dass der Strahl (7.) durch einen bestimmten Punkt P gehen oder in einer bestimmten Ebene E liegen soll, so hat man

20*

zur Bestimmung der vier Constanten in (7.) grade die erforderliche Anzahl von Gleichungen. Diese Bestimmung ist eine eindeutige, wenn man von besonderen Lagen der Punkte P oder der Ebene E absieht, es führen aber grade diese besonderen Lagen zu einer einfacheren Form der Gleichungen (8.) und demnach auch zu einer zweckmässigeren Darstellung der Strahlen des Systems.

Die Constanten c und c_1 zunächst bedingen eine besondere Lage desjenigen Strahls, welcher den Werthen $\lambda = 0$, $\mu = 0$ zugehört: derselbe wird nämlich

$$t = cw, \quad u = c_1 w,$$

also eine ganz bestimmte Gerade durch den Eckpunkt tuw. Nimmt man für c und c_1 die Werthe Null an, so fällt dieser Strahl mit der tu-Kante zusammen und der den Werthen $\lambda = \infty$ und $\mu = \infty$ entsprechende Strahl mit der vw-Kante, und wenn c und c_1 beliebig gegebene Werthe haben, so kann man stets durch eine bestimmte Drehung der t- und u-Ebenen bezüglich um die tw- und uw-Kante, nämlich indem man als neue Coordinatenebenen

$$t' = t - cw \qquad \text{und} \qquad u' = u - c_1 w$$

einführt, bewirken, dass die neuen tu- und vw-Kanten Strahlen des Systems werden. In der Folge sind die Constanten c und c_1 gleich Null angenommen.

Bestimmt man ferner die Werthe der beiden Constanten λ und μ aus den Bedingungen dafür, dass der Strahl (7.) durch den beliebig gegebenen Punkt

$$P: \quad \frac{t}{t_1} = \frac{u}{u_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{w}{w_1}$$

geht, welche sind $t_1 = \lambda v_1 + \mu w_1$ und $u_1 = \lambda_1 v_1 + \mu_1 w_1$, indem man λ_1 und μ_1 vermittelst der Gleichungen (8.) eliminirt, so wird der gemeinschaftliche Nenner in den Ausdrücken für λ und μ:

$$(9.) \qquad N = (v_1 + a w_1)(v_1 + b_1 w_1) - a_1 b w_1^2.$$

Wenn derselbe verschwindet, so treten besondere Lagen für den durch P gehenden Strahl des Systems ein und kann dieser Strahl im Besonderen seiner Richtung nach unbestimmt werden: alsdann liegt aber der Punkt P, bei Annahme veränderlicher Werthe von v_1 und w_1, auf zwei bestimmten, reellen oder imaginären Ebenen E_1 und E_2, deren System durch die Gleichung $N = 0$ dargestellt ist. Diese beiden Ebenen haben die tu-Kante zu ihrer, immer reellen Durchschnittslinie, und bestimmen auf jedem Strahl des Systems zwei

reelle oder imaginäre Punkte, welche durch die Gleichung $N=0$ und die Gleichungen des betreffenden Strahls dargestellt werden. Eine einfache Rechnung ergiebt, dass bei dieser Darstellung die Gleichung $N=0$ sich durch die Gleichung

$$(9^a.)\qquad bu^2+(a-b_1)tu-a_1t^2 = 0$$

ersetzen lässt. Diese beiden Gleichungen (9.) und (9^a.) zeigen, dass wenn man die beiden Substitutionscoefficienten a und b_1 einander gleich setzt, die beiden Punkte, welche die besonderen Ebenen (9.) auf den Strahlen des Systems ausschneiden, conjugirt harmonisch sind zu den Punkten, welche die der tu-Kante zugehörigen Coordinatenebenen auf den Strahlen bestimmen, und es findet sich umgekehrt, dass wenn man die Coordinatenebenen durch die tu-Kante so legt, dass sie die eben bemerkte Beziehung zu den Schnittpunkten der besonderen Ebenen (9.) mit den Strahlen des Systems haben, alsdann nothwendig die Coefficienten a und b_1 einander gleich sind. Man kann darum, ohne der Allgemeinheit des Strahlensystems Eintrag zu thun, diese Transformation der Coordinaten als von vornherein ausgeführt annehmen, d. h. die Constanten a und b_1 als gleichwerthig einführen.

Das gleiche Resultat ergiebt sich, wenn man den Strahl (7.) seiner Lage nach so bestimmen will, dass er in der bestimmten, übrigens beliebig gegebenen, Ebene

$$E:\quad \frac{t}{t_1}+\frac{u}{u_1}+\frac{v}{v_1}+\frac{w}{w_1} = 0$$

enthalten ist.

Nimmt man nunmehr gleiche Werthe für die Coefficienten a und b_1 an, so werden die allgemeinen Gleichungen (7.) der Strahlen des Systems vermöge der Gleichungen (8.):

$$t = \lambda(v+aw)+\mu bw,$$
$$u = \mu(v+aw)+\lambda a_1 w;$$

also wenn man noch die neue Coordinatenebene $v+aw=v'$ einführt, wo auch der Index entbehrlich ist, und wenn man ferner statt λ, μ, b und a_1 bezüglich $\alpha\lambda$, $\gamma\mu$, $\frac{\beta}{\gamma}$ und $\frac{\delta}{\alpha}$ setzt, so erhält man als die allgemeinen Gleichungen der Strahlen des Systems:

$$(10.)\qquad \begin{cases} t = \alpha\lambda v+\beta\mu w, \\ u = \gamma\mu v+\delta\lambda w, \end{cases}$$

wo die Coefficienten α, β, γ, δ das Strahlenystem als solches charakterisiren,

also für ein gegebenes System bestimmte Werthe beibehalten, den Constanten λ und μ aber für die verschiedenen Strahlen des Systems verschiedene Werthe zukommen.

Dividirt man die erste der Gleichungen (10.) durch $\sqrt{\alpha\beta}$ und die zweite durch $\sqrt{\gamma\delta}$, so erhält man durch Subtraction und Addition der entstehenden Gleichungen:

$$\frac{t}{\sqrt{\alpha\beta}}-\frac{u}{\sqrt{\gamma\delta}} = (\sqrt{\alpha\delta}.\lambda-\sqrt{\beta\gamma}.\mu)\left(\frac{v}{\sqrt{\beta\delta}}-\frac{w}{\sqrt{\alpha\gamma}}\right),$$
$$\frac{t}{\sqrt{\alpha\beta}}+\frac{u}{\sqrt{\gamma\delta}} = (\sqrt{\alpha\delta}.\lambda+\sqrt{\beta\gamma}.\mu)\left(\frac{v}{\sqrt{\beta\delta}}+\frac{w}{\sqrt{\alpha\gamma}}\right),$$

aus welchen Gleichungen hervorgeht, dass der Strahl (10.) die beiden Linien

$$(11.)\quad \begin{cases}\frac{t}{\sqrt{\alpha\beta}}-\frac{u}{\sqrt{\gamma\delta}}=0,\\ \frac{v}{\sqrt{\beta\delta}}-\frac{w}{\sqrt{\alpha\gamma}}=0,\end{cases}\quad \text{und}\quad \begin{cases}\frac{t}{\sqrt{\alpha\beta}}+\frac{u}{\sqrt{\gamma\delta}}=0,\\ \frac{v}{\sqrt{\beta\delta}}+\frac{w}{\sqrt{\alpha\gamma}}=0\end{cases}$$

durchschneidet, welche unabhängig sind von den Constanten λ und μ und demnach für die Strahlen des Systems (10.) die Stelle der Leitlinien einnehmen. Diese Leitlinien sind reell oder imaginär, jenachdem $\frac{\beta}{\gamma}$ und $\frac{\delta}{\alpha}$ dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen haben. Weil die Lage der Leitlinien (11.) nur von den Quotienten $\frac{\beta}{\gamma}$ und $\frac{\delta}{\alpha}$ abhängt und dasselbe demnach auch für die durch die Gleichungen (10.) dargestellten Strahlen des Systems stattfindet, soll weiterhin dieses Strahlensystem kurz *das System* $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ genannt werden.

Um die entsprechenden Resultate für *Parallelcoordinaten* zu erhalten, empfiehlt es sich, diese Verhältnisse $\frac{\beta}{\gamma}$ und $\frac{\delta}{\alpha}$ bezüglich durch a und b zu ersetzen, wenn man alsdann ausserdem statt $\frac{t}{w}$, $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, λ und μ bezüglich x, y, z, $\frac{\lambda}{\alpha}$ und $\frac{\mu}{\gamma}$ einführt, so werden für diese Coordinaten die *Gleichungen eines beliebigen Strahls des Systems* (a, b)

$$(12.)\quad \begin{cases} x = \lambda z+\mu a,\\ y = \mu z+\lambda b,\end{cases}$$

für veränderliche Werthe von λ und μ und constante Werthe von a und b, und die Gleichungen der Leitlinien

$$(13.)\quad \begin{cases}\frac{x}{\sqrt{a}}-\frac{y}{\sqrt{b}}=0,\\ z-\sqrt{ab}=0,\end{cases}\quad \text{und}\quad \begin{cases}\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{y}{\sqrt{b}}=0,\\ z+\sqrt{ab}=0.\end{cases}$$



Man sieht zugleich, dass wenn man umgekehrt zur Darstellung eines Strahlensystems von den Leitlinien ausgehen will, in (13.) die einfachste Form für die Gleichungen der beiden windschiefen Leitlinien gewonnen ist, da für dieselben unter Zugrundelegung rechtwinkliger Parallelcoordinaten der Anfangspunkt der Coordinaten der Mittelpunkt ihres kürzesten Abstandes wird, während die xz- und yz-Ebene den Winkel der beiden Leitlinien halbiren.

Man kann demnach zur allgemeinen Definition der Strahlen eines einfachen Systems zwar die Bedingung festhalten, dass diese Strahlen zwei gegebene windschiefe Gerade, die Leitlinien, durchschneiden sollen, hat aber alsdann die beiden Fälle wesentlich zu unterscheiden, ob diese Leitlinien reell oder imaginär sind. Im letzteren Falle hat die Definition keine geometrische Bedeutung mehr; es wird sich jedoch zeigen, dass auch auf diesen Fall sich gewisse Eigenschaften der Strahlen mit reellen Leitlinien ungeändert übertragen lassen, aus denen sich später ganz allgemeine Definitionen der Strahlen von Systemen der ersten Ordnung und der ersten Classe ergeben werden.

§. 2.

Unter den durch die allgemeinen Gleichungen (10.) des vorigen Paragraphen für verschiedene Werthe von λ und μ und bestimmte Werthe von $\frac{\beta}{\gamma}$ und $\frac{\delta}{\alpha}$ dargestellten Strahlen des Systems $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ sind zunächst einige besondere Strahlen hervorzuheben und es mag dazu der den besonderen Werthen der beiden Parameter λ und μ zugehörige Strahl kurz *der Strahl* (λ, μ) heissen. Für die Werthe $\lambda = 0$, $\mu = 0$ und $\lambda = \infty$, $\mu = \infty$ ergeben sich, wie bereits vorhin erwähnt worden ist, als zum System gehörig die Strahlen $(0, 0)$ und (∞, ∞), nämlich

$$(1.)\quad \begin{cases} t = 0, \\ u = 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad (2.)\quad \begin{cases} v = 0, \\ w = 0, \end{cases}$$

d. h. zwei bestimmte Gegenkanten des Coordinatentetraeders; ausserdem sind die Strahlen $(1, 0)$ und $(0, 1)$:

$$(3.)\quad \begin{cases} t = \alpha v, \\ u = \delta w, \end{cases} \quad \text{und} \quad (4.)\quad \begin{cases} t = \beta w, \\ u = \gamma v. \end{cases}$$

Als Strahlen desselben Systems sind diese vier Geraden windschief; dass sie aber nicht auf demselben Hyperboloid liegen, folgt unmittelbar aus den Gleichungen der durch die beiden ersten Strahlen und bezüglich den dritten und vierten Strahl bestimmten Hyperboloide:

$$(5.)\quad \delta tw - \alpha uv = 0, \quad \text{und} \quad (6.)\quad \gamma tv - \beta uw = 0,$$

aus denen sich allgemein für die Generatrices desselben Systems die Gleichungen ergeben:

$$(7.)\quad \begin{cases} t = k\alpha v \\ u = k\delta w \end{cases} \qquad \text{und bezüglich} \qquad (8.)\quad \begin{cases} t = h\beta w, \\ u = h\gamma v, \end{cases}$$

wo k und h als veränderliche Parameter zu betrachten sind.

Die Hyperboloide (5.) und (6.) sind beide dem Coordinatentetraeder umschrieben und zwar so, dass sie ausser den beiden Gegenkanten tu und vw desselben noch zwei Gegenkanten enthalten, das erste nämlich die Gegenkanten tv und uw, das zweite die Gegenkanten tw und uv. Bezeichnet man die Ecken uvw, vwt, wtu, tuv des Coordinatentetraeders bezüglich kurz durch T, U, V, W, so ergiebt sich hieraus, dass, wenn man auf dem Hyperboloid (5.) den Eckpunkt W geradlinig mit der Kante TU oder (2.) verbindet und den Fusspunkt U dieser Verbindungslinie alsdann weiter auf dem Hyperboloid (6.) geradlinig mit der Kante VW oder (1.), man zu demselben Punkte V dieser Kante gelangt, als wenn man zuerst den Punkt W auf dem Hyperboloid (6.) mit der Kante (2.) verbindet und vom Fusspunkte T alsdann auf (5.) geradlinig zur Kante (1.) zurückkehrt. Es haben also die vier windschiefen Geraden (1.) bis (4.) eine solche Lage zu einander und zum Coordinatentetraeder, dass, wenn man von einem der auf den Kanten VW oder TU, d. h. auf den Geraden (1.) oder (2.), liegenden Eckpunkte, z. B. von W aus, geradlinig über die Linie (3.) hinaus zur Linie (2.) geht in U, dann ohne abzusetzen über (4.) geradlinig zur Linie (1.) zurückkehrt in V, weiter von da aus geradlinig über (3.) sich wieder zur Linie (2.) wendet in T, man endlich von T aus die Linie (4.) durchschneidend auf der Linie (1.) wieder im Anfangspunkte W eintrifft; oder wenn man sich die eben betrachtete gebrochene Linie $WUVTW$ als einen Faden vorstellt, so lässt sich die Lage der vier Strahlen kürzer folgendermassen beschreiben: man kann von einem der auf (1.) oder (2.) liegenden Ecken des Coordinatentetraeders aus, z. B. von W auf (1.) aus, einen Faden ausspannen die Linie (3.) berührend bis zur Linie (2.) in U, weiter die Linie (4.) berührend bis zur Linie (1.) in V, dann die Linie (3.) berührend bis zur Linie (2.) in T und endlich die Linie (4.) berührend bis zur Linie (1.) und gelangt dann auf dieser zum Ausgangspunkte W; oder noch kürzer: *von W aus auf der Linie* (1.) *lässt sich ein windschiefes Vierseit über die Linien* (1.) *und* (2.) *festspannen, so dass es mit den Gegenseiten die Linien* (3.) *und* (4.) *durchschneidet.*

Es möge noch bemerkt werden, dass bei dieser Construction die Linien (3.) und (4.) bezüglich durch jede der Linien (7.) und (8.), d. h. durch jede andere Generatrix derselben Art bezüglich der Hyperboloide (5.) und (6.) ersetzt werden können. Es kommt jedoch diese Beziehung der Linien (1.) und (2.) zu den Generatrices derselben Art der beiden Hyperboloide (5.) und (6.) nicht auch diesen Linien in Verbindung mit irgend zwei anderen Strahlen des Systems $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ zu, während sich andererseits dieselbe für die Linien (1.), (2.) und (3.), (4.) oder (7.), (8.) nicht auf die besondere Lage des Coordinatentetraeders beschränkt, wie die folgende Untersuchung ergiebt.

Es sei ausser den beiden ersten Strahlen (1.) und (2.), oder $(0,0)$ und (∞, ∞), des Systems $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ ein beliebiger dritter Strahl (λ, μ) gegeben, nämlich

$$(9.)\qquad \begin{cases} t = \alpha\lambda v + \beta\mu w, \\ u = \gamma\mu v + \delta\lambda w: \end{cases}$$

wenn man jetzt von einem beliebig auf dem Strahl $(0,0)$ angenommenen Punkte p aus:

$$(10.)\qquad p:\quad t = u = 0,\quad \frac{v}{v_1} - \frac{w}{w_1} = 0,$$

über den Strahl (λ, μ) hin die gerade Linie zieht bis zum Strahl (∞, ∞), so wird dieser im Punkte q_0 getroffen:

$$(11.)\qquad q_0:\quad v = w = 0,\quad \frac{t}{u} = \frac{\alpha\lambda v_1 + \beta\mu w_1}{\gamma\mu v_1 + \delta\lambda w_1};$$

und wenn man umgekehrt von einem beliebig auf dem Strahl (∞, ∞) gegebenen Punkte q aus:

$$(12.)\qquad q:\quad v = w = 0,\quad \frac{t}{t_1} - \frac{u}{u_1} = 0,$$

über den Strahl (λ, μ) hin die Verbindungsgerade mit dem Strahl $(0,0)$ zieht, so ist deren Fusspunkt auf dem letzteren der Punkt p_0:

$$(13.)\qquad p_0:\quad t = u = 0,\quad \frac{v}{w} = \frac{\delta\lambda t_1 - \beta\mu u_1}{\alpha\lambda u_1 - \gamma\mu t_1}.$$

Weil die für q_0 und p_0 gewonnenen Ausdrücke (11.) und (13.) nur das Verhältniss von λ und μ enthalten, also beim Festhalten eines constanten Werthes dieses Verhältnisses bei Annahme veränderlicher Werthe für λ und μ dieselben bleiben, so gilt dasselbe für die Punkte p_0 und q_0: daraus folgt, dass alsdann der Strahl (λ, μ) auf einem bestimmten Hyperboloid, welches sich

kurz als *das Hyperboloid* $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ bezeichnen lässst, liegen muss; in der That enthält die Gleichung dieses durch die Strahlen (0, 0), (∞, ∞) und (λ, μ) bestimmten Hyperboloids:

$$(14.)\qquad \lambda(\delta tw - \alpha uv) - \mu(\beta uw - \gamma tv) = 0,$$

die Parameter λ und μ nur in ihrem Verhältniss.

Es soll nunmehr ausser dem Strahl (λ, μ) noch ein neuer, ganz beliebiger Strahl (λ_1, μ_1) in Betracht gezogen werden und der leichteren Uebersicht wegen mögen die Strahlen (λ, μ) und (λ_1, μ_1) bezüglich durch (3.) und (4.), die Strahlen (0, 0) und (∞, ∞) wie früher durch (1.) und (2.) bezeichnet werden. Verbindet man den auf dem Strahl (2.) gelegenen Punkt q_0 über den Strahl (4.) hinaus geradlinig mit dem Strahl (1.), so giebt diese Verbindungslinie auf (1.) den Punkt

$$p_{3,4}:\quad t = u = 0;\quad \frac{v}{w} = \frac{\delta\lambda_1(\alpha\lambda v_1 + \beta\mu w_1) - \beta\mu_1(\gamma\mu v_1 + \delta\lambda w_1)}{\alpha\lambda_1(\gamma\mu v_1 + \delta\lambda w_1) - \gamma\mu_1(\alpha\lambda v_1 + \beta\mu w_1)},$$

oder

$$(15.)\qquad t = u = 0;\quad \frac{v}{w} = \frac{Bv_1 - \beta\delta A w_1}{Bw_1 - \alpha\gamma A v_1},$$

wo zur Abkürzung

$$(16.)\qquad \lambda\mu_1 - \lambda_1\mu = A,\quad \alpha\delta\lambda\lambda_1 - \beta\gamma\mu\mu_1 = B$$

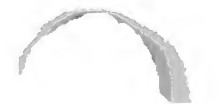
gesetzt sind und der Doppelindex (3, 4) die Bedeutung haben soll, dass der Punkt $p_{3,4}$ auf (1.) erhalten wird, indem man durch einen zusammenhängenden Zug den Punkt p zuerst geradlinig über (3.) hinaus mit (2.) und dann weiter geradlinig über (4.) hinaus mit (1.) verbindet. Wenn man nunmehr den umgekehrten Weg verfolgt, nämlich den Punkt p zuerst geradlinig über (4.) hinaus mit (2.) verbindet und dann weiter geradlinig über (3.) hinaus zur Linie (1.) zurückkehrt, so gelangt man auf dieser zum Punkte

$$(17.)\qquad p_{4,3}:\quad t = u = 0,\quad \frac{v}{w} = \frac{Bv_1 + \beta\delta A w_1}{Bw_1 + \alpha\gamma A v_1}.$$

Wie sich durch Vergleichung der Ausdrücke (15.) und (17.) ergiebt, sind die Punkte $p_{3,4}$ und $p_{4,3}$ im Allgemeinen verschieden; damit diese beiden Punkte zusammenfallen, muss die Bedingung erfüllt werden:

$$(18.)\qquad A.B.\left(\frac{v_1^2}{\beta\delta} - \frac{w_1^2}{\alpha\gamma}\right) = 0;$$

es müssen also die Gleichungen des Punktes p (10.), wenn man zunächst von besonderen Lagen der Strahlen (λ, μ) und (λ_1, μ_1) absieht, eine der beiden Formen:



$$t = u = 0, \quad \frac{v}{\sqrt{\beta\delta}} - \frac{w}{\sqrt{\alpha\gamma}} = 0,$$

oder

$$t = u = 0, \quad \frac{v}{\sqrt{\beta\delta}} + \frac{w}{\sqrt{\alpha\gamma}} = 0$$

haben und muss demnach den Gleichungen (11.), §. 1 entsprechend der Punkt p auf einer der Leitlinien des Systems liegen, sobald diese reell sind. Dieses Resultat findet hier eine neue Bestätigung dadurch, dass, je nachdem $\frac{v_1}{w_1}$ den Werth $\pm\sqrt{\frac{\beta\delta}{\gamma\alpha}}$ hat, sich auch für die Punkte $p_{3,4}$ und $p_{4,3}$ ergiebt

$$\frac{v}{w} = \pm\sqrt{\frac{\beta\delta}{\gamma\alpha}},$$

so dass also diese Punkte mit p zusammenfallen, was nicht anders geschehen kann, als wenn auch die beiden von p aus bezüglich über die Linien (3.) und (4.) hinaus gezogenen Geraden identisch werden; in der That ergiebt sich auch unter dieser Voraussetzung für den Punkt q_0 (11.) die Darstellung

$$v = w = 0; \quad \frac{t}{u} = \pm\sqrt{\frac{\beta\alpha}{\gamma\delta}};$$

es liegt also auch dieser Punkt (vergl. §. 1, Gl. (11.)) auf einer der Leitlinien des Systems.

Man hat also den Satz:

Im Allgemeinen lässt sich beliebig gegebenen vier windschiefen Geraden nicht ein Tetraeder einschreiben, so dass zwei derselben mit einem Paar Gegenkanten des Tetraeders zusammenfallen und die beiden anderen durch die übrigen Gegenkantenpaare durchschnitten werden.

Ausserdem aber gestattet die Gleichung (18.) noch anderweitige Folgerungen für besondere Lagen der Strahlen (λ, μ) und (λ_1, μ_1): weil nämlich die Ausdrücke für A und B (16.) die Constanten v_1 und w_1 gar nicht enthalten, so wird die Gleichung (18.) durch beliebige Werthe von v_1 und w_1 erfüllt, sobald einer der Ausdrücke A und B verschwindet; für jede dieser Annahmen also lässt sich eine Linie als Vierseit über die Linien (1.) und (2.) festspannen, so dass dasselbe mit den Gegenseiten die Linien (3.) und (4.) durchschneidet, welchen Punkt p der Linie (1.) man als Eckpunkt wählen mag.

Wenn erstens A verschwindet, d. h. wenn die Verhältnisse $\frac{\lambda}{\mu}$ und $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ übereinstimmen, also, wie vorhin bemerkt worden ist, die Strahlen (λ, μ)

und (λ_1, μ_1) auf demselben Hyperboloid mit (1.) und (2.) liegen, so fallen die Punkte $p_{3,4}$ und $p_{4,3}$ mit dem Anfangspunkte p zusammen. Die zweite Annahme, $B = 0$, führt zu der Gleichung:

$$(19.) \qquad \frac{\lambda\lambda_1}{\mu\mu_1} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}.$$

Diese Gleichung stellt nur eine Beziehung zwischen den Verhältnissen $\frac{\lambda}{\mu}$ und $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ dar und bleibt darum ungeändert, wenn man die Linien (3.) oder (4.) durch eine beliebige Generatrix derselben Art des bezüglich durch die Linien (1.), (2.) und (3.) oder (1.), (2.) und (4.) bestimmten Hyperboloids, d. h. eines der Hyperboloide $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ oder $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$ ersetzt, welche Generatrices sämmtlich sich als zu demselben Strahlensystem $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ gehörig ergeben haben. Man hat darum den Satz:

Zu jeden drei beliebig gegebenen windschiefen Geraden (1.), (2.) *und* (3.) *lassen sich unzählig viele vierte windschiefe Gerade* (4.) *finden, so dass man von einem beliebigen Punkte der Linien* (1.) *oder* (2.) *aus ein Vierseit über die Linien* (1.) *und* (2.) *festspannen kann, durch dessen Gegenseiten die Linien* (3.) *und* (4.) *durchschnitten werden.*

Die sämmtlichen Linien (4.) *liegen auf einem bestimmten Hyperboloide* $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$, *welches auch die Linien* (1.) *und* (2.) *als Generatrices derselben Art enthält, und ebenso lässt sich die Linie* (3.) *durch eine beliebige Generatrix derselben Art des Hyperboloids* $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ *ersetzen, welches durch die Linien* (1.), (2.) *und* (3.) *bestimmt ist.*

Alle diese Generatrices der beiden Hyperboloide $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ *und* $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$ *gehören als Strahlen einem und demselben Systeme* $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ *an, und die Verhältnisse* $\frac{\lambda}{\mu}$ *und* $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ *sind verbunden durch die Gleichung:*

$$\frac{\lambda\lambda_1}{\mu\mu_1} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}.$$

Oder:

Durch zwei Gegenkanten (1.) *und* (2.) *eines Tetraeders und zwei die anderen Gegenkanten paarweise durchschneidende Gerade* (3.) *und* (4.) *lassen sich unzählig viele neue Tetraeder legen, von denen ebenfalls zwei Gegenkanten mit* (1.) *und* (2.) *zusammenfallen und die anderen Ge-*

genkantenpaare durch die Linien (3.) *und* (4.) *durchschnitten werden; dieselbe Eigenschaft kommt den Geraden* (1.) *und* (2.) *in Verbindung mit jeder Generatrix derselben Art, einmal des Hyperboloids durch* (1.), (2.) *und* (3.), *und dann des Hyperboloids durch* (1.), (2.) *und* (4.) *zu. Alle diese Generatrices gehören zu demselben, durch die Geraden* (1.), (2.), (3.) *und* (4.) *als Fundamentalstrahlen bestimmten Strahlensystem.*

Ferner, weil der Gleichung (19.) mit jedem ganz beliebig angenommenen Werthe für $\frac{\lambda}{\mu}$ Genüge geschehen kann:

Ueber jede zwei Strahlen (1.) *und* (2.) *eines Systems als Fundamentallinien lassen sich unzählig viele Vierseite festspannen, deren Gegenseiten paarweise durch zwei beliebige andere Strahlen* (3.) *und* (4.) *des Systems durchschnitten werden, von denen der eine, z. B.* (3.), *ganz beliebig ist und der andere* (4.) *alsdann mit* (1.) *und* (2.) *einem bestimmten Hyperboloid* $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$ *zugehört, welches mit dem durch die beiden Fundamentallinien und* (3.) *bestimmten Hyperboloid* $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ *verbunden ist durch die Gleichung* (19.).

§. 3.

Der Entwickelung weiterer geometrischer Eigenschaften eines Strahlensystems mag eine kurze Bemerkung vorangehen über die durch die Strahlen desselben zu drei bestimmten Hyperboloide.

Die Strahlen eines Systems sind, weil durch jeden Punkt des Raumes nur ein einziger Strahl geht, sämmtlich windschiefe Linien, und darum wird durch je drei von ihnen als Generatrices desselben Systems ein Hyperboloid bestimmt. Ein beliebiger vierter Strahl kann dieses Hyperboloid entweder in zwei reellen oder imaginären Punkten durchschneiden, oder berühren oder auch ganz auf dem Hyperboloid liegen. Im ersten Falle sind die Generatrices der zweiten Art durch die beiden Schnittpunkte zwei alle vier Strahlen des Systems durchschneidende gerade Linien, und, wie sich im vorigen Paragraphen ergab, die Leitlinien für das ganze Strahlensystem; der zweite Fall tritt bei Strahlensystemen mit imaginären Leitlinien ein. Für beide Annahmen ist durch die vier Strahlen das ganze Strahlensystem bestimmt. Wenn aber die vier Strahlen auf demselben Hyperboloid liegen oder das durch drei derselben bestimmte Hyperboloid durch den vierten Strahl berührt wird, so reichen dieselben zur Bestimmung aller übrigen Strahlen des Systems nicht aus.

Es sei zunächst der Fall angenommen, dass sich durch die vier beliebig als Fundamentalstrahlen des Systems gegebenen windschiefen Geraden reelle Durchschnittsgerade, die beiden Leitlinien L und L_1, legen lassen, so ergiebt sich sofort, dass

I. *die Polarebenen eines beliebig gegebenen Punktes in Beziehung auf die vier durch die vier gegebenen Geraden zu drei bestimmten Hyperboloide durch denselben Punkt gehen;*

denn zieht man durch den gegebenen Punkt P diejenige Gerade, welche die beiden Leitlinien L und L_1 durchschneidet, so kann man die Schnittpunkte S und S_1 zugleich als die gemeinschaftlichen Schnittpunkte der durch die vier Hyperboloide von P aus gezogenen gemeinschaftlichen Sehne PSS_1 ansehen, und der zu P in Beziehung auf S und S_1 conjugirte harmonische Punkt P' gehört darum gleichzeitig jeder der vier Polarebenen des Punktes P in Beziehung auf die vier Hyperboloide an.

Ebenso lässt sich unter Voraussetzung reeller gemeinschaftlicher Leitlinien L und L_1 leicht zeigen, dass

II. *die Pole einer beliebig gegebenen Ebene in Beziehung auf die durch die vier windschiefen Geraden zu drei bestimmten vier Hyperboloide auf derselben Ebene liegen;*

denn verbindet man die beiden Punkte, in welchen die gegebene Ebene E die den vier Hyperboloiden gemeinschaftlichen beiden Generatrices der zweiten Art L und L_1 durchschneidet, durch die gerade Linie K, so sind durch K und bezüglich die Linien L und L_1 zwei allen vier Hyperboloiden gemeinschaftliche Tangentialebenen T und T_1 bestimmt, welche mit der gegebenen Ebene E die gerade Linie K gemeinschaftlich haben; construirt man also zu E in Beziehung auf T und T_1 die conjugirte harmonische Ebene E', so enthält diese den Pol der gegebenen Ebene E in Beziehung auf jedes der vier durch die gegebenen vier windschiefen Geraden zu drei bestimmten Hyperboloide.

Dass sich die eben bewiesenen Sätze unmittelbar auf ganze Strahlensysteme mit reellen Leitlinien ausdehnen lassen, liegt auf der Hand; ehe jedoch diese Verallgemeinerung durchgeführt wird, soll gezeigt werden, dass dieselben auch unabhängig von der Realität der gemeinschaftlichen Leitlinien Geltung haben.

Man kann irgend drei windschiefe Linien sich dargestellt denken durch die drei Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} t = 0, \\ u = 0; \end{cases} \qquad (2.)\quad \begin{cases} v = 0, \\ w = 0; \end{cases} \qquad (3.)\quad \begin{cases} t = \alpha\lambda v + \beta\mu w, \\ u = \gamma\mu v + \delta\lambda w; \end{cases}$$

das durch sie bestimmte Hyperboloid hat alsdann (§. 2, Gl. 14.) die Gleichung:

$$(4.)\quad \lambda(\delta tw - \alpha uv) - \mu(\beta uw - \gamma tv) = 0.$$

Wenn jetzt der Punkt P gegeben ist, wie folgt:

$$(5.)\quad \frac{t}{t_1} = \frac{u}{u_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{w}{w_1},$$

so wird die Gleichung seiner Polarebene in Beziehung auf das eben dargestellte Hyperboloid:

$$t(\gamma\mu v_1 + \delta\lambda w_1) - u(\alpha\lambda v_1 + \beta\mu w_1) + v(\gamma\mu t_1 - \alpha\lambda u_1) + w(\delta\lambda t_1 - \beta\mu u_1) = 0$$

oder:

$$\lambda[\delta(tw_1 + t_1 w) - \alpha(uv_1 + u_1 v)] - \mu[\beta(uw_1 + u_1 w) - \gamma(tv_1 + t_1 v)] = 0,$$

und diese wird, ganz unabhängig von den Werthen von λ und μ, erfüllt durch den Punkt P':

$$(6.)\quad t : u : v : w = \frac{\alpha u_1}{\gamma} : \frac{\delta t_1}{\beta} : \frac{\delta w_1}{\gamma} : \frac{\alpha v_1}{\beta};$$

es geht also die Polarebene des Punktes P in Beziehung auf das durch die drei Strahlen (1.), (2.) und (3.) bestimmte Hyperboloid durch einen bestimmten Punkt P', dessen Lage von den Constanten λ und μ des Strahls (3.), d. h. von der Lage dieses Strahls zu den beiden ersten ganz unabhängig ist. Dieser Punkt P' liegt darum auch auf der Polarebene des Punktes P in Beziehung auf jedes durch die Strahlen (1.) und (2.) und einen beliebigen Strahl (λ, μ) des Systems $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ bestimmte Hyperboloid, und weil (1.) und (2.) selbst beliebige Strahlen dieses Systems sind, auf der Polarebene des Punktes P in Beziehung auf irgend ein durch drei Strahlen des Systems bestimmtes Hyperboloid. Man hat also den verallgemeinerten Satz:

III. *Die Polarebenen eines beliebig gegebenen Punktes P in Beziehung auf alle durch die Strahlen eines Systems zu drei bestimmten Hyperboloide gehen durch einen und denselben Punkt P'.*

Die Punkte P und P' mögen *conjugirte Punkte* für das System $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ heissen, und es ist zu bemerken, dass die Verbindungslinie jeder zwei conjugirter Punkte selbst ein Strahl des Systems ist, dass also die Construction des einem beliebig im Raume gegebenen Punkte P zukommenden Strahls zurückzuführen ist auf die Construction des mit P conjugirten Punktes P'. Die

Bedingungen nämlich, dass ein Strahl (λ, μ) des Systems den Punkt P' enthält:

$$\frac{\alpha u_1}{\gamma} = \alpha\lambda\cdot\frac{\delta w_1}{\gamma}+\beta\mu\cdot\frac{\alpha v_1}{\beta},$$
$$\frac{\delta t_1}{\beta} = \gamma\mu\cdot\frac{\delta w_1}{\gamma}+\delta\lambda\cdot\frac{\alpha v_1}{\beta},$$

kommen sofort zurück auf die Gleichungen:

$$u_1 = \gamma\mu v_1+\delta\lambda\, w_1,$$
$$t_1 = \alpha\lambda v_1+\beta\mu w_1,$$

welche zeigen, dass der Punkt P auf dem Strahl (λ, μ) liegt.

Der Beweis für den reciproken polaren Satz, nämlich:

IV. *Die Pole einer beliebig gegebenen Ebene E in Beziehung auf alle durch die Strahlen eines Systems zu drei bestimmten Hyperboloide liegen in einer und derselben Ebene E',*

lässt sich auf ganz ähnliche Weise führen. Wenn die Ebene E gegeben ist durch die Gleichung:

$$(7.) \qquad \frac{t}{t_1}+\frac{u}{u_1}+\frac{v}{v_1}+\frac{w}{w_1} = 0,$$

so wird die Gleichung der Ebene E':

$$(8.) \qquad \frac{\gamma t}{\alpha u_1}+\frac{\beta u}{\delta t_1}+\frac{\gamma v}{\delta w_1}+\frac{\beta w}{\alpha v_1} = 0,$$

also ganz analog mit den Gleichungen des Punktes P' (6.). Auch hier mögen jede zwei Ebenen E und E', von denen, wie aus den Gleichungen (7.) und (8.) hervorgeht, jede die Pole der anderen in Beziehung auf alle durch die Strahlen eines Systems zu drei bestimmten Hyperboloide aufnimmt, *conjugirt* heissen, und es ist leicht zu zeigen, dass die Schnittlinie jeder zwei conjugirter Ebenen der diesen Ebenen für sich zukommende Strahl des Systems ist.

Wenn man die Ebene E als im Unendlichen liegend annimmt, so wird deren Pol in Beziehung auf jedes Hyperboloid der Mittelpunkt desselben: die Sätze II. und IV. gestatten darum die folgende Darstellung:

V. *die Mittelpunkte der durch vier beliebig gegebene windschiefe Gerade zu drei bestimmten vier Hyperboloide liegen auf einer bestimmten Ebene;* und

VI. *die Mittelpunkte aller durch die Strahlen eines Systems zu drei bestimmten Hyperboloide liegen auf einer bestimmten Ebene.* —

Es lässt sich jetzt zeigen, dass die in den Sätzen III., IV. und VI. ausgesprochenen Eigenschaften der Strahlen eines Systems zu ihrer ganz allgemeinen Definition dienen können.

Ist ein beliebiges Strahlensystem, z. B. das System $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$, gegeben, für welches die Form der Gleichungen conjugirter Punkte P und P' in (5.) und (6.) und conjugirter Ebenen E und E' in (7.) und (8.) festgestellt worden ist, und handelt es sich um die Auffindung der Bedingungen, dass eine neue beliebig gegebene Gerade

$$(9.) \qquad t = \lambda v + \nu w, \quad u = \mu v + \varpi w,$$

mit irgend zwei Strahlen des Systems $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ ein Hyperboloid bestimmt, in Beziehung auf welches die Polarebene des Punktes P durch den Punkt P' gehen, oder der Pol der Ebene E in der Ebene E' liegen soll, so hat man nur darzuthun, dass die Gerade (9.) mit zwei der früher als Fundamentallinien des Systems benutzten Strahlen, z. B. mit den Strahlen (1.) und (2.), ein Hyperboloid von der verlangten Eigenschaft bildet, weil diese Strahlen sich vor den übrigen nicht durch irgend welche besondere geometrische Eigenschaften auszeichnen.

Die Gleichung des Hyperboloids durch die drei Geraden (1.), (2.) und (9.) ist:

$$(10.) \qquad \mu tv + \varpi tw - \lambda uv - \nu uw = 0,$$

und demnach zunächst die Polarebene des Punktes P (5.) in Beziehung auf diese Fläche:

$$t(\mu v_1 + \varpi w_1) - u(\lambda v_1 + \nu w_1) + v(\mu t_1 - \lambda u_1) + w(\varpi t_1 - \nu u_1) = 0;$$

dieselbe enthält den Punkt P' (6.), wenn:

$$\frac{\alpha u_1}{\gamma}(\mu v_1 + \varpi w_1) - \frac{\delta t_1}{\beta}(\lambda v_1 + \nu w_1) + \frac{\delta w_1}{\gamma}(\mu t_1 - \lambda u_1) + \frac{\alpha v_1}{\beta}(\varpi t_1 - \nu u_1) = 0,$$

welche Gleichung sich bringen lässt auf die Form:

$$(11.) \qquad (\alpha u_1 v_1 + \delta t_1 w_1)\left(\frac{\mu}{\gamma} - \frac{\nu}{\beta}\right) + \left(\frac{u_1 w_1}{\gamma} + \frac{t_1 v_1}{\beta}\right)(\alpha\varpi - \delta\lambda) = 0;$$

aus dieser aber geht hervor, dass wenn dieselbe für beliebige Werthe von t_1, u_1, v_1, w_1, d. h. für jede Lage des Punktes P stattfinden soll, nothwendig die Factoren $\frac{\mu}{\gamma} - \frac{\nu}{\beta}$ und $\alpha\varpi - \delta\lambda$ verschwinden müssen, so dass also

$$\nu = \frac{\beta}{\gamma}\mu, \quad \text{und} \quad \varpi = \frac{\delta}{\alpha}\lambda$$

werden und sich demnach (9.) als ein Strahl des Systems $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ ergiebt.

Andererseits wird der Pol der Ebene (E) in Beziehung auf das Hyperboloid (10.) dargestellt durch die Gleichungen:

$$t:u:v:w = \left(\frac{\lambda}{w_1}-\frac{\nu}{v_1}\right):\left(\frac{\mu}{w_1}-\frac{\varpi}{v_1}\right):-\left(\frac{\nu}{t_1}+\frac{\varpi}{u_1}\right):\left(\frac{\lambda}{t_1}+\frac{\mu}{u_1}\right);$$

derselbe liegt also auf der Ebene E' (8.), wenn:

$$\frac{\gamma}{\alpha u_1}\left(\frac{\lambda}{w_1}-\frac{\nu}{v_1}\right)+\frac{\beta}{\delta t_1}\left(\frac{\mu}{w_1}-\frac{\varpi}{v_1}\right)-\frac{\gamma}{\delta w_1}\left(\frac{\nu}{t_1}+\frac{\varpi}{u_1}\right)+\frac{\beta}{\alpha v_1}\left(\frac{\lambda}{t_1}+\frac{\mu}{u_1}\right) = 0:$$

diese Gleichung aber ist identisch mit der Gleichung (11.) und führt demnach zu der analogen Folgerung, nämlich dass (9.) nothwendig dem Systeme $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ zugehört, wenn der Pol einer beliebigen Ebene E in Beziehung auf das Hyperboloid (10.) auf der conjugirten Ebene E' liegen soll.

§. 4.

Wenn es sich jetzt um die Construction der beliebigen Punkten im Raume oder beliebig gegebenen Ebenen zugehörigen Strahlen eines Systems handelt, mag der Einfachheit wegen zunächst der in §. 2 hervorgehobene besondere Fall solcher vier Strahlen in Betracht gezogen werden, über deren zwei sich ein Vierseit festspannen lässt, dessen Gegenseiten die beiden anderen Strahlen paarweise durchschneiden. Die bereits mitgetheilten Eigenschaften einer solchen Verbindung von vier Strahlen sind alsdann durch den folgenden Satz zu vervollständigen:

> *Wenn sich ein Vierseit über zwei von vier gegebenen windschiefen Geraden festspannen lässt, so dass seine Gegenseiten paarweise von den beiden anderen Geraden durchschnitten werden, so lässt sich auch ein Vierseit über die beiden letzteren festspannen, so dass die beiden ersten paarweise von den Gegenseiten durchschnitten werden.*

Zum Beweise dieses Satzes gehe man etwa von den in §. 2 als Fundamentallinien angewandten Strahlen (0, 0), (∞, ∞), (1, 0), (0, 1) aus, durch welche ganz allgemein vier Strahlen mit der im Satze vorausgesetzten Eigenschaft dargestellt werden, nämlich:

$$(1.)\ \begin{cases} t = 0, \\ u = 0, \end{cases} \quad (2.)\ \begin{cases} v = 0, \\ w = 0, \end{cases} \quad (3.)\ \begin{cases} t = \alpha v, \\ u = \delta w, \end{cases} \quad (4.)\ \begin{cases} t = \beta w, \\ u = \gamma v, \end{cases}$$

und wähle dann diejenigen Ebenenpaare, als deren Schnittlinien den Gleichungen (3.) und (4.) gemäss die zugehörigen Strahlen auftreten, als die

Seitenflächen eines neuen Coordinatentetraeders $t'u'v'w'$, so dass also

$$(5.)\qquad t-\alpha v = t',\quad u-\delta w = u',\quad t-\beta w = v',\quad u-\gamma v = w'$$

zu setzen sind; alsdann ergeben sich als Ausdrücke der alten Coordinaten durch die neuen, abgesehen von dem Factor $(\beta\gamma-\alpha\delta)$:

$$(6.)\qquad \begin{cases} t = \beta(\gamma t'-\alpha w')+\alpha(\beta u'-\delta v'), \\ u = \delta(\gamma t'-\alpha w')+\gamma(\beta u'-\delta v'), \\ v = \delta(t'-v')+\beta(u'-w'), \\ w = \gamma(t'-v')+\alpha(u'-w'), \end{cases}$$

und demnach sind die Gleichungen der vier Fundamentalstrahlen in dem neuen Coordinatensystem:

$$(1^a.)\begin{cases}\gamma t' = \alpha w', \\ \beta u' = \delta v',\end{cases}\quad (2^a.)\begin{cases}t' = v', \\ u' = w',\end{cases}\quad (3^a.)\begin{cases}t' = 0, \\ u' = 0,\end{cases}\quad (4^a.)\begin{cases}v' = 0, \\ w' = 0;\end{cases}$$

aus diesen ergiebt sich sofort, dass die Gegenkanten $t'u'$ und $v'w'$ des neuen Coordinatentetraeders bezüglich mit den Strahlen (3.) und (4.) zusammenfallen und ausserdem die Gegenkantenpaare $t'w'$ und $u'v'$, sowie $t'v'$ und $u'w'$ bezüglich von den Strahlen (1.) und (2.) berührt werden. Nach den Ergebnissen in §. 2 lässt sich demnach von jedem Punkte des Strahls (3.) oder (4.) aus ein windschiefes Vierseit über diese beiden Strahlen festspannen, so dass durch die Gegenseiten die Strahlen (1.) und (2.) durchschnitten werden.

Um eine Verbindung von vier Strahlen, wie die der eben betrachteten vier Fundamentalstrahlen, kurz zu bezeichnen, mag hier ein Name in Vorschlag gebracht werden, der bei der Untersuchung windschiefer Strahlen überhaupt wesentlich zur Vereinfachung des Ausdruckes dient. Jede Vereinigung von vier windschiefen Geraden oder Strahlen mag *Strahlenquadrupel* heissen; und wenn sich auf einem Strahlenquadrupel, wie oben (1.), (2.), (3.), (4.), ein windschiefes Vierseit festspannen lässt, so dass zwei Paare seiner Strahlen, oben (1.), (2.) und (3.), (4.), von den Gegenseiten durchschnitten werden, ein *schliessendes Strahlenquadrupel* mit zwei bestimmten Paaren von *Gegenstrahlen,* oben (1.), (2.) und (3.), (4.); zur Vervollständigung der Terminologie kann dann ein Strahlenquadrupel auf einem Hyperboloid etwa als ein *hyperboloidisches Strahlenquadrupel* bezeichnet werden. Man kann alsdann die Eigenschaften eines schliessenden Strahlenquadrupels, wie folgt, zusammenfassen:

Ueber jede zwei Gegenstrahlen eines schliessenden Strahlenquadrupels lässt sich von jedem ihrer Punkte aus ein windschiefes Vierseit festspannen,

dessen Gegenseiten durch die beiden anderen Gegenstrahlen durchschnitten werden; und (vergl. §. 2) *hält man in dem Strahlensystem* $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ *zwei Gegenstrahlen eines Strahlenquadrupels fest, so sind die beiden anderen Gegenstrahlen die Generatrices derselben Art zweier Hyperboloide* $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ *und* $\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$ *durch die beiden ersten Gegenstrahlen, deren Parameter* $\frac{\lambda}{\mu}$ *und* $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ *verbunden sind durch die Gleichung:*

$$\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}.$$

Die Gleichungen (10.)—(17.) des §. 2 und die daraus abgeleiteten Resultate, welche sich auf die allgemeinen Strahlen (λ, μ) und (λ_1, μ_1) des Systems $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ bezogen, lassen sich auf die nunmehr in Betracht genommenen besonderen Strahlen (1, 0) und (0, 1) übertragen, wenn man statt λ, μ und λ_1, μ_1 bezüglich die Werthe 1, 0 und 0, 1 einführt. Man erhält dadurch Folgendes:

Wenn man den beliebig auf dem Strahl (1.) gegebenen Punkt

$$(7.)\qquad p:\quad t = u = 0,\qquad \frac{v}{w} = \frac{v_1}{w_1},$$

entweder geradlinig über den Strahl (3.) hinaus mit dem Gegenstrahl (2.) verbindet und dann über den Strahl (4.) hinaus geradlinig zum Strahl (1.) zurückkehrt, oder zuerst über (4.) hinaus geradlinig mit (2.) und dann über (3.) hinaus geradlinig mit (1.) verbindet, so gelangt man auf diesem Strahl zu demselben Punkte $p_{3,4}$ oder $p_{4,3}$, welcher jetzt durch p' bezeichnet werden mag, nämlich:

$$(8.)\qquad p':\quad t = u = 0,\qquad \frac{v}{w} = \frac{\beta\delta w_1}{\gamma\alpha v_1};$$

durch eine ähnliche Construction ergiebt sich auf dem Strahl (2.) als der dem beliebig gegebenen Punkte

$$(9.)\qquad q:\quad v = w = 0,\qquad \frac{t}{u} = \frac{t_1}{u_1}$$

zugehörige Punkt q':

$$(10.)\qquad q':\quad v = w = 0,\qquad \frac{t}{u} = \frac{\beta\alpha u_1}{\gamma\delta t_1}.$$

Aus diesen Beziehungsgleichungen erhält man weiter, wenn man zur leichteren Unterscheidung auch die Coordinaten conjugirter Punkte mit den entsprechenden Indices versieht, für jede zwei conjugirte Punkte p oder (v, w) und p' oder (v', w') auf dem Strahl (1.) die Relation:

$$\frac{v}{w} \cdot \frac{v'}{w'} = \frac{\beta\delta}{\gamma\alpha},$$

welche ganz unabhängig von den Coordinaten v_1, w_1 des als Ausgangspunkt gewählten Punktes p (7.) ist. Wenn man also noch ein zweites Paar conjugirter Punkte annimmt, p_1 und p'_1, bezüglich mit den Coordinaten $v_1 w_1$ und $v'_1 w'_1$, so ergiebt sich zwischen den Coordinaten beider Punktepaare die Beziehung:

$$\frac{v}{w} \cdot \frac{v'}{w'} = \frac{v_1}{w_1} \cdot \frac{v'_1}{w'_1};$$

oder, wenn man statt der Verhältnisse der Coordinaten die Verhältnisse der durch die conjugirten Punktepaare p, p' und p_1, p'_1 auf der Coordinatenkante VW bestimmten Abschnitte einführt:

$$(11.) \qquad \frac{pV}{pW} \cdot \frac{p'V}{p'W} = \frac{p_1 V}{p_1 W} \cdot \frac{p'_1 V}{p'_1 W};$$

und ebenso für die durch die conjugirten Punktepaare q, q' und q_1, q'_1 auf der Kante TU bestimmten Abschnitte

$$(12.) \qquad \frac{qT}{qU} \cdot \frac{q'T}{q'U} = \frac{q_1 T}{q_1 U} \cdot \frac{q'_1 T}{q'_1 U}.$$

Aus diesen Gleichungen (11.) und (12.) aber geht hervor, dass die conjugirten Punktepaare V, W; p, p'; p_1, p'_1 und T, U; q, q'; q_1, q'_1 bezüglich auf den beiden Gegenstrahlen (1.) und (2.) in Involution stehen: man hat darum den Satz:

Die Eckpunkte der über die Gegenstrahlen eines schliessenden Strahlenquadrupels festgespannten windschiefen Vierseite sind conjugirte Punkte eines Involutionssystems.

Die gegenseitigen Beziehungen conjugirter Punktepaare auf jeden zwei Gegenstrahlen eines schliessenden Strahlenquadrupels lassen sich aus den Gleichungen (7.) bis (10.) herleiten: Durch die Gleichungen (7.) und (9.) der Punkte p und q werden nämlich diejenigen beiden Punkte dargestellt, welche die durch den Punkt P (§. 3, Gl. (5.)) gezogene, die beiden Gegenstrahlen (1.) und (2.) durchschneidende Gerade auf diesen Strahlen bezüglich bestimmt, und ebenso sind die conjugirten Punkte p' (8.) und q' (10.) diejenigen beiden Punkte, welche die durch den mit P conjugirten Punkt P' (§. 3, Gl. (6.)) gezogene, die beiden Gegenstrahlen (1.) und (2.) durchschneidende Gerade bezüglich auf diesen Strahlen bestimmt. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Wenn man voraussetzt, dass auf den Gegenstrahlen eines schliessenden Strahlenquadrupels durch die Eckpunkte auf ihnen festgespannter wind-

schiefer Vierseite je ein Involutionssystem von Punkten bestimmt ist, und man legt durch einen beliebig gegebenen Punkt P diejenige Gerade, welche zwei dieser Gegenstrahlen durchschneidet, so geht die Verbindungslinie der zu den Schnittpunkten p und q conjugirten Punkte der Involution p' und q' durch den zu P conjugirten Punkt P' des durch das Strahlenquadrupel bestimmten Strahlensystems; —

und weil man ebenso, abgesehen von den entgegengesetzten Vorzeichen von u_1 und w_1, die Punkte p, q und p', q' bezüglich ansehen kann als die Schnittpunkte der Ebenen E und E' (§. 3, Gl. (7.) und (8.)) mit den Gegenstrahlen (1.) und (2.), so ergiebt sich unter derselben Voraussetzung wie im letzten Satze auch die Richtigkeit des reciproken polaren Satzes, nämlich:

die Verbindungslinie der zu den Schnittpunkten p und q einer beliebig gegebenen Ebene E mit zwei Gegenstrahlen conjugirten Punkte p' und q' liegt auf der zu E conjugirten Ebene E' des durch das Strahlenquadrupel bestimmten Strahlensystems.

Um jetzt den einem beliebig im Raume gegebenen Punkte P zugehörigen Strahl desjenigen Strahlensystems zu erhalten, welches durch ein schliessendes Strahlenquadrupel bestimmt ist, verfahre man folgendermassen:

Man ziehe durch P diejenigen beiden Geraden, welche bezüglich die Gegenstrahlen (1.), (2.) und (3.), (4.) des Strahlenquadrupels durchschneiden und construire zu den Schnittpunkten, welche entsprechend p, q und r, s sein mögen, die conjugirten Punkte der Involution p', q' und r', s'. Diese Punkte ergeben sich als die zweiten Eckpunkte der bezüglich von p, q und r, s als ersten Eckpunkten aus über die zusammengehörigen Gegenstrahlen gespannten Vierseite, durch deren Gegenseiten die jedesmaligen anderen Gegenstrahlen durchschnitten werden. Die Verbindungslinien $p'q'$ und $r's'$ durchschneiden sich alsdann in einem bestimmten Punkte P' und PP' ist der verlangte Strahl des Systems.

Soll der einer beliebig gegebenen Ebene E zugehörige Strahl des durch ein schliessendes Strahlenquadrupel bestimmten Strahlensystems gefunden werden, so construire man zu den Schnittpunkten dieser Ebene mit den Gegenstrahlen (1.), (2.) und (3.), (4.), welche entsprechend p, q und r, s sein mögen, die conjugirten Punkte der Involution p', q' und r', s', wie eben angegeben: alsdann liegen die Verbindungslinien $p'q'$ und $r's'$ in einer bestimmten Ebene E' und die Durchschnittslinie der beiden Ebenen E und E' ist der verlangte Strahl des Systems.

Bemerkt möge noch werden, dass, wenn der Punkt P auf einer der Leitlinien des Strahlensystems liegt oder die Ebene E durch eine derselben geht, dasselbe auch bezüglich für den conjugirten Punkt P' und die conjugirte Ebene E' eintritt, weil alsdann die Punkte p', q', r', s' bezüglich mit ihren conjugirten Punkten p, q, r, s zusammenfallen, also diese Punkte Doppelpunkte der Involution sind. In der That kommt auch die Bedingung der Realität der Leitlinien, nämlich dass $\frac{\beta}{\gamma}$ und $\frac{\delta}{\alpha}$ gleiche Zeichen haben, (§. 1, Gl. (11.)), überein mit der Bedingung, dass die Punkte p und p', sowie q und q' zusammenfallen.

§. 5.

Für den nunmehr zu erledigenden allgemeinen Fall, wo das Strahlensystem durch ein nicht schliessendes Strahlenquadrupel, also durch vier ganz beliebig gegebene windschiefe Gerade, bestimmt ist, treten für die Construction neuer Strahlen des Systems nur geringe Modificationen ein. Alsdann nämlich fallen zwar die in §. 2. als die Schlusspunkte zweier je aus zwei geraden Linien bestehender, zusammenhängender Züge, von denen der erste den beliebig auf dem Strahl (1.) gegebenen Punkt p über den Strahl (3.) hinaus mit dem Strahl (2.) und dann über den Strahl (4.) hinaus mit (1.) und der zweite denselben Punkt p über (4.) hinaus mit (2.) und dann über (3.) hinaus mit (1.) verbindet, betrachteten Punkte $p_{3,4}$ und $p_{4,3}$ nicht zusammen und ergiebt sich darum auch auf dem Strahl (1.) durch diese Punkte p nicht, wie in dem §. 4 betrachteten besonderen Falle eines schliessenden Strahlenquadrupels, ein Involutionssystem von Punkten: dagegen gelangt man auch jetzt auf jedem der gegebenen Strahlen zu conjugirten Punkten eines solchen Systems, und zwar z. B. auf dem Strahl (1.) zu dem in §. 4 als p' bezeichneten Punkte (8.), wenn man zu p in Beziehung auf die beiden Schlusspunkte $p_{3,4}$ und $p_{4,3}$ (§. 2, Gl. (15.) und (17.)) den conjugirten harmonischen Punkt construirt. Um dies darzuthun, bezeichne man etwa die in den eben herangezogenen Gleichungen bestimmten Coordinaten der Punkte $p_{3,4}$ und $p_{4,3}$ bezüglich durch $v_{3,4} w_{3,4}$ und $v_{4,3} w_{4,3}$, so dass also:

$$(1.)\quad \begin{cases} v_{3,4} = Bv_1 - \beta\delta A w_1, & w_{3,4} = Bw_1 - \alpha\gamma A v_1, \\ v_{4,3} = Bv_1 + \beta\delta A w_1, & w_{4,3} = Bw_1 - \alpha\gamma A v_1, \end{cases}$$

wo A und B die in §. 2, Gl. (16.) angegebenen, von v_1 und w_1 ganz unabhängigen Werthe haben, und welche in dem jetzt betrachteten allgemeinen Falle nicht verschwinden. Alsdann sind die Gleichungen der durch die zw-

Kante und bezüglich die Punkte p, $p_{3,4}$, $p_{4,3}$ gelegten Ebenen:

$$(2.)\qquad \frac{v}{w}=\frac{v_1}{w_1},\qquad \frac{v}{w}=\frac{v_{3,4}}{w_{3,4}},\qquad \frac{v}{w}=\frac{v_{4,3}}{w_{4,3}},$$

und wird demnach die Gleichung der zur ersteren in Beziehung auf die beiden letzteren conjugirten harmonischen Ebene:

$$(3.)\qquad \tfrac{1}{2}(v_{3,4}w_{4,3}+v_{4,3}w_{3,4})\Big(\frac{v}{v_1}+\frac{w}{w_1}\Big) = w_{3,4}w_{4,3}\frac{v}{w_1}+v_{3,4}v_{4,3}\frac{w}{v_1}.$$

Durch Einsetzen der obigen Werthe der Coordinaten von $p_{3,4}$ und $p_{4,3}$ ergiebt sich:

$$v_{3,4}.v_{4,3}=B^2v_1^2-\beta^2\delta^2A^2w_1^2,\qquad w_{3,4}w_{4,3}=B^2w_1^2-\alpha^2\gamma^2A^2v_1^2,$$
$$\tfrac{1}{2}(v_{3,4}w_{4,3}+v_{4,3}w_{3,4})=v_1w_1(B^2-\alpha\beta\gamma\delta A^2);$$

demnach wird die Gleichung (3.) nach einigen Reductionen:

$$(4.)\qquad A^2(\alpha\gamma v_1^2-\beta\delta w_1^2)\Big(\alpha\gamma\frac{v}{w_1}-\beta\delta\frac{w}{v_1}\Big) = 0,$$

und aus dieser ergeben sich, weil A nunmehr nicht verschwindet, und wenn man den Factor $\alpha\gamma v_1^2-\beta\delta w_1^2$ weglässt, welcher gleich Null wird, wenn der Punkt p auf einer der Leitlinien des Systems liegt, was im Allgemeinen nicht eintritt, als die Gleichungen des gesuchten conjugirten harmonischen Punktes auf dem Strahl (1.):

$$(5.)\qquad t=u=0,\qquad \frac{v}{w}=\frac{\beta\delta w_1}{\gamma\alpha v_1},$$

welche mit denen des Punktes p' (§. 4, Gl. (8.)) übereinkommen. Man hat demnach den Satz:

Wenn man von einem beliebigen Punkte eines der Strahlen eines gegebenen Strahlenquadrupels ausgehend, z. B. vom Punkte p des Strahls (1.), *in zusammenhängendem Zuge einmal geradlinig über den Strahl* (3.) *zum Strahl* (2.) *geht und dann geradlinig den Strahl* (4.) *durchschneidend zu* (1.) *zurückkehrt, und ferner p zuerst geradlinig über* (4.) *mit* (2.) *und dann über* (3.) *mit* (1.) *verbindet, — die Schlusspunkte der beiden Züge auf dem Strahl* (1.) *seien $p_{3,4}$ und $p_{4,3}$, — alsdann sind der zum Anfangspunkte p in Beziehung auf $p_{3,4}$ und $p_{4,3}$ conjugirte harmonische p' und p, bei veränderter Lage von p, conjugirte Punkte eines Involutionssystems.*

Bezeichnet man bei dieser Construction die Strahlen (1.) und (2.), auf denen die Endpunkte und Brechungspunkte der beschriebenen beiden Züge liegen, und ebenso die Strahlen (3.) und (4.), welche durch die beiden Züge

durchschnitten werden, mit gemeinschaftlichem Namen als Gegenstrahlen, um dadurch anzudeuten, dass die Strahlenpaare (1.), (2.) und (3.), (4.) ihre Rollen bei der Construction vertauschen können, wobei jedoch zu bemerken ist, dass von vornherein jede zwei der gegebenen vier Strahlen als Gegenstrahlen ausgewählt werden können, so sieht man sofort, dass bei einer einmaligen festen Gruppirung der gegebenen Strahlen in Gegenstrahlenpaare, indem man dieselbe Construction von anderen und anderen Punkten aus und auf anderen und anderen Strahlen beginnend wiederholt, auf jedem der vier Strahlen ein bestimmtes Involutionssystem erzeugt wird. Setzt man also beispielsweise, wie in dem obigen Satze, die Strahlen (1.), (2.) und (3.), (4.) paarweise als Gegenstrahlen fest und benennt, wie früher, die auf den Strahlen (1.), (2.), (3.), (4.) bezüglich durch die angegebenen Constructionen erhaltenen, conjugirten Punktepaare der Involution p und p', q und q', r und r', s und s', so haben diese ganz dieselben Eigenschaften, als die in §. 4 erhaltenen, ebenso benannten Punktepaare, weil ihre Gleichungen (5.) dieselben sind als früher (§. 4, Gl. (8.)). Darum haben auch diese Punkte dieselbe Bedeutung für die Construction der Elemente P' und E', deren Gleichungen sich in §. 3 als unabhängig von der Wahl des das Strahlensystem $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ bestimmenden Strahlenquadrupels gezeigt haben, und es ergiebt sich demnach auch hier:

1) *der zu einem gegebenen Punkte P conjugirte Punkt P' des Strahlensystems* als Durchschnittspunkt der Verbindungslinien der Punktepaare p', q' und r', s', welche auf den Paaren von Gegenstrahlen (1.), (2.) und (3.), (4.) conjugirt sind den Punkten p, q und r, s, in denen zwei bestimmte durch P gezogene Geraden die Strahlen (1.), (2.) und (3.), (4.) bezüglich durchschneiden; die Verbindungslinie PP' ist der dem Punkte P zugehörige Strahl des Systems. Und

2) enthält auch in dem jetzigen allgemeinen Falle *die zu einer gegebenen Ebene E conjugirte Ebene E' des Strahlensystems* die Verbindungslinien der Punktepaare p', q' und r', s', welche conjugirt sind den Punktepaaren p, q und r, s, in denen die Ebene E bezüglich die Paare von Gegenstrahlen (1.), (2.) und (3.), (4.) durchschneidet; die Schnittlinie der beiden Ebenen E und E' ist dann der der Ebene E zugehörige Strahl des Systems.

Hält man die Bedingung, dass die gegebenen Strahlen in der bestimmten Gruppirung (1.), (2.) und (3.), (4.) Gegenstrahlen des Strahlenquadrupels sein sollen, nicht länger fest, so verallgemeinert sich die Construction der einem

Punkte P oder einer Ebene E conjugirten Elemente P' und E', und man erhält folgende zwei Sätze, von denen der eine die reciproken polaren Beziehungen des anderen ausspricht:

Man kann durch jeden Punkt P im Raume, welcher nicht auf einem gegebenen Strahlenquadrupel selbst liegt, sechs gerade Linien ziehen, welche die gegebenen vier Strahlen zu zwei durchschneiden, nämlich die sechs Geraden, in denen sich die vier durch P und die Strahlen des Strahlenquadrupels einzeln gelegten Ebenen durchschneiden; construirt man zu den Schnittpunkten jeder dieser Geraden auf den ihr zugehörigen beiden Strahlen als Gegenstrahlen die conjugirten Punkte und deren Verbindungsgerade, so erhält man im Ganzen sechs Verbindungsgeraden und diese gehen durch denselben Punkt, nämlich den conjugirten Punkt P' des durch das gegebene Strahlenquadrupel bestimmten Strahlensystems. Und:

Es giebt in jeder Ebene E, welche nicht selbst einen Strahl eines gegebenen Strahlenquadrupels enthält, sechs gerade Linien, welche die vier Strahlen zu zwei durchschneiden, nämlich die Verbindungsgeraden der vier Punkte, in denen die Ebene E die Strahlen des Strahlenquadrupels durchschneidet; construirt man zu den Punkten, welche jede dieser Geraden verbindet, auf den ihr zugehörigen beiden Strahlen als Gegenstrahlen die conjugirten Punkte und deren Verbindungsgerade, so erhält man im Ganzen sechs Verbindungsgeraden und diese liegen in derselben Ebene, nämlich der conjugirten Ebene E' des durch das gegebene Strahlenquadrupel bestimmten Strahlensystems.

Die Verbindungslinie der Punkte P und P' und die Schnittlinie der Ebenen E und E' sind selbst Strahlen der betreffenden Strahlensysteme.

Berlin, November 1866.



Ergänzung der Abhandlung über die Entwickelung des Products

$1.(1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+(n-1)x) = \overset{n}{\Pi}(x)$

in Band XLIII dieses Journals.

(Von Herrn *Schläfli* zu Bern.)

Im Beginn des §. 4 dieser Abhandlung wird eine Form des Ausdrucks einer ganzen Function angenommen, wo der Coefficient des Anfangsterms (Integrationsconstante bei der Integration einer Differenzengleichung) nur durch Induction gefunden war. Am Ende von §. 6, Gl. (38.) steht zwar die identische Gleichung, auf deren Beweis alles ankam; aber ich hatte wirklich vergessen, dass sie noch nicht bewiesen war, und sogar gesagt, der directe Beweis möchte sehr schwer sein. Ueberhaupt führte damals der Versuch, durch Integration von Differenzengleichungen den Gegenstand zu erledigen, zu unnöthiger Weitläufigkeit. Ich will nun den Fehler verbessern, indem ich zeige, dass die Sache weit einfacher ist.

Das in der Ueberschrift genannte Product, $\overset{n}{\Pi}(x) = \sum_{m=0}^{n} \overset{n}{A}_m x^m$, ist durch $\overset{0}{\Pi}(x) = 1$, $\overset{n+1}{\Pi}(x) = (1+nx)\overset{n}{\Pi}(x)$ für jede ganze Zahl n definirt. Nur muss für ein negatives $n = -\lambda$ der absolute Werth von x kleiner als $\frac{1}{\lambda}$ sein, damit die Entwicklung $\overset{-\lambda}{\Pi}(x) = ((1-x)(1-2x)\dots(1-\lambda x))^{-1} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \overset{-\lambda}{A}_m x^m$ convergire. Es ist auch sogleich klar, dass die mit A bezeichneten Coefficienten positive ganze Zahlen sind, sobald sie nicht verschwinden. Der bekannten Gleichung

$$(1.)\quad \frac{(e^t-1)^\lambda}{\lambda!} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \overset{-\lambda}{A}_m \frac{t^{\lambda+m}}{(\lambda+m)!},$$

welche

$$(2.)\quad \overset{-\lambda}{A}_m = \sum_{\beta=0}^{\beta=\lambda} \frac{(-1)^{\lambda-\beta}}{\beta!(\lambda-\beta)!}\beta^{\lambda+m}$$

liefert (wo $\beta^{\lambda+m} = 1$ zu verstehen ist, wenn $m = \lambda = \beta = 0$), reihe ich die Entwicklung (für $\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$(3.)\quad \frac{(e^t-1-t)^\alpha}{\alpha!} = \overset{\alpha}{B}_0 \frac{t^{2\alpha}}{(2\alpha)!} + \overset{\alpha}{B}_1 \frac{t^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)!} + \overset{\alpha}{B}_2 \frac{t^{2\alpha+2}}{(2\alpha+2)!} + \cdots,$$

durch welche die (ganzen positiven) Zahlen $\overset{\alpha}{B}_0, \overset{\alpha}{B}_1, \dots$ definirt werden sollen. an. Also $\overset{0}{B}_0 = 1$, $\overset{0}{B}_m = 0$ für $m = 1, 2, \dots$. (Die Gleichung $\overset{\alpha}{B}_{-1} = 0$, die hier sogleich klar ist, fällt im Grunde mit jener unbewiesenen Gleichung (38.) zusammen; ihre Erkenntniss gab mir die Veranlassung zur vorliegenden Betrachtung.) Stellt man in (3.) die linke Seite durch

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\alpha} \frac{(e^t-1)^\lambda}{\lambda!}\,\frac{(-t)^{\alpha-\lambda}}{(\alpha-\lambda)!}$$

dar, so folgt wegen (1.)

$$(4.)\qquad \overset{\alpha}{B}_{m-\alpha} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\alpha}(-1)^{\alpha-\lambda}\binom{m+\alpha}{\alpha-\lambda}\overset{-\lambda}{A}_m.$$

Aus

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\right)\left(\frac{1}{\alpha!}(e^t-1-t)^\alpha\right) = \frac{t}{(\alpha-1)!}(e^t-1-t)^{\alpha-1}$$

folgt

$$\overset{\alpha}{B}_{m-\alpha+1} - \alpha\overset{\alpha}{B}_{m-\alpha} = (m+\alpha)\overset{\alpha-1}{B}_{m-\alpha+1},\quad \text{(Relationsscale)},$$

im besondern $\overset{\alpha}{B}_0 = (2\alpha-1)\overset{\alpha-1}{B}_0 = 1.3.5\dots(2\alpha-1)$. Es sei nun

$$f_m(n) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m}\binom{m-n}{m+\alpha}\overset{\alpha}{B}_{m-\alpha},$$

also eine ganze Function $(2m)^{\text{ten}}$ Grades von n. Da

$$\binom{m+1-n}{m+1+\alpha} - \binom{m-n}{m+1+\alpha} = \binom{m-n}{m+\alpha},$$

so ist

$$f_{m+1}(n) - f_{m+1}(n+1) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m+1}\binom{m-n}{m+\alpha}\overset{\alpha}{B}_{m-\alpha+1}.$$

Aus $n\binom{m-n}{m+\alpha} = -(m+\alpha+1)\binom{m-n}{m+\alpha+1} - \alpha\binom{m-n}{m+\alpha}$ folgt ferner

$$nf_m(n) = -\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m+1}(m+\alpha)\binom{m-n}{m+\alpha}\overset{\alpha-1}{B}_{m-\alpha+1} - \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m}\alpha\binom{m-n}{m+\alpha}\overset{\alpha}{B}_{m-\alpha}.$$

Daher

$$f_{m+1}(n) - f_{m+1}(n+1) + nf_m(n) = \sum\binom{m-n}{m+\alpha}\left(\overset{\alpha}{B}_{m-\alpha+1} - (m+\alpha)\overset{\alpha-1}{B}_{m-\alpha+1} - \alpha\overset{\alpha}{B}_{m-\alpha}\right) = 0$$

vermöge der Relationsscale für B. (Da $\overset{0}{B}_{m+1} = 0$, $\overset{m+1}{B}_{-1} = 0$, so ist die Verschiedenheit der Summengrenzen ohne Belang). Ferner ist $f_0(n) = \overset{0}{B}_0 = 1$; $f_m(0) = 0$ für $m = 1, 2, \dots$, weil $\binom{m}{m+\alpha} = 0$ für $\alpha = 1, 2, \dots$ und $\overset{0}{B}_m = 0$. Diese Anfangswerthe der Function $f_m(n)$ im Verein mit der Relationsscale,

die für f und A dieselbe ist, reichen hin, um zu beweisen, dass

$$(5.)\qquad \overset{n}{A}_m = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} \binom{m-n}{m+\alpha} \overset{\alpha}{B}_{m-\alpha}$$

ist. (Da diese Formel (5.) für $n=0,\ -1,\ -2,\ \dots -m$ dem Systeme der Gleichungen (4.) für $\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \dots m$ genügt und für $n=1,\ 2,\ \dots m$ den der Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $\overset{n}{\Pi}(x)$ entsprechenden Werth $\overset{n}{A}_m=0$ liefert, also in $2m+1$ Fällen richtig ist, so hätte man auch von hier aus die allgemeine Richtigkeit des Ausdrucks (5.) für eine $(n,1)^{2m}$ schliessen können.)

Combinirt man (2.), (4.), (5.), so stellt sich $\overset{n}{A}_m$ als dreifache Summe dar; diese kann aber in eine Doppelsumme verwandelt werden. Da in (4.) und (5.) zusammen $0 \gtreqless \lambda \gtreqless \alpha \gtreqless m$, und, wenn λ fest bleibt,

$$\sum_{\alpha=\lambda}^{\alpha=m} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{m+\alpha}{\alpha-\lambda}\binom{m-n}{m+\alpha} = (-1)^{m+\lambda}\binom{m-n}{m+\lambda}\sum_{\alpha=\lambda}^{\alpha=m}\binom{-1}{m-\alpha}\binom{-n-\lambda}{\alpha-\lambda}$$

$$= (-1)^{m+\lambda}\binom{m-n}{m+\lambda}\binom{-n-\lambda-1}{m-\lambda} = \binom{m-n}{m+\lambda}\binom{m+n}{m-\lambda},$$

so folgt

$$(6.)\qquad \overset{n}{A}_m = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \overset{-\lambda}{A}_m \binom{m-n}{m+\lambda}\binom{m+n}{m-\lambda},$$

mittelst (2.) eine Doppelsumme. Der Ausdruck ist übrigens eine $(n,1)^{2m}$, und die Gleichung wird von $n=-m$ bis $n=m$ unmittelbar als richtig erkannt; sie ist also auch unabhängig vom vorigen bewiesen.

Zieht man einen analytischen Gang vorigem synthetischem vor, so leitet auch die Anwendung des *Fourier*schen Satzes zur Gleichung (5.). Giebt man nämlich, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, dem Product $\overset{n}{\Pi}(x)$ die Gestalt eines Binòminalcoefficienten, so kommt

$$\binom{z-1}{n-1} = \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{(n-1)!} \overset{n}{A}_m z^{n-m-1}.$$

Da aber $\binom{z-1}{n-1}$ der Coefficient von u^{n-1} in der Entwicklung von $(1+u)^{z-1}$ ist, so giebt der *Fourier*sche Satz

$$\binom{z-1}{n-1} = \frac{1}{2i\pi}\int (1+u)^{z-1} u^{-n}\, du,$$

wenn der Integrationsweg $+1$ Mal 0 umläuft und -1 ausschliesst. Setzt man $u=e^t-1$, so kann man unter dem Integrationszeichen nach Potenzen von z

entwickeln und hat daher zugleich

$$\binom{z-1}{n-1} = \frac{1}{2i\pi}\int e^{zt}(e^t-1)^{-n}\,dt,$$

$$\overset{n}{A}_m = \frac{1}{2i\pi}\int\frac{(-1)^m(n-1)!}{(n-m-1)!}\,t^{n-m-1}(e^t-1)^{-n}\,dt,$$

wenn der Integrationsweg $+1$ Mal 0 umläuft und alle Vielfachen von $2i\pi$ ausschliesst. Es sei $e^t-1 = t(1+T)$; dann ist

$$t^n(e^t-1)^{-n} = \sum_{\alpha=0}\binom{-n}{\alpha}T^\alpha = \Sigma\binom{-n}{\alpha}t^{-\alpha}(e^t-1-t)^\alpha,$$

und, da

$$\frac{(-1)^m(n-1)!}{(n-m-1)!}\binom{-n}{\alpha} = \binom{m-n}{m+\alpha}\frac{(m+\alpha)!}{\alpha!}.$$

ist, auch

$$\overset{n}{A}_m = \sum_{\alpha=0}\binom{m-n}{m+\alpha}\frac{1}{2i\pi}\int(m+\alpha)!\,\frac{(e^t-1-t)^\alpha}{\alpha!}\,t^{-m-\alpha-1}\,dt,$$

was mittelst der in (3.) definirten Coefficienten B die Gleichung (5.) giebt, zwar nur für ein ganzes positives n, aber mittelst der Relationsscalen für A und B auf ganze negative Werthe von n übertragbar.

Bern, den 28. November 1866.

Ueber die Entwickelbarkeit des Quotienten zweier bestimmter Integrale von der Form $\int dx\,dy\dots dz$.

(Von Herrn *Schläfli* zu Bern.)

Im Gebiete von n Variabeln $x, y, \dots z$ heisse jede Gruppe von Werthen derselben ein *Punkt*, und die einzelnen Werthe seien die *Coordinaten* dieses Punktes. Wenn überdies das Quadrat der *Distanz* zweier Punkte durch die Summe der Quadrate der Unterschiede gleichnamiger Coordinaten beider Punkte definirt ist, mögen die Coordinaten *rechtwinklige* heissen, wenn durch eine andere homogene Function zweiten Grades, *schiefwinklige*. Ich setze die Eigenschaften einer orthogonalen Transformation, d. h. einer solchen linearen Transformation der Coordinaten, welche jene erste Form des Ausdrucks der Distanz nicht ändert, als bekannt voraus. Ein Punkt, dessen Coordinaten $x_1, y_1, \dots z_1$ den Zeiger 1 tragen, werde mit diesem Zeiger 1 bezeichnet. Die Gesammtheit aller Punkte, welche der in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückten Gleichung $x^2+y^2+\dots+z^2=1$ genügen, heisse *n-Sphäre;* der Punkt, dessen Coordinaten alle Null sind, heisse das Centrum O derselben; 1 ist ihr Radius; von einem Punkte, der jener Gesammtheit angehört, sage ich, er liege auf der n-Sphäre. Die n Punkte $1, 2, 3, \dots n$ seien nun nach Belieben auf der n-Sphäre gegeben, doch so, dass der Determinant $\sqrt{\Delta}=\binom{x\,y\dots z}{1\,2\dots n}$ nicht verschwindet; ferner ordne man entweder die Coordinaten oder die Punkte so, dass dieser Determinant positiv wird. Der Minor $\binom{y\dots z}{2\dots n}$ dieses Determinants z. B. werde mit $\left[\begin{smallmatrix}x\\1\end{smallmatrix}\right]$ bezeichnet, u. s. f. Summationen, die sich auf die Coordinaten $x, y, \dots z$ beziehen, mögen mit Σ, solche, die sich auf die Punkte $1, 2, \dots n$ oder deren Combinationen ohne Wiederholung beziehen, mit S bezeichnet werden. Mit Bewahrung des Ursprungs O kann man die Coordinaten orthogonal (und homogen) so transformiren, dass die Punkte 1, 2 nur für zwei Coordinatennamen Werthangaben erfordern, während alle anders benannten Coordinaten in beiden Punkten verschwinden, d. h. die drei Punkte O, 1, 2 bestimmen eine Ebene, welche alle

drei enthält; in dieser Ebene liegt ein Winkel $1O2$, der mit $\overline{12}$ bezeichnet sei. Die orthogonale Transformation giebt $\cos\overline{12} = \Sigma x_1 x_2$. Das Quadrat der Distanz der zwei Punkte 1, 2 sei $u_{12} = \Sigma(x_1 - x_2)^2$, also $\cos\overline{12} = 1 - \frac{1}{2}u_{12}$.

Um schiefwinklige Coordinaten $p_1, p_2, \dots p_n$ zu bekommen, deren jede in O und $n-1$ Punkten aus den n auf der n-Sphäre gegebenen verschwindet, aber im einzigen noch übrigen den Werth 1 annimmt, setze man $x = \mathrm{S} x_\lambda p_\lambda$, $y = \mathrm{S} y_\lambda p_\lambda$, $\dots$ $z = \mathrm{S} z_\lambda p_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \dots n)$. Da $\sqrt{\Delta}$ nicht verschwinden darf, so sind durch dieses System von n Gleichungen umgekehrt $p_1, p_2, \dots p_n$ als homogene lineare Functionen von $x, y, \dots z$ völlig bestimmt, und sie sollen hier eine geraume Weile hindurch immer als solche betrachtet werden; als unabhängige Variable sollen nur $x, y, \dots z$ gelten. Der Kürze wegen sei $s = p_1 + p_2 + \dots + p_n$, $U = R^2 = \mathrm{S} u_{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu$ $(\lambda, \mu = 1, 2, \dots n)$, R positiv verstanden, wenn U positiv ist. Dann ist

$$\Sigma x^2 = \mathrm{S} p_1^2 + 2\mathrm{S} \cos\overline{12}\, p_1 p_2 = s^2 - U,$$

also mit Ausnahme von O stets $s > R$.

Gegenstand der vorliegenden Betrachtung ist nun das $n$fache Integral

$$S = \int dx\, dy \dots dz \qquad (x^2 + y^2 + \dots + z^2 < 1,\; p_1 > 0, p_2 > 0, \dots p_n > 0),$$

das ich einen *n-sphärischen Sector* nennen will. Ich werde es so verwandeln, dass der Quotient $\frac{S}{\sqrt{\Delta}}$ nach Potenzen und Producten der $\frac{n(n-1)}{2}$ Distanzenquadrate $u_{12}, \dots$ entwickelbar wird. Man beachte wohl, dass die gemachten Voraussetzungen die Möglichkeit eines Widerspruchs zwischen den dem Integral S auferlegten Grenzbedingungen ausschliessen, und dass diese Bedingungen s und U positiv machen. In der Folge kommen nur proportionale Verwandlungen der Coordinaten $x, y, \dots z$ mittelst *positiver* Factoren vor. Da diese die linearen Grenzbedingungen $p_1 > 0, \dots$ nie in andere Form bringen können, so werde ich es unterlassen sie zu wiederholen. Aus demselben Grunde darf ich voraus setzen, dass nach jeder Verwandlung die Buchstaben s, R, U immer wieder dieselben homogenen Functionen von $x, y, \dots z$ bedeuten wie vorher; vorübergehende Ausnahmen werden wohl das Verständniss nicht stören.

Setzt man $\Sigma x^2 = r^2$, und denkt sich $y, \dots z$ constant, so kann man im Integralausdruck dx durch $\frac{r\,dr}{x}$ ersetzen. Hält man r fest und substituirt $rx, \dots$ für $x, \dots$ so kommt

$$S = \int r^{n-1} dr \frac{dy \dots dz}{x} \qquad (0 < r < 1,\; \Sigma x^2 = 1).$$

und, da man hier nach r integriren kann,

$$S = \frac{1}{n}\int \frac{1}{x} dy \ldots dz \qquad (\Sigma x^2 = 1).$$

(Wenn irgendwo innerhalb der Grenzen x verschwindet, so richte man die Bezeichnung des Elements dieses Integrals auf einen anderen Coordinatennamen als x ein; denn alle n Coordinaten können auf der n-sphäre nicht zugleich verschwinden.) Wenn man, r einstweilen nur als Hülfsvariable ansehend, jedes Element dieses Integrals mit $\int 2R^2 r\,dr\,(0 < rR < 1) = 1$ multiplicirt, und dann, r festhaltend, $x, \ldots$ in $\frac{x}{r}, \ldots$ umsetzt, so kommt

$$S = \frac{2}{n}\int \frac{R^2}{r^{n-1} x} dr\,dy \ldots dz \qquad (0 < R < 1, \Sigma x^2 = r^2 = s^2 - R^2).$$

Setzt man $\frac{1}{2}dU = R\,dR = X\,dx + \cdots$ und denkt sich $y, \ldots z$ constant, so darf $\frac{r\,dr}{x}$ durch $\frac{R\,dR}{X}$ ersetzt werden, was

$$S = \frac{2}{n}\int \frac{R^2}{r^n X} dR\,dy \ldots dz \qquad (0 < R < 1, \Sigma x^2 = r^2 = s^2 - R^2)$$

giebt. Man halte R fest und lasse $x, \ldots$ in $Rx, \ldots$ übergehen,

$$S = \frac{2}{n}\int (s^2-1)^{-\frac{1}{2}n} R\,dR \frac{dy \ldots dz}{X} \qquad (0 < R < 1, \Sigma x^2 = s^2 - 1).$$

Hier kann man nach R integriren und hat

$$S = \frac{1}{n}\int (s^2-1)^{-\frac{1}{2}n} \frac{dy \ldots dz}{X} \qquad (\Sigma x^2 = s^2 - 1).$$

(Die Schwierigkeit, die aus dem Verschwinden von X innerhalb der Grenzen entstehen könnte, wird, wie oben, durch eine andere Darstellung des Elements beseitigt. Denn, da hier $U = 1$ und überhaupt $U = \Sigma x . \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}$, so können nicht alle Abgeleiteten von U zugleich verschwinden. Wenn man übrigens das Coordinatensystem so wählt, dass $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$ wird, so bekommt man $s = \frac{x}{\cos\varrho}$, wo $\sin\varrho$ den Radius der durch die Punkte 1, 2, ... n gehenden kleinen $(n-1)$-sphäre $(s = 1, \Sigma x^2 = 1)$ bedeutet, und $X = x\,\mathrm{tang}^2\varrho$ kann dann nirgends innerhalb der Grenzen verschwinden.)

Da überall $s > 1$, so darf man $(s^2-1)^{-\frac{1}{2}n}$ nach fallenden Potenzen von s entwickeln, und gebe der Entwickelung die Form

$$(s^2-1)^{-\frac{1}{2}n} = 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{n+2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+\lambda\right)}\int_0^\infty e^{-sR} R^{n+2\lambda-1} dR.$$

Substituirt man oben diesen Ausdruck, führt $\frac{x}{R}$, ... statt x, ..., ersetzt dann $\frac{R\,dR}{X}$ durch dx und gebraucht die Functionsbezeichnung

$$T(a, U) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{2a+2\lambda-1}}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+a)} U^\lambda,$$

so kommt

$$S = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)} \int e^{-s} T\left(\frac{n+1}{2}, U\right).dx\,dy \dots dz.$$

Führt man endlich p_1. p_2, ... p_n als unabhängige Variablen ein und beachtet, dass der Functionaldeterminant der rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf diese schiefwinkligen den Werth $\sqrt{\Delta}$ hat, so ist

$$(1.) \qquad S = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)} \sqrt{\Delta} \int e^{-s} T\left(\frac{n+1}{2}, U\right) dp_1\,dp_2 \dots dp_n \quad (p_1 > 0, \dots)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{n!\,S}{\sqrt{\Delta}} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{2\lambda}}{1.2\dots\lambda.\frac{n+1}{2}.\frac{n+3}{2}\dots\left(\frac{n-1}{2}+\lambda\right)} \int e^{-s} U^\lambda dp_1\,dp_2 \dots dp_n.$$

Hier kann U^λ in eine endliche Reihe von Potenzen und Producten der Hülfsvariabeln p_1, p_2, ... p_n entwickelt werden; jeder Term liefert dann eine Combination der constanten Elemente u_{12}, ... multiplicirt mit einem Product solcher einfachen Integrale, wie $\int e^{-p_1} p_1^m dp_1 = m!$. Sind diese einfachen Integrale alle in Facultäten verwandelt, so hat man wirklich eine in ganzer Form fortschreitende Entwickelung jenes Quotienten nach $\frac{n(n-1)}{2}$ invariantiven Elementen des Sectors S, nämlich nach den Quadraten der Distanzen seiner Ecken 1, 2, ... n, vor sich. Der Divisor $\frac{\sqrt{\Delta}}{n!}$ in jenem Quotienten ist übrigens der Werth des $n$fachen Integrals

$$L = \int dx\,dy \dots dz \qquad (s < 1, p_1 > 0, p_2 > 0, \dots p_n > 0).$$

Denn es folgt sogleich $L = \sqrt{\Delta} \int dp_1\,dp_2 \dots dp_n$ (dieselben Grenzen).

Denkt man sich p_2, p_3, ... p_n constant, so darf man dp_1 durch ds ersetzen. Jetzt wandle man p_2, ... p_n in sp_2, ... sp_n um, so hat man

$$\frac{L}{\sqrt{\Delta}} = \int s^{n-1} ds\,dp_2\,dp_3 \dots dp_n$$

$$(p_2 + p_3 + \dots + p_n < 1, p_2 > 0, p_3 > 0, \dots p_n > 0, 0 < s < 1),$$

und da man nach s integriren kann,

$$\frac{L}{\sqrt{\varDelta}} = \frac{1}{n}\int dp_2\,dp_3 \dots dp_n \qquad (p_2+\dots+p_n < 1,\ p_2 > 0,\ \dots,\ p_n > 0),$$

und so fort; folglich $L = \frac{1}{n!}\sqrt{\varDelta}$. Die Integrale S und L haben sämmtliche Ecken O, 1, 2, 3, ... n und alle durch O gehenden linearen Grenzen gemein; sie unterscheiden sich nur dadurch, dass dem Centrum gegenüber S von der n-sphäre, L von dem durch 1, 2, 3, ... n gelegten linearen Continuum begrenzt ist.

Es liegt uns noch ob, die Convergenz des Integralausdrucks (1.) zu beurtheilen. Die mit T bezeichnete Function bildet einen besonderen Fall der hypergeometrischen Reihe von *Gauss* und kann auf mannigfache Arten durch bestimmte Integrale ausgedrückt werden; für unseren Zweck passt die Darstellung durch

$$T\left(\frac{n+1}{2}, U\right) = \frac{(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}n)}\int_0^{\pi} e^{\sqrt{U}.\cos\theta}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}n+1}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}n)}e^R\int_0^2 e^{-Rx}x^{\frac{1}{2}n-1}(1-\tfrac{1}{2}x)^{\frac{1}{2}n-1}dx,$$

wenn man $\sqrt{U} = R$ (positiv) und $\cos\theta = 1-x$ setzt. Ist nun R sehr gross, n aber endlich, so liegt der weit überwiegende Theil des Integrals auf der Strecke $0 < x < \frac{1}{\sqrt{R}}$; man darf $(1-\frac{1}{2}x)^{\frac{1}{2}n-1}$ durch 1 ersetzen, und bekommt angenähert

$$T\left(\frac{n+1}{2}, U\right) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}n+1}}{\Gamma(\frac{1}{2})}e^{\sqrt{U}}U^{-\frac{1}{4}n}.$$

Daher ist die Convergenz des Ausdrucks für $\frac{S}{L}$ dieselbe wie sie das bestimmte Integral

$$2^{\frac{1}{2}n-1}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int e^{-s+\sqrt{U}}U^{-\frac{1}{4}n}dp_1\,dp_2\dots dp_n \qquad (p_1 > 0, \dots)$$

von der Gegend an hat, wo U sehr gross ist, bis da wo U unendlich wird. Ich glaube daher, die Convergenz des Integralausdrucks (1.) sei gesichert, wenn s^2-U als quadratische Function der Variabeln $p_1, p_2, \dots p_n$ für keine Gruppe positiver Verhältnisse derselben Null oder negativ werden kann, wie wenn sie z. B. als arithmetische Summe von n Quadraten reeller linearer und homogener Polynome, aber nicht von wenigeren, dargestellt werden kann, wie z. B. oben durch $\Sigma(\mathrm{S}x_\lambda p_\lambda)^2$, mit anderen Worten, wenn ihr Discriminant

$$\varDelta = \left|\begin{matrix}\cos\overline{1\lambda}.\cos\overline{2\lambda}\dots\cos\overline{n\lambda}\\ (\lambda = 1, 2, 3 \dots n)\end{matrix}\right| \qquad (\text{wo } \cos\overline{\lambda\lambda} = 1)$$

und alle seine diagonalen Minore positiv sind. Es muss indess Fälle geben, wo die Reihe für $\frac{S}{L}$ convergirt, obgleich Δ verschwindet; denn man kann sehr kleine $u_{12}, \ldots$ wählen, welche der Bedingung $\Delta = 0$ genügen. Da übrigens die Reihe aus lauter positiven Termen besteht, so kann eine Variation ihrer Elemente $u_{12}, \ldots$ wohl nie anders einen Uebergang von der Convergenz zur Divergenz bewirken, als indem derselbe durch das Unendlichwerden ihres Werthes $\frac{S}{L}$, also, da S stets endlich ist, durch das Verschwinden von L, somit von Δ, angezeigt wird. Diese Erwägungen bestimmen mich zu glauben, dass, wenn nicht die Punkte O, 1, 2, 3, ... n allesammt einer und derselben linearen Gleichung genügen, die angegebene Entwickelung des Quotienten $\frac{S}{L}$ stets convergire.

Für $n = 2$ sei $x_1 = \cos a$, $y_1 = -\sin a$; $x_2 = \cos a$, $y_2 = \sin a$; also $L = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = \cos a \sin a$, Inhalt des Dreiecks $O12$; Kreissector $S = a$. Der Satz (1.) giebt, da $U = 4\sin^2 a . pq$,

$$\frac{a}{\cos a \sin a} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda! \frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ldots(\lambda+\frac{1}{2})} \int e^{-p-q} (\sin^2 a . pq)^{\lambda}\, dp\, dq,$$

also die bekannte Entwickelung

$$\frac{a}{\cos a \sin a} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{2.4\ldots 2\lambda}{3.5\ldots(2\lambda+1)} \sin^{2\lambda} a.$$

Für $n = 3$ ist S ein Kugelsector; seine Basis, das Kugeldreieck (123) habe die Seiten a, b, c und die Winkel A, B, C. Setzt man $\sin^2 \frac{1}{2}a = x$, $\sin^2 \frac{1}{2}b = y$, $\sin^2 \frac{1}{2}c = z$, so folgt

$$\begin{aligned}\Delta &= 4(2yz + 2xz + 2xy - x^2 - y^2 - z^2 - 4xyz)\\ &= 4\sin\frac{a+b+c}{2} \sin\frac{-a+b+c}{2} \sin\frac{a-b+c}{2} \sin\frac{a+b-c}{2};\end{aligned}$$

ferner ist $S = \frac{1}{2}(A+B+C-\pi)$, und $L = \frac{1}{6}\sqrt{\Delta}$ ist das Volumen der Pyramide ($O123$). Der Satz (1.) giebt

$$\frac{S}{L} = \sum \frac{(\beta+\gamma)!(\gamma+\alpha)!(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta+\gamma+1)!\alpha!\beta!\gamma!} x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, \ldots).$$

Argumente des Sectors S.

Man kann die rechtwinkligen Coordinaten x, y, ... z so wählen, dass die Polynome p_1, p_2 nur zwei Namen enthalten. Lässt man dann die $n-2$ ungleichnamigen Coordinaten verschwinden, so hat man eine Ebene vor sich, in der

die zwei geraden Grenzen $p_1>0$, $p_2>0$ einen Winkel (als unendliches Areal gefasst) mit einander bilden, den ich *überhaupt* das von den zwei linearen Grenzen $p_1>0$, $p_2>0$ eingeschlossene *Argument* $\angle(p_1, p_2)=\alpha_{12}$ des Sectors S nennen will.

Aus dem System der Gleichungen $x=\mathrm{S}\,x_\lambda p_\lambda, \ldots$ folgt $\sqrt{\Delta}.p_1=\Sigma\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}x$, etc. Bildet man Summen, wie Σx_1^2, $\Sigma x_1 x_2$, so geben die Sätze über Multiplication von Determinanten

$$\Sigma\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad \Sigma\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \quad \text{etc.},$$

wenn $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, ... $\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}$ die Minore der obersten Zeile des Cosinusschemas des Determinants Δ bedeuten. Aus $\Sigma x^2=\mathrm{S}p_\lambda^2+2\mathrm{S}\cos\overline{\lambda\mu}.p_\lambda p_\mu$ ist klar, dass alle diagonalen Minore, wie $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}$, ..., positiv sind. Ich darf daher $\sqrt{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}$, $\sqrt{\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}}$, $\sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}}$, so oft als sie vorkommen, positiv verstehen. Setzt man nun $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}}p_1=a_1x+b_1y+\cdots+c_1z$, also $a_1=\dfrac{\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}}{\sqrt{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}}$, und so fort, so ist $\Sigma a_1^2=1$, und die Grenzbedingung $\Sigma a_1 x>0$ von $p_1>0$ nicht verschieden. Die orthogonale Transformation giebt aber $-\cos\alpha_{12}=a_1a_2+b_1b_2+\cdots+c_1c_2$. Folglich ist $-\cos\alpha_{12}=\dfrac{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}{\sqrt{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\sqrt{\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}}}$, $\sin\alpha_{12}=\dfrac{\sqrt{\Delta}.\sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}}}{\sqrt{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\sqrt{\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}}}$. Hieraus ergiebt sich leicht, dass die $\frac{n(n-1)}{2}$ Elemente $\cos\overline{12}$, ... dieselben Functionen der Elemente $-\cos\alpha_{12}$, $-\cos\alpha_{13}$, ... sind, wie diese von jenen.

Bewegt man die einzige lineare Grenze $p_1>0$, so bleiben alle $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Argumente wie α_{23}, die mit dieser Grenze nichts zu schaffen haben, constant; das Eck 1 bleibt fest, und jedes andere Eck λ kann sich nur in der Ebene $(O\,1\,\lambda)$ bewegen und beschreibt einen Kreisbogen um O. Ich verlange noch, dass auch die Argumente α_{13}, α_{14}, ... α_{1n} constant bleiben und nur das Argument α_{12}, das ich kurz mit α bezeichnen will, variire.

Die hieraus entspringenden Bedingungen $\Sigma a_1\,da_1=0$, $\Sigma a_2\,da_1=\sin\alpha\,.d\alpha$, $\Sigma a_3\,da_1=0$, $\Sigma a_4\,da_1=0$, ... $\Sigma a_n\,da_1=0$ werden zunächst $\Sigma\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}da_1=0$,

$$\Sigma\begin{bmatrix}x\\2\end{bmatrix}da_1=\sqrt{\Delta}\cdot\frac{\sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}}}{\sqrt{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}}d\alpha, \quad \Sigma\begin{bmatrix}x\\3\end{bmatrix}da_1=0, \quad \Sigma\begin{bmatrix}x\\4\end{bmatrix}da_1=0, \quad \ldots, \quad \Sigma\begin{bmatrix}x\\n\end{bmatrix}da_1=0$$

nnd geben

$$\sqrt{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\frac{\partial a_1}{\partial \alpha} = x_2\sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}}, \quad \sqrt{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} = y_2\sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}}, \quad \dots$$

n Gleichungen, welche die Variation der linearen Grenze p_1 bestimmen.

Betrachten wir ferner die Bewegung z. B. des Ecks 3. Da es sich, wie schon gesagt, nur in der Ebene $(O13)$ bewegen kann, so ist

$$\frac{\partial x_3}{\partial \alpha} = \beta x_1 + \gamma x_3, \quad \frac{\partial y_3}{\partial \alpha} = \beta y_1 + \gamma y_3, \quad \dots$$

zu setzen, wo β, γ noch zu bestimmen sind. Aus $\frac{1}{2} d\Sigma x_3^2 = \Sigma x_3 dx_3 = 0$ folgt $\beta \cos\overline{13} + \gamma = 0$, und aus $d\Sigma a_1 x_3 = \Sigma a_1 dx_3 + \Sigma x_3 da_1 = 0$ folgt

$$\Sigma\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}(\beta x_1 + \gamma x_3) + \sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}}\Sigma x_2 x_3 = \beta\sqrt{\Delta} + \cos\overline{23}\sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}} = 0.$$

Also ist

$$\sqrt{\Delta}\frac{\partial x_3}{\partial \alpha} = \sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}}(x_3 \cos\overline{13}\cos\overline{23} - x_1\cos\overline{23}),$$

wo der Zeiger 3 durch jeden anderen ersetzt werden darf, wenn man beachtet, dass $\cos\overline{11} = 1$, $\cos\overline{22} = 1$.

Differentiation des Sectors S nach seinen Argumenten.

Zu den früheren Abkürzungen $s = \mathrm{S} p_\lambda$, $U = \mathrm{S} u_{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu$ kommen noch $Q = s^2 - U = \Sigma x^2$ hinzu, und $p_1, p_2, \dots p_n$ gelten fortan als die unabhängigen Variabeln, als solche, die nur dienen, die nach Potenzen und Producten der $u_{12}, \dots$ verlaufende unendliche Reihe des Satzes (1.) in Form eines bestimmten Integrals darzustellen; das Argument α wird nur von den Distanzenquadraten $u_{12}, \dots$ implicirt. Demnach ist $\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -\frac{\partial Q}{\partial u}$. Hält man die Gleichungen $Q = \Sigma x^2$, $x = \mathrm{S} x_\lambda p_\lambda$, $y = \mathrm{S} y_\lambda p_\lambda$, $\dots$ zusammen, so folgt

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial p_\lambda} = \Sigma x_\lambda x = \cos\overline{1\lambda}.p_1 + \cos\overline{2\lambda}.p_2 + \dots + \cos\overline{n\lambda}.p_\lambda,$$

und hieraus

$$\sqrt{\Delta}\,\Sigma x\frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha} = \sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial p_\lambda}\cos\overline{1\lambda}\cos\overline{2\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial p_1}\cos\overline{2\lambda}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2p_\lambda$ und summirt über $\lambda = 1, 2, 3, \dots n$, so kommt

$$\sqrt{\Delta}.\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}}\left(\mathrm{S}\cos\overline{1\lambda}\cos\overline{2\lambda}.p_\lambda\frac{\partial Q}{\partial p_\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial p_1}\frac{\partial Q}{\partial p_2}\right),$$

und, da $\cos\overline{12} = 1 - \frac{1}{2}u_{12}, \dots$ $\mathrm{S} p_\lambda \frac{\partial Q}{\partial p_\lambda} = 2Q$, auch

$$\sqrt{\Delta}.\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \sqrt{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}}\left(\tfrac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial p_1}\frac{\partial Q}{\partial p_2} - 2Q + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}(u_{1\lambda}+u_{2\lambda})p_\lambda\frac{\partial Q}{\partial p_\lambda} - \tfrac{1}{4}\mathrm{S}u_{1\lambda}u_{2\lambda}p_\lambda\frac{\partial Q}{\partial p_\lambda}\right),$$

wo $u_{11}=0$, $u_{22}=0$ zu beachten ist. Substituirt man hier $Q=s^2-U$ und setzt abkürzend $\frac{\partial U}{\partial p_\lambda}=U_\lambda$, also $\frac{\partial Q}{\partial p_\lambda}=2s-U_\lambda$, so bekommt man endlich

$$\sqrt{\Delta}.\frac{\partial U}{\partial \alpha} =$$

$$\sqrt{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}}\{\tfrac{1}{2}U_1U_2+2U-\tfrac{1}{2}\mathrm{S}(u_{1\lambda}+u_{2\lambda})p_\lambda U_\lambda - \tfrac{1}{2}s\mathrm{S}u_{1\lambda}u_{2\lambda}p_\lambda + \tfrac{1}{4}\mathrm{S}u_{1\lambda}u_{2\lambda}p_\lambda U_\lambda\}.$$

Da ferner

$$\Sigma\begin{bmatrix}x\\ \lambda\end{bmatrix}\frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha} = \sqrt{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}}\cos\overline{1\lambda}\cos\overline{2\lambda} = \sqrt{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}}(1-\tfrac{1}{2}(u_{1\lambda}+u_{2\lambda})+\tfrac{1}{4}u_{1\lambda}u_{2\lambda})$$

für $\lambda=2, 3, \ldots n$; für $\lambda=1$ aber

$$0=\Sigma\begin{bmatrix}x\\ 1\end{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = \sqrt{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}}(1-\tfrac{1}{2}(u_{11}+u_{12})-1+\tfrac{1}{2}u_{12}),$$

so folgt

$$\frac{\partial\sqrt{\Delta}}{\partial \alpha} = \sqrt{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}}(n-1+\tfrac{1}{2}u_{12}-\tfrac{1}{2}\mathrm{S}(u_{1\lambda}+u_{2\lambda})+\tfrac{1}{4}\mathrm{S}u_{1\lambda}u_{2\lambda}).$$

Der Kürze wegen werde ich im nächst folgenden nur $T(a)$ statt $T(a, U)$ schreiben, da das Argument U dieser Function immer beibehalten wird. Man beachte dass

$$\frac{\partial T(a)}{\partial U}=T(a+1), \quad \text{und} \quad 4UT(a+2)+4aT(a+1)-T(a)=0.$$

Mittelst der schon berechneten Werthe von $\frac{\partial U}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial\sqrt{\Delta}}{\partial \alpha}$ wird man nun finden

$$\frac{2}{\sqrt{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}}}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sqrt{\Delta}.e^{-s}T\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)$$

$$= e^{-s}\Big\{T\left(\frac{n+3}{2}\right).(U_1U_2+4U-\mathrm{S}(u_{1\lambda}+u_{2\lambda})p_\lambda U_\lambda - s\mathrm{S}u_{1\lambda}u_{2\lambda}p_\lambda + \tfrac{1}{2}\mathrm{S}u_{1\lambda}u_{2\lambda}p_\lambda U_\lambda)$$

$$+T\left(\frac{n+1}{2}\right).(2(n-1)+u_{12}-\mathrm{S}(u_{1\lambda}+u_{2\lambda})+\tfrac{1}{2}\mathrm{S}u_{1\lambda}u_{2\lambda})\Big\}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial p_1\partial p_2}\cdot e^{-s}T\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$+\mathrm{S}\frac{\partial}{\partial p_\lambda}\left\{e^{-s}p_\lambda\left[T\left(\frac{n+3}{2}\right).\mathrm{S}u_{1\lambda}u_{2\lambda}p_\lambda + T\left(\frac{n+1}{2}\right).(\tfrac{1}{2}u_{1\lambda}u_{2\lambda}-u_{1\lambda}-u_{2\lambda})\right]\right\}$$

$$+e^{-s}\left(4UT\left(\frac{n+3}{2}\right)+2(n-1)T\left(\frac{n+1}{2}\right)-T\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}e^{-s}\mathrm{S}u_{1\lambda}u_{2\lambda}p_\lambda.\left(4UT\left(\frac{n+5}{2}\right)+2(n+1)T\left(\frac{n+3}{2}\right)-T\left(\frac{n+1}{2}\right)\right).$$

Der Einzelterm der Summe in der zweiten Zeile liefert Null, wenn er von $p_1 = 0$ bis $p_1 = \infty$ integrirt wird; die dritte und vierte Zeile sind schon jetzt mit Null identisch. Die erste Zeile, nach p_1 integrirt, giebt

$$-\frac{\partial}{\partial p_2}\left(e^{-s}\, T\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)(p_1 = 0),$$

und dieses, nach p_2 integrirt, giebt $\left(e^{-s}\, T\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)(p_1 = 0, p_2 = 0)$. Geben wir den Buchstaben p_1, p_2 wieder die ursprüngliche Bedeutung linearer Functionen der Coordinaten $x, y, \ldots z$, um die Gesammtheit der Punkte zu bezeichnen, welche den drei Gleichungen $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $\Sigma x^2 = 1$ genügen. Diese Gesammtheit ist eine $(n-2)$-sphäre, welche nur die Ecken 3, 4, ... n enthält, und in Bezug auf diese hat $\begin{bmatrix}1\,2\\1\,2\end{bmatrix}$ dieselbe Bedeutung, wie Δ in Bezug auf 1, 2, 3, ... n. Also ist auch

$$S_{12} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}\sqrt{\begin{bmatrix}1\,2\\1\,2\end{bmatrix}}\int e^{-s}\, T\left(\frac{n-1}{2}\right) dp_3\, dp_4 \ldots dp_n \qquad (p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 > 0, \ldots)$$

der durch die Ecken 3, 4, ... n bestimmte Sector jener $(n-2)$-sphäre, und obige Rechnung hat uns dann

$$(2.)\qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_{12}} = \frac{1}{n} S_{12}$$

geliefert. (Einen anderen Beweis dieses Satzes habe ich im *Quarterly journal of pure and applied mathematics,* Bd. II., S. 287 gegeben. In diesem Journale, Bd. XLVIII, hingegen steht ein Aufsatz „über eine Function von drei Winkeln", der für das Gebiet von vier Coordinaten und den besonderen Fall, wo die Argumente α_{13}, α_{14}, α_{24} des Sectors S den Werth $\frac{1}{2}\pi$ haben und nur α_{12}, α_{23}, α_{34} frei sind, eine Reihe von Folgerungen aus vorliegendem Satze (2.) zieht.)

Die Argumente $\beta_{34}, \beta_{35}, \ldots \beta_{(n-1)n}$ des $(n-2)$-sphärischen Sectors S_{12} verhalten sich zum Cosinusschema $\left|\begin{matrix}\cos\overline{3\lambda}, \cos\overline{4\lambda} \ldots \cos\overline{n\lambda}\\ (\lambda = 3, 4, 5 \ldots n)\end{matrix}\right|$ des zweiten Minors $\begin{bmatrix}1\,2\\1\,2\end{bmatrix}$ des Determinants Δ so, wie die Argumente $\alpha_{12}, \ldots$ des n-sphärischen Sectors S sich zum vollständigen Cosinusschema von Δ verhalten; d. h.

$$-\cos\beta_{34} = \frac{\begin{bmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,4\end{bmatrix}}{\sqrt{\begin{bmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{bmatrix}}\cdot\sqrt{\begin{bmatrix}1\,2\,4\\1\,2\,4\end{bmatrix}}}, \qquad \sin\beta_{34} = \frac{\sqrt{\begin{bmatrix}1\,2\\1\,2\end{bmatrix}}\cdot\sqrt{\begin{bmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,2\,3\,4\end{bmatrix}}}{\sqrt{\begin{bmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{bmatrix}}\cdot\sqrt{\begin{bmatrix}1\,2\,4\\1\,2\,4\end{bmatrix}}}$$

Will man S_{12} in der einfachsten Form eines $(n-2)$fachen Integrales $\int dx\, dy \ldots dz$ darstellen, so hat man zuvor das System der n ursprünglichen

Coordinaten orthogonal so zu transformiren, dass auf die Polynome p_1, p_2 nur zwei Namen fallen, und dann sind in jedem der übrigen Grenzpolynome die zwei Terme dieser Namen auszustreichen. Wird noch jedes mit einem positiven Factor multiplicirt, der bewirkt, dass z. B. das mit dem Zeiger 3 versehene Polynom im Eck 3 den Werth 1 bekommt, so mögen die so veränderten Grenzpolynome mit $q_3, q_4, \ldots q_n$ bezeichnet werden. Man lasse nun jene zwei Coordinatennamen weg, bilde aus den $n-2$ übrigen neuen Coordinaten die einfachste Form eines $(n-2)$fachen Integrales und gebe diesen die $(n-2)$-sphäre vom Radius 1 und $q_3>0$, $q_4>0$, ... $q_n>0$ zu Grenzen; dann hat man S_{12}.

Bleibt man bei dem ursprünglichen System der n Coordinaten $x, y, \ldots z$, das zur Darstellung des Sectors S gedient hat, so kommt die letzte Vorschrift darauf zurück, dass man z. B. p_3 durch $p_3+\alpha p_1+\beta p_2$ ersetzt und hier α, β so bestimmt, dass das neue Polynom sowohl zu p_1 als zu p_2 senkrecht wird. Man erhält $\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}q_\lambda=\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}p_\lambda+\begin{bmatrix}12\\2\lambda\end{bmatrix}p_1+\begin{bmatrix}12\\\lambda 1\end{bmatrix}p_2$ für $\lambda=3, 4, \ldots n$. Für $\lambda=1, 2$ wird dieser Ausdruck mit Null identisch. Dividirt man ihn für $\lambda=3$ mit $\sqrt{\begin{bmatrix}12\\12\end{bmatrix}}\cdot\sqrt{\begin{bmatrix}123\\123\end{bmatrix}}$, so wird die Summe der Quadrate der Coefficienten von x, $y, \ldots z$ gleich 1. Mit Bewahrung derselben n rechtwinkligen Coordinaten, durch welche S anfänglich ausgedrückt ward, kann man nun auch S_{12} als n-faches Integral

$$S_{12} = \frac{n}{2\pi}\int dx\,dy\ldots dz \qquad (\Sigma x^2<1, q_3>0, q_4>0, \ldots q_n>0)$$

darstellen. Die Begründung dieses Ausdrucks folgt im nächsten Abschnitt, wo Integrale ähnlich wie S, aber mit weniger als n linearen Grenzen unter anderm in Betracht kommen.

Fall, wo die eine Gruppe der linearen Grenzen auf der anderen Gruppe senkrecht steht.

Die $n=l+m$ Coordinaten im ursprünglichen Ausdruck des n-sphärischen Sectors S mögen aus einer Gruppe von l Coordinaten $x, y, \ldots z$ und einer von m Coordinaten $x', y', \ldots z'$ bestehen; die linearen Grenzpolynome p_1, $p_2, \ldots p_l$ sollen nur $x, y, \ldots z$, die übrigen $q_1, q_2, \ldots q_m$ nur $x', y', \ldots z'$ enthalten. Es sei ferner $x^2+y^2+\cdots+z^2=r^2$,

$$\int dx\,dy\ldots dz \qquad (r^2<1, p_1>0, \ldots p_l>0) = L,$$

$$\int dx'\,dy'\ldots dz' \qquad (x'^2+y'^2+\cdots+z'^2<1, q_1>0, \ldots q_m>0) = M.$$

Hält man im Integrale

$$S = \int dx\,dy \ldots dz\,dx'dy' \ldots dz' \quad (r^2 + x'^2 + \cdots + z'^2 < 1, p_1 > 0, \ldots p_l > 0, q_1 > 0, \ldots q_m > 0)$$

die Variabeln $x, y, \ldots z$ fest, so ist

$$\int dx'dy' \ldots dz \quad (\Sigma x'^2 < 1 - r^2, q_1 > 0, \ldots q_m > 0) = (1 - r^2)^{\frac{1}{2}m} M,$$

$$S = M \int (1 - r^2)^{\frac{1}{2}m} dx\,dy \ldots dz \quad (r^2 < 1, p_1 > 0, \ldots p_l > 0).$$

Führt man hier als erste Integrationsvariable r statt x ein und wandelt dann $x, y, \ldots z$ in $rx, ry, \ldots rz$ um, so kommt

$$S = M \int (1 - r^2)^{\frac{1}{2}m} r^{l-1} dr \frac{dy \ldots dz}{x} \quad (0 < r < 1, \Sigma x^2 = 1, p_1 > 0, \ldots),$$

und, wenn man hier nach r integrirt und beachtet, dass $\int \frac{dy \ldots dz}{x}$ $(\Sigma x^2 = 1, p_1 > 0, \ldots) = lL$, so findet man

$$(3.) \quad S = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}l + 1)\Gamma(\frac{1}{2}m + 1)}{\Gamma\left(\frac{l+m}{2} + 1\right)} LM.$$

Ich habe hier das System der $l+m$ Coordinaten schon von Beginn an so gewählt, wie es die senkrechte Stellung der Polynome $p_1, p_2, \ldots p_l$ zu den Polynomen $q_1, q_2, \ldots q_m$ erlaubte, und wie es für die Behandlung des Falles am bequemsten war; ich brauche kaum zu bemerken, dass die Allgemeinheit des Satzes nicht darunter leidet.

Denkt man sich, der Sector L verhalte sich wieder so wie S, dass nämlich seine linearen Grenzpolynome zwei zu einander senkrechte Gruppen bilden, so kann man auch L auf ähnliche Weise durch ein Product zweier Sectoren darstellen, die den zwei Gruppen entsprechen. Wenn also die linearen Grenzen von S drei Gruppen, eine von k, eine andere von l, eine dritte von m Polynomen, bilden, deren jede auf beiden übrigen senkrecht steht, und man bezeichnet die diesen drei Gruppen entsprechenden k-, l-, m-sphärischen Sectoren mit K, L, M, so folgt

$$S = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}k + 1)\Gamma(\frac{1}{2}l + 1)\Gamma(\frac{1}{2}m + 1)}{\Gamma\left(\frac{k+l+m}{2} + 1\right)} KLM.$$

Wie dieses weiter geht, ist klar. Kommen monosphärische Sectoren vor, so ist zu beachten, dass jeder solcher $\int dx$ $(x^2 < 1, x > 0) = 1$ ist. Wenn daher unter den $l+m$ linearen Grenzen eines $(l+m)$-sphärischen Sectors S eine



Menge l solcher sich findet, deren jede auf allen $l+m-1$ übrigen Grenzen senkrecht steht, wenn also das System der $l+m$ Coordinaten orthogonal so transformirt werden kann, dass der ursprüngliche Ausdruck des Sectors die Gestalt

$$S=\int dx\,dy\dots dz\,dx'dy'\dots dz' \quad (\Sigma x^2+\Sigma x'^2<1,\, p_1>0,\, p_2>0,\dots p_m>0,\; x>0,\, y>0,\dots z>0)$$

annimmt, wo die linearen und homogenen Polynome $p_1, p_2, \dots p_m$ nur x', y', ... z' enthalten; und man setzt

$$M=\int dx'dy'\dots dz' \quad (\Sigma x'^2<1,\, p_1>0,\, p_2>0,\dots p_m>0);$$

so ist

$$S=\frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^l\,\Gamma(\frac{1}{2}m+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m}{2}+1\right)}M.$$

Behalten wir das letzte Coordinatensystem, das für diesen Fall am besten passt, indem die l zu einander und zu den m übrigen senkrechten Grenzpolynome selbst als Coordinaten gebraucht werden, so ist klar, dass eine Umwandlung der Grenze $x>0$ in $-x>0$, d. h. in $x<0$ den Werth des Integrals S nicht ändert; denn in der einzigen Grenzbedingung, die noch x enthält, der $(l+m)$-sphärischen, kommt nur x^2 vor. Addiren wir die zwei den getrennten Bedingungen, $x>0$, und $x<0$, entsprechenden Integrale, so bekommen wir dasjenige Integral, das der Bedingung $x>0$ (oder $x<0$) entbehrt und mit S nur noch die übrigen Grenzen gemein hat; sein Werth ist also $2S$. Lassen wir auch noch die Bedingung $y>0$ weg, so haben wir $4S$, und so fort. Wenn endlich alle jene l unter sich und zu den m übrigen senkrechten Grenzpolynomen getilgt werden, so bekommen wir 2^lS. Das heisst:

$$\int dx\,dy\dots dz\,dx'dy'\dots dz' \quad (\Sigma x^2+\Sigma x'^2<1,\, p_1>0,\, p_2>0,\dots p_m>0)$$
$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}l}\,\Gamma(\frac{1}{2}m+1)}{\Gamma\left(\frac{l+m}{2}+1\right)}\int dx'dy'\dots dz' \quad (\Sigma x'^2<1,\, p_1>0,\dots p_m>0),$$

wenn wirklich jedes der m Grenzpolynome p nur x', y', ... z' enthält. Wenn z. B. $l=2$, $m=n-2$ ist, so ist das $n$fache Integral links $\frac{2\pi}{n}$ mal so gross als das $(n-2)$fache Integral rechts. Hierdurch ist der Ausdruck für S_{12} am Ende des vorigen Abschnitts gerechtfertigt.

Aus dem Satze (3.) folgt auch, dass derjenige Sector, dessen Argumente alle $\frac{1}{2}\pi$ sind, dessen Sehnenquadrate daher alle den Werth 2 haben,

während $\Delta = 1$ ist, den Inhalt $(\Gamma(\frac{1}{2}))^n : \Gamma(\frac{1}{2}n+1)$, die ganze n-sphäre also den Inhalt $\pi^{\frac{1}{2}n} : \Gamma(\frac{1}{2}n+1)$ hat, was längst bekannt ist.

Es folgt aus (3.) ferner, dass der Satz (2.) sich nicht auf eigentliche Sectoren mit eben so vielen linearen Grenzen als Dimensionen beschränkt, sondern für ähnlich gebildete $n$fache Integrale, die weniger als n lineare Grenzen haben, auch noch gilt; namentlich richtet sich der Factor $\frac{1}{n}$ nach der Zahl der Dimensionen, nicht nach der Zahl der Grenzen.

Kehren wir zur anfänglichen Gestalt des Satzes (3.) und ihren Voraussetzungen zurück. Den Polynomen $p_1, p_2, \dots p_l, q_1, q_2, \dots q_m$ mögen die Ecken $1, 2, \dots l, 1', 2', \dots m'$ entsprechen. In den Ecken der ersten Gruppe verschwinden $x', y', \dots z'$; in denen der zweiten Gruppe eben so $x, y, \dots z$. Daher hat das Quadrat jeder Sehne, welche Ecken beider Gruppen mit einander verbindet, den Werth 2. Die Quadrate der Sehnen, welche nur Ecken der ersten Gruppe mit einander verbinden, seien $u_{12}, \dots$; bei der zweiten Gruppe seien sie $v_{12}, \dots$ Ferner sei

$$s = p_1 + p_2 + \dots + p_l, \quad t = q_1 + q_2 + \dots + q_m,$$

$$U = \mathrm{S}\, u_{\lambda\mu} p_\lambda p_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \dots l), \quad V = \mathrm{S}\, v_{\lambda\mu} q_\lambda q_\mu \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \dots m),$$

$$\sqrt{\Delta} = \binom{x\,y \dots z}{1\,2 \dots l}, \quad \sqrt{\Delta'} = \binom{x'y' \dots z'}{1\,2 \dots m}.$$

Dann werden die Functionen, die in Satz (1.) mit $\sqrt{\Delta}$, s, U bezeichnet sind, hier resp. zu $\sqrt{\Delta}.\sqrt{\Delta'}$, $s+t$, $2st+U+V$. Im entwickelbaren Integralausdruck (1.) für den vorliegenden $(l+m)$-sphärischen Sector S kommt also die Function $T\left(\frac{l+m+1}{2}, 2st+U+V\right)$ vor. Man entwickle diese nach Potenzen und Producten von U, V und integrire den Einzelterm; man wird

$$\sum_{b=0}^{b=\infty}\sum_{c=0}^{c=\infty} \frac{1}{b!\,c!} \int e^{-s-t}\, T\left(\frac{l+m+1}{2}+b+c,\ 2st\right) U^{b} V^{c}\, dp_1 dp_2 \dots dp_l\, dq_1 dq_2 \dots dq_m$$

$$= \Gamma(\tfrac{1}{2}).\int e^{-s}\, T\left(\frac{l+1}{2}, U\right) dp_1 \dots dp_l \times \int e^{-t}\, T\left(\frac{m-1}{2}, V\right) dq_1 dq_2 \dots dq_m$$

finden mittelst der zwei Hülfssätze

$$\int e^{-s} s^{\lambda} U^{b}\, dp_1 dp_2 \dots dp_l = \frac{\Gamma(l+2b+\lambda)}{\Gamma(l+2b)} \int e^{-s} U^{b}\, dp_1 dp_2 \dots dp_l,$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(l+\lambda)\,\Gamma(m+\lambda)}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma\left(\frac{l+m+1}{2}+\lambda\right)} (\tfrac{1}{2})^{\lambda} = 2^{l+m-2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}l)\,\Gamma(\frac{1}{2}m)}{\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

Im Falle des Satzes (3.) kann man also direct beweisen, dass die vielfache

hypergeometrische Reihe (1.) in zwei Factoren zerfällt. die wiederum solche Reihen sind; jene ist $\frac{(l+m)(l+m-1)}{2}$ fach, diese sind resp. $\frac{l(l-1)}{2}$ fach, und $\frac{m(m-1)}{2}$ fach.

Reduction des $(2n+1)$-sphärischen Sectors auf $(2n-2\lambda)$-sphärische Sectoren, wo $\lambda=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ n$.

Der Coefficient von $x^{2n+1-\varepsilon}y^{\varepsilon}$ in der Entwickelung von

$$\cos x \operatorname{tang}\frac{x+y}{2}+\cos y \operatorname{tang}\frac{x+y}{2} = \sin x+\sin y$$

ist $\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, wenn $\varepsilon=0$, aber Null, wenn $\varepsilon=1,\ 2,\ 3,\ \dots\ n$. Mit anderen Worten, der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2n+1-\varepsilon}\left(\cos x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\varepsilon}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\varepsilon}\left(\cos x\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{2n+1-\varepsilon}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x\right)$$

nimmt für $x=0$ den Werth $(-1)^n$ an, wenn $\varepsilon=0$, verschwindet aber, wenn $\varepsilon=1,\ 2,\ 3,\ \dots\ n$. Definirt man die ganzen positiven Zahlen a_0, a_1, a_2, ... durch

$$\operatorname{tang} x = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} a_\lambda \frac{x^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!},$$

so folgt, dass der Ausdruck

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda}a_\lambda\binom{2n+1-\varepsilon}{2n-2\lambda}(\tfrac{1}{2})^{2\lambda+1}+\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda}a_\lambda\binom{\varepsilon}{2n-2\lambda}(\tfrac{1}{2})^{2\lambda+1}$$

den Werth 1 bekommt, wenn $\varepsilon=0$, aber verschwindet, wenn $\varepsilon=1,\ 2,\ \dots\ n$.

Es sei nun S ein $(2n+1)$-sphärischer Sector mit den linearen Grenzpolynomen $p_1,\ p_2,\ \dots\ p_{2n+1}$. Da die Grenze $\Sigma x^2<1$ sich immer von selbst versteht, so will ich S kurz durch $\int(p_1,p_2,\dots p_{2n+1})$ bezeichnen. Man lasse nun im ursprünglichen Integralausdruck für S auf alle möglichen Arten je $2\lambda+1$ lineare Grenzen weg und bezeichne die Summe aller so entstandenen $n$fachen Integrale mit $2^{2\lambda+1}G^{(2n-2\lambda)}$, Gruppe der Integrale, welche nur $2n-2\lambda$ lineare Grenzen haben. Man betrachte dann das Aggregat

$$A = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda}a_\lambda G^{(2n-2\lambda)}.$$

Das in $2G^{(2n)}$ vorkommende Integral $\int(p_2,p_3,\dots p_{2n+1})$ z. B. ist gleich $\int(p_1,p_2,p_3,\dots p_{2n+1})+\int(-p_1,p_2,p_3,\dots p_{2n+1})$. Ebenso ist das in $8G^{(2n-2)}$ vorkommende Integral

$$\int(p_4, p_5, \dots p_{2n+1}) = \int(p_1, p_2, p_3, p_4, \dots) + \int(-p_1, p_2, p_3, p_4, \dots)$$
$$+\int(p_1, -p_2, p_3, p_4, \dots) + \int(-p_1, -p_2, p_3, p_4, \dots)$$
$$+\int(p_1, p_2, -p_3, p_4, \dots) + \int(-p_1, p_2, -p_3, p_4, \dots)$$
$$+\int(p_1, -p_2, -p_3, p_4, \dots) + \int(-p_1, -p_2, -p_3, p_4, \dots).$$

Und so geht es fort. Fragen wir uns nun, mit welchem Coefficient der Sector $\int(-p_1, -p_2, -p_3, \dots -p_\varepsilon, p_{\varepsilon+1}, p_{\varepsilon+2}, \dots p_{2n+1})$ z. B. (es ist immer mit verstanden, dass man die Grenzpolynome so ordne, dass der mit $\sqrt{\Delta}$ bezeichnete Determinant positiv ausfalle; kein Sector ist negativ gedacht), worin ε der linearen Grenzen von S das Zeichen gewechselt haben, im Aggregat A vorkomme, also zunächst in der Gruppe $2^{2\lambda+1}G^{(2n-2\lambda)}$, wenn $2\lambda+1 \geqq \varepsilon$ ist. Hier müssen $p_1, p_2, \dots p_\varepsilon$ schon zu den ausgestrichenen Grenzen gehören; es fragt sich also nur, wie oft man $2\lambda+1-\varepsilon$ Grenzen von den übrigen $p_{\varepsilon+1}$, $p_{\varepsilon+2}, \dots p_{2n+1}$ noch tilgen kann. Offenbar $\binom{2n+1-\varepsilon}{2\lambda+1-\varepsilon} = \binom{2n+1-\varepsilon}{2n-2\lambda}$. So oft kommt also der erwähnte Sector in der Gruppe $2^{2\lambda+1}G^{(2n-2\lambda)}$ vor; in A hat er daher $\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^\lambda a_\lambda \binom{2n+1-\varepsilon}{2n-2\lambda}(\frac{1}{2})^{2\lambda+1}$ zum Coefficient. Aber der Sector

$$\int(p_1, p_2, \dots p_\varepsilon, -p_{\varepsilon+1}, -p_{\varepsilon+2}, \dots -p_{2n+1})$$

hat genau denselben Werth wie der vorige. Also bekommt dieser gemeinsame Werth den Coefficient

$$\Sigma(-1)^\lambda a_\lambda \binom{2n+1-\varepsilon}{2n-2\lambda}(\tfrac{1}{2})^{2\lambda+1} + \Sigma(-1)^\lambda a_\lambda \binom{\varepsilon}{2n-2\lambda}(\tfrac{1}{2})^{2\lambda+1},$$

das heisst, 1, wenn $\varepsilon = 0$, aber 0, wenn $\varepsilon = 1, 2, \dots n$. Folglich ist $A = S$ und wir haben den Satz

$$(4.) \qquad S = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^\lambda a_\lambda G^{(2n-2\lambda)}$$

gewonnen. Nach einer Folgerung aus Satz (3.) ist aber jedes der in $2^{2\lambda+1}G^{(2n-2\lambda)}$ vorkommenden Integrale das $\pi^{\lambda+\frac{1}{2}}\Gamma(n-\lambda+1) : \Gamma(n+\frac{3}{2})$ fache des $(2n-2\lambda)$-sphärischen Sectors mit den Argumenten, die von den diesem Integrale noch verbliebenen linearen Grenzen eingeschlossen werden. *Der* $(2n+1)$-*sphärische Sector kann also linear durch lauter* $(2n-2\lambda)$-*sphärische Sectoren ausgedrückt werden, wo* $\lambda = 0, 1, 2, \dots n$. Der Schlussterm rechts in (4.) ist natürlich

$$(-1)^n a_n \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^{2n+1}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}.$$

Reguläre Sectoren.

Wenn alle Sehnenquadrate des n-sphärischen Sectors S denselben Werth u haben, so ist $\Delta = (\frac{1}{2}u)^{n-1}\left(n - \frac{n-1}{2}u\right)$. Die unendliche Reihe (1.) für S bleibt daher so lange convergent, als u, von Null aus wachsend, den Werth $\frac{2n}{n-1}$ noch nicht erreicht hat; hier aber wird sie divergent; also schon bei einem Werthe, der 2 nur um $\frac{2}{n-1}$ übertrifft.

Sind überhaupt alle Sehnenquadrate absolut kleiner als $\frac{2n}{n-1}$, so wird die Reihe (1.) convergiren, mag der Sector S reell oder imaginär sein. Die Frage muss ich einstweilen unbeantwortet lassen: wie verhält sich die Sector geheissene Function, wenn ihre Sehnenquadrate frei variiren? was für Unstetigkeiten hat sie?

Bern, den 4. December 1866.

Zur Theorie der complexen Zahlen.

(Von Herrn *Paul Bachmann* zu Breslau.)

In dem Folgenden theile ich die Hauptmomente aus der Theorie der Zahlen von der Form

$$Z = x+y\sqrt{D}+z\sqrt{\varDelta}+u\sqrt{D\varDelta}$$

mit, in welchen x, y, z, u beliebige ganze Zahlen, D und $\varDelta$ aber ebenfalls zwei ganze Zahlen sind, welche der einzigen Beschränkung unterworfen werden, dass weder sie selbst, noch auch ihr Product positive Quadratzahlen sind. Diese Zahlen mögen kurz als *ganze complexe Zahlen aus* $\sqrt{D}$ *und* $\sqrt{\varDelta}$ bezeichnet werden. Die Norm einer solchen Zahl, d. h. das Product der vier conjugirten Zahlen Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, welche den verschiedenen Vorzeichen von $\sqrt{D}$ und $\sqrt{\varDelta}$ entsprechen, kann leicht in die Form

$$N(Z) = (x^2-Dy^2-\varDelta z^2+D\varDelta u^2)^2-4D\varDelta(yz-xu)^2$$

gebracht werden, und es kommt nun vor Allem darauf an, die reellen Factoren dieser Norm zu untersuchen. Zu diesem Zweck theile ich alle nicht in $2D\varDelta$ enthaltenen Primzahlen — von den Factoren von $2D\varDelta$ wird hier abstrahirt — in vier verschiedene Classen:

Ich bezeichne mit π alle reellen Primzahlen, in Bezug auf welche sowohl D als $\varDelta$ quadratische Nichtreste sind; mit q alle Primzahlen, für welche $\left(\frac{D}{q}\right)=+1$, $\left(\frac{\varDelta}{q}\right)=-1$ ist; mit k alle Primzahlen, für welche umgekehrt $\left(\frac{D}{k}\right)=-1$, $\left(\frac{\varDelta}{k}\right)=+1$ ist; endlich mit p alle Primzahlen, in Bezug auf welche beide Zahlen D und $\varDelta$ quadratische Reste sind. Dann ergeben sich folgende Resultate:

1. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Enthaltensein einer Primzahl q in $N(Z)$ wird durch die beiden Congruenzen $x+ry\equiv 0$, $z+ru\equiv 0$ (mod. q) ausgedrückt, worin r eine Wurzel der Congruenz $r^2\equiv D$ (mod. q). Dann werde gesagt, Z enthalte den idealen Factor (q, r).

2. Ebenso ist die Bedingung dafür, dass eine Primzahl k in $N(Z)$ enthalten ist, durch die Congruenzen $x+\varrho z\equiv 0$, $y+\varrho u\equiv 0$ (mod. k) bezeichnet, worin $\varrho^2\equiv 0$ (mod. k) ist. Dann soll gesagt werden, Z enthalte den idealen Factor (k, ϱ).

3. Wenn ω eine Wurzel der Congruenz $\omega^2 \equiv D\Delta$ (mod. π) bezeichnet, so drücken die Congruenzen $x+u\omega \equiv 0$, $Dy+\omega z \equiv 0$, $\omega y+\Delta z \equiv 0$ (mod. π), von welchen die letzte eine Folge der vorletzten ist, die Bedingung aus, dass π in $N(Z)$, oder der ideale Factor (π, ω) in Z enthalten ist.

4. Endlich ist die Congruenz $x+yv+zw+uvw \equiv 0$ (mod. p), worin v, w Wurzeln der Congruenzen $v^2 \equiv D$, $w^2 \equiv \Delta$ (mod. p) bezeichnen, die Bedingung, dass p in $N(Z)$ oder der ideale Factor (p, v, w) in Z enthalten ist.

Von den so definirten idealen Factoren kann nun zunächst nachgewiesen werden, dass sie in der Theorie der complexen Zahlen aus $\sqrt{D}$ *und* $\sqrt{\Delta}$ *die Rolle der Primfactoren übernehmen,* indem man die beiden folgenden Fundamentalsätze beweist.

Wenn ein Product zweier complexen Zahlen einen jener Factoren enthält, so muss mindestens einer der beiden Factoren dieses Products durch denselben idealen Factor theilbar sein; und wenn die complexen Zahlen Z, Z' einen jener Factoren resp. genau n und n'mal enthalten, so wird ihr entwickeltes Product denselben idealen Factor genau $(n+n')$mal enthalten.

Hieraus ergeben sich sodann alle die gewöhnlichen Folgerungen, z. B., dass eine complexe Zahl, deren Norm zu $2D\Delta$ prim ist, durch ihre idealen Primfactoren vollständig, bis auf eine complexe Einheit, welche als Factor hinzutreten kann, bestimmt ist. Wenn man nun aus beliebigen idealen Primfactoren Producte zusammensetzt, so werden diese im Allgemeinen selbst ideale Zahlen sein; zu jeder idealen Zahl lässt sich aber eine andere, ein Multiplicator finden, so beschaffen, dass ihr Product eine wirkliche complexe Zahl aus $\sqrt{D}$ und $\sqrt{\Delta}$ ist. Dies giebt bekanntlich zu einer Classification aller idealen Zahlen Anlass, indem man alle Zahlen mit gleichen Multiplicatoren in eine Classe wirft. Es ist leicht zu zeigen, dass auch in unserer Theorie die Anzahl solcher Classen eine endliche ist, und ich habe diese Anzahl nach den *Dirichlet*schen Principien bestimmt.

Ehe ich die erhaltenen Resultate hier mittheile, muss ich über *die Einheiten unserer Theorie* einige Bemerkungen einschalten:

1. Die einfachen Einheiten reduciren sich hier im Allgemeinen auf die beiden Einheiten ± 1, wozu nur in besonderen Fällen noch die beiden anderen $\pm\sqrt{-1}$ hinzukommen; man kann nämlich sagen: alle einfachen Einheiten sind in dem Ausdrucke $\pm(\sqrt{-1})^\alpha$ enthalten, worin α die beiden Werthe 0, 1 hat, sobald sich unter den Zahlen D, Δ die negative Einheit befindet, sonst aber gleich Null zu setzen ist.

2. Setzt man $\delta = \sqrt{D} + \sqrt{\varDelta}$, so ist δ Wurzel der irreductibeln Gleichung

$$\delta^4 - 2(D+\varDelta)\delta^2 + (D-\varDelta)^2 = 0$$

welche lauter reelle Wurzeln hat, wenn D und $\varDelta$ positiv sind, aber zwei Paare conjugirt imaginärer, in den sonst möglichen Fällen. Die Anzahl der unabhängigen Einheiten in der Theorie der complexen ganzen Zahlen aus δ wird also, je nach diesen beiden Fällen, gleich 3 oder gleich 1 sein. Nun geht aber jede ganze complexe Zahl aus $\sqrt{D}$ und $\sqrt{\varDelta}$, wie leicht zu zeigen, durch Multiplication mit $2(D-\varDelta)$ in eine ganze complexe Zahl aus δ über, und jede complexe Einheit aus $\sqrt{D}$ und $\sqrt{\varDelta}$, wenn sie zu einer passenden positiven Potenz erhoben wird, in eine complexe Einheit aus δ. Daraus folgt, dass die Anzahl der unabhängigen Einheiten aus $\sqrt{D}$ und $\sqrt{\varDelta}$ der Anzahl der unabhängigen Einheiten aus δ gleich sein muss, sie wird also ebenfalls, je nach den unterschiedenen Fällen, gleich 3 oder gleich 1 sein.

3. Bezeichnet man mit

$$P = T + U\sqrt{D\varDelta}, \quad P' = T' + U'\sqrt{D}, \quad P'' = T'' + U''\sqrt{\varDelta}$$

die Fundamentaleinheiten für die complexen Zahlen aus $\sqrt{D\varDelta}$, $\sqrt{D}$, $\sqrt{\varDelta}$ resp., mit E_1, E_2, E_3, E_4 aber beliebige vier conjugirte Einheiten unserer Theorie, und bemerkt, dass die Producte $E_1.E_2$, $E_1.E_3$, $E_1.E_4$ resp. complexe Einheiten aus $\sqrt{D}$, $\sqrt{\varDelta}$, $\sqrt{D\varDelta}$ sind, so kann man

$$E_1.E_4 = \pm P^m, \quad E_1.E_2 = \pm P'^{m'}, \quad E_1.E_3 = \pm P''^{m''}$$

setzen, worin m, m', m'' ganze Zahlen bedeuten, folglich ihr Product E_1^2 gleich $P^m.P'^{m'}.P''^{m''}$. Daraus folgt, dass das Quadrat jeder complexen Einheit, durch ein Product aus ganzen Potenzen von P, P', P'' dargestellt werden kann.

Sind nun D und $\varDelta$ negativ, so ist $P' = P'' = 1$; wenn also E die Fundamentaleinheit für diesen Fall bezeichnet, so muss $\log E = 2^{-k}.\log P$ sein, während k eine der Zahlen 0, 1 bedeutet. Wenn ferner E', E'' die Fundamentaleinheiten bezeichnen, entsprechend den beiden Fällen $D > 0$, $\varDelta < 0$ und $D < 0$, $\varDelta > 0$, so ergiebt sich ebenso $\log E' = 2^{-k}.\log P'$, $\log E'' = 2^{-k}.\log P''$. Es ist in jedem Falle leicht anzugeben, welcher der beiden Werthe 0, 1 dem k zukommt; z. B. wird man für den ersten der unterschiedenen Fälle $k = 2$ zu setzen haben, wenn eine der beiden Gleichungen $x^2 - D\varDelta u^2 = -1$ oder $(Dy^2 - \varDelta z^2)^2 = 1$ Lösungen gestattet; im entgegengesetzten Falle $k = 1$.

Sind endlich beide Grössen D, $\varDelta$ positiv, so spielen die drei Einheiten P, P', P'' die Rolle von unabhängigen Einheiten; bezeichnet man die

Fundamentaleinheiten mit E, E', E'', so ergiebt sich mit Hülfe der obigen Bemerkung die Gleichung

$$\Sigma \pm \log E_1 . \log E'_2 . \log E''_3 = 2^{-\lambda} . \Sigma \pm \log P_1 . \log P'_2 . \log P''_3,$$

worin λ einen bestimmten der vier Werthe 0, 1, 2, 3 bedeutet.

Was nun *die Anzahl der nicht äquivalenten Classen* betrifft, so wird dieselbe gefunden, indem man den Grenzwerth der Summe $S = \varrho . \Sigma \frac{1}{N(Z)^{1+\varrho}}$, auf alle verschiedenen complexen Zahlen bezogen, deren Normen positiv und zu $2D\Delta$ relativ prim sind, für $\varrho = 0$ nach zwei verschiedenen Methoden bestimmt. Ordnet man zuerst die sämmtlichen Z nach Classen, und nennt deren Anzahl H, so findet man in dem Falle, wo D, Δ negativ sind:

$$\lim S = \pm \frac{\psi(2D\Delta) . \pi^2 \log P}{2^{\nu+\lambda+5} . D^3 . \Delta^3} \cdot H,$$

wo $\nu = 2$ oder $= 1$ zu setzen ist, jenachdem eine der Grössen D, Δ gleich -1 ist oder nicht. Die Function $\psi(2D\Delta)$ bedeutet die Anzahl derjenigen Systeme x, y, z, u unterhalb $2D\Delta$, für welche der Ausdruck $x^2 - Dy^2 - \Delta z^2 + D\Delta u^2$ relative Primzahl gegen $2D\Delta$ wird. Wäre $D > 0$, $\Delta < 0$ oder umgekehrt, so würden einfach $\log P'$ und $\log P''$ an die Stelle von $\log P$ treten. Wenn dagegen D, Δ beide positiv sind, so erhält man

$$\lim S = \pm \frac{\psi(2D\Delta) . \Sigma \pm \log P_1 . \log P'_2 . \log P''_3}{2^{\lambda+6} . D^3 . \Delta^3} \cdot H$$

oder, indem man die Determinante reducirt:

$$\lim S = \pm \frac{\psi(2D\Delta) . \log P . \log P' . \log P''}{2^{\lambda+4} . D^3 . \Delta^3} \cdot H.$$

Wenn man aber zweitens dieselbe Summe so ordnet, dass man stets diejenigen Zahlen Z zusammennimmt, welche eine gleiche Norm haben, so erhält man für $\lim S$ folgende andere Ausdrücke:

Für negative D und Δ:

$$\lim S = \frac{\varphi(2D\Delta)}{2^{\nu+3} . D^2 \Delta^2} \cdot \pi^2 \log P . h(D) . h(\Delta) . h(D\Delta) . \Pi\left(1 - \left(\frac{D}{k}\right)\frac{1}{k}\right) . \Pi\left(1 - \left(\frac{\Delta}{q}\right)\frac{1}{q}\right).$$

Hierin bedeuten $h(D)$, $h(\Delta)$, $h(D\Delta)$ die Anzahl der nicht äquivalenten Classen für die complexen Zahlen aus $\sqrt{D}$, $\sqrt{\Delta}$, $\sqrt{D\Delta}$ resp., und das Product in Bezug auf k erstreckt sich über alle nicht in D enthaltenen ungeraden Primfactoren des Δ, das Product in Bezug auf q über alle nicht in Δ enthaltenen ungeraden Primfactoren des D. In den Fällen $D > 0$, $\Delta < 0$ und $D < 0$, $\Delta > 0$ treten wieder nur $\log P'$, $\log P''$ resp. an die Stelle von $\log P$. Sind dagegen D und

Δ positiv, so findet man

$$\lim S = \frac{\varphi(2D\Delta)}{2^4.D^2\Delta^2}.\log P.\log P'.\log P''.h(D).h(\Delta).h(D\Delta).\Pi\Big(1-\Big(\frac{D}{k}\Big)\frac{1}{k}\Big).\Pi\Big(1-\Big(\frac{\Delta}{q}\Big)\frac{1}{q}\Big).$$

Um aus diesen Doppelwerthen von $\lim S$ das Schlussresultat, den Ausdruck für H, zu entwickeln, muss man noch *den Werth der Function* $\psi(2D\Delta)$ bestimmen. Beschränken wir uns auf den Fall, in welchem D und Δ aus lauter verschiedenen ungeraden Primfactoren bestehen und keinen derselben gemeinschaftlich haben, so findet man:

$$\psi(2D\Delta) = 8D^3.\Delta^3.\varphi(2D\Delta).\Pi\Big(1-\Big(\frac{D}{k}\Big)\frac{1}{k}\Big).\Pi\Big(1-\Big(\frac{\Delta}{q}\Big)\frac{1}{q}\Big).$$

Daraus schliesst man dann endlich folgende beide Gleichungen:

Wenn D und Δ beide positiv sind:

$$H = 2^{-\lambda}.h(D).h(\Delta).h(D\Delta),$$

sonst:

$$H = 2^{k-1}.h(D).h(\Delta).h(D\Delta).$$

Z. B. ergiebt sich aus der zweiten dieser beiden Formeln, indem man $\Delta = -1$ setzt,

$$H = 2^{k-1}.h(D).h(-D),$$

worin man $k=2$ oder $=1$ zu setzen hat, jenachdem die Gleichung $x^2-Dy^2=-1$ Lösungen gestattet oder nicht — dieselbe Gleichung, welche in diesem Journal Band 24, pag. 370 *Dirichlet* bereits gegeben hat.

Ueber die Functionen Y und Z, welche der Gleichung $\frac{4(x^p-1)}{x-1} = Y^2 \mp pZ^2$ Genüge leisten, wo p eine Primzahl der Form $4k \pm 1$ ist.

(Von Herrn *von Staudt* in Erlangen.)

Die Untersuchungen, welche *Legendre* bereits im Jahre 1830 über obige Gleichung angestellt hat, sind dem Verfasser dieser Abhandlung erst vor Kurzem bekannt geworden, haben ihn jedoch von deren Veröffentlichung nicht abhalten können, da in derselben immer noch einiges Neue enthalten ist. Dahin gehören namentlich der Nachweis des Zusammenhangs, welchen die Coefficienten der Functionen Y, Z mit den durch f_m, φ_m, ψ_m bezeichneten Zahlen haben, dann die Aufstellung allgemeiner Formeln für jene Coefficienten und endlich der aus diesen Formeln abgeleitete einfache Beweis des Satzes, welcher in der Theorie der quadratischen Reste als Fundamentalsatz betrachtet wird.

1. Wenn a eine durch p nicht theilbare Zahl ist, so soll unter $\left(\frac{a}{p}\right)$, wie gewöhnlich, die positive oder negative Einheit verstanden werden, je nachdem a quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest der Primzahl p ist. Ist nun auch b eine durch p nicht theilbare Zahl, so ist bekanntlich $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

2. Zwischen 0 und p liegen $q = \frac{1}{2}(p-1)$ quadratische Reste

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots \quad \alpha_q$$

und eben so viele quadratische Nichtreste

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \ldots \quad \beta_q$$

der Zahl p. Ist nun h eine durch p nicht theilbare Zahl und zwar quadratischer Rest, so kann man überall, wo jede von zwei congruenten Zahlen die Stelle der andern vertreten kann, statt des Systems $h(\alpha)$ von Zahlen, welches nämlich aus den Producten $h\alpha_1$, $h\alpha_2$, $h\alpha_3$, $\ldots$ $h\alpha_q$ besteht, das System (α) und eben so statt des Systems $h(\beta)$ das System (β) setzen, während, wenn h quadratischer Nichtrest ist, (β) für $h(\alpha)$ und (α) für $h(\beta)$ gesetzt werden kann. So wie hier, so hat man auch in der Folge, wenn nicht aus-

drücklich ein anderer Modulus genannt wird, die Primzahl p als Modulus zu betrachten.

3. Wenn $p > 3$ ist und also wenigstens ein quadratischer Rest h zwischen 1 und p liegt, so ist sowohl die Summe der Zahlen (α) als auch die Summe der Zahlen (β) der Null congruent. Wird nämlich irgend eine dieser Summen durch s bezeichnet, so ist $hs \equiv s$, woraus der Satz folgt.

4. Bezeichnet man das Product aus den Zahlen (α) durch P_α, das Product aus den Zahlen (β) aber durch P_β, so ist

$$P_\beta \equiv \left(\frac{-1}{p}\right) \equiv -P_\alpha.$$

Zu jedem zwischen 1 und $p-1$ liegenden Factor x sowohl des einen als auch des anderen Products giebt es einen zwischen denselben Grenzen liegenden Factor y desselben Products, so dass $xy \equiv 1$ ist. Setzt man für je zwei solche Factoren die Einheit, so folgt, dass entweder $P_\beta \equiv 1 \equiv -P_\alpha$ oder $P_\alpha \equiv 1 \equiv -P_\beta$ ist, je nachdem nämlich die Zahl $p-1$ unter den Zahlen (α) oder unter den Zahlen (β) sich befindet. Aus dem Satze geht noch hervor, dass $(p-1)! \equiv -1$ ist.

5. Ist h irgend eine durch p nicht theilbare Zahl, so ist

$$h^q \equiv \left(\frac{h}{p}\right).$$

Das Product $h^q.P_\alpha$ aus den Zahlen $h(\alpha)$ ist nämlich dem Producte P_α oder dem Producte P_β congruent, je nachdem h quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest ist. Im erstern dieser Fälle ist also $h^q \equiv 1$, im letztern aber, da $P_\beta \equiv -P_\alpha$ ist, $h^q \equiv -1$.

Namentlich ist $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^q$ und mithin -1 quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest der Zahl p, je nachdem q eine pare oder eine unpare Zahl ist, oder je nachdem p die Form $4k+1$ oder $4k-1$ hat.

6. Versteht man unter q_m den Ausdruck $\frac{q(q-1)(q-2)\dots(q-m+1)}{1.2.3\dots m}$, so giebt es $q_m.q_n$ Summen, deren jede aus m Zahlen des Systems (α) und n Zahlen des Systems (β) besteht. Bezeichnet man ferner die Anzahl derjenigen dieser Summen, welche der Zahl a congruent sind, durch (m, n, a), so ist

$$(m, n, 0) + (m, n, 1) + (m, n, 2) + \text{etc.} \dots + (m, n, p-1) = q_m.q_n.$$

Es wird hier vorausgesetzt, dass keine der beiden Zahlen m, n negativ und höchstens eine derselben Null sei, in welchem Falle 1 für q_0 zu setzen ist.

Von den q_m Summen, deren jede aus m Zahlen des Systems (α) besteht, sind $(m, 0, a)$, von den q_n Summen aber, deren jede aus n Zahlen des Systems (β) besteht, $(0, n, a)$ der Zahl a congruent. Ist irgend eine der Zahlen m, n grösser als q, so ist, was auch a für eine Zahl sein mag, $(m, n, a) = 0$ und eben so $q_m . q_n = 0$.

7. Schreibt man statt (m, n, a), im Falle $a \equiv 0$ ist, nur $f(m, n)$, so hat man die Gleichung:

$$f(m, n) = f(n, m).$$

Nach der eingeführten Bezeichnung giebt es nämlich $f(m, n)$ der Null congruente Summen, deren jede aus m Zahlen des Systems (α) und n Zahlen des Systems (β) besteht. Multiplicirt man nun alle diese Summen mit einem und demselben quadratischen Nichtreste h und setzt dann statt der Summanden $h\alpha_1$, $h\alpha_2$, $h\alpha_3$, ... die ihnen congruenten Zahlen des Systems (β) und statt der Summanden $h\beta_1$, $h\beta_2$, $h\beta_3$, ... die ihnen congruenten Zahlen des Systems (α), so hat man $f(m, n)$ der Null congruente Summen, deren jede aus n Zahlen des Systems (α) und m Zahlen des Systems (β) besteht, woraus der Satz folgt.

8. Wenn a, b zwei durch p nicht theilbare Zahlen sind, so ist entweder $(m, n, a) = (m, n, b)$ oder $(m, n, a) = (n, m, b)$, je nachdem nämlich $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ oder $\left(\frac{a}{p}\right) = -\left(\frac{b}{p}\right)$ ist.

Es sei $b \equiv ha$. Da es nun (m, n, a) der Zahl a congruente Summen giebt, deren jede aus m Zahlen des Systems (α) und n Zahlen des Systems (β) besteht, so giebt es auch (m, n, a) der Zahl b congruente Summen, deren jede aus m Zahlen des Systems $h(\alpha)$ und n Zahlen des Systems $h(\beta)$ besteht. Setzt man für jeden Summanden seinen kleinsten positiven Rest, so erhält man (m, n, a) der Zahl b congruente Summen, deren jede, wenn h quadratischer Rest ist, aus m Zahlen des Systems (α) und n Zahlen des Systems (β), im entgegengesetzten Falle aber aus n Zahlen des Systems (α) und m Zahlen des Systems (β) besteht, woraus der Satz folgt.

9. Schreibt man $\varphi(m, n)$ statt $(m, n, 1)$, so ist nach dem Vorigen, wenn a eine durch p nicht theilbare Zahl bezeichnet, $(m, n, a) = \varphi(m, n)$ oder $= \varphi(n, m)$, je nachdem a quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest der Zahl p ist. Die in 6. aufgestellte Gleichung aber geht nun in folgende über:

$$f(m, n) + q\varphi(m, n) + q\varphi(n, m) = q_m . q_n.$$

Für $p = 7$ wird $f(1, 2) = 0$, $\varphi(1, 2) = 1$, $\varphi(2, 1) = 2$.

10. Setzt man im Vorigen $n=m$, so ergiebt sich die Gleichung:

$$f(m,m)+2q\varphi(m,m) = q_m.q_m.$$

Namentlich ist also

$$f(1,1)+2q\varphi(1,1) = q^2.$$

11. Ist x eine Zahl des Systems (α), so ist $p-x$ eine Zahl des Systems (α) oder des Systems (β), je nachdem q eine pare oder eine unpare Zahl ist. Im erstern dieser Fälle ist $f(2,0)=\frac{1}{2}q$, $f(1,1)=0$, folglich $\varphi(1,1)=\frac{1}{2}q=\frac{1}{4}(p-1)$ und mithin $1-4f(1,1)+4\varphi(1,1)=p$, während im letztern Falle $f(2,0)=0$, $f(1,1)=q$, folglich $\varphi(1,1)=\frac{1}{2}(q-1)=\frac{1}{4}(p-3)$ und mithin $1-4f(1,1)+4\varphi(1,1)=-p$ ist.

12. Schreibt man f_m statt $f(m,0)$, φ_m statt $\varphi(m,0)$ und ψ_m statt $\varphi(0,m)$, so folgt aus 9., wenn man daselbst $n=0$ setzt

$$f_m+q\varphi_m+q\psi_m = q_m.$$

Unter den q_m Summen, deren jede aus m Zahlen des Systems (α) besteht, sind f_m der Null, φ_m der Einheit und $\psi_m=(0,m,1)=(m,0,h)$ einem und demselben quadratischen Nichtreste h congruent. Ist $p=13$, so ist $f_2=3$, $\varphi_2=1$, $\psi_2=1$.

13. Setzt man

$$2f_m-\varphi_m-\psi_m = (-1)^m C_m,$$
$$-\varphi_m+\psi_m = (-1)^m D_m,$$

so wird

$$C_m+D_m = 2(-1)^m(f_m-\varphi_m),$$

woraus man schliessen kann, dass C_m, D_m entweder zwei pare oder zwei unpare Zahlen sind. Verbindet man die obigen Gleichungen mit der in der vorigen Nummer enthaltenen, so findet man

$$pf_m = q_m+q(-1)^m C_m,$$
$$p\varphi_m+p\psi_m = 2q_m-(-1)^m C_m,$$
$$2p\varphi_m = 2q_m-(-1)^m C_m-p(-1)^m D_m,$$
$$2p\psi_m = 2q_m-(-1)^m C_m+p(-1)^m D_m.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass $(-1)^m C_m \equiv 2q_m$ ist.

14. Da $f_1=0$, $\varphi_1=1$, $\psi_1=0$, so ist $C_1=D_1=1$. Ist $p=3$ und also $q=1$, so ist auch $f_q=0$, $\varphi_q=1$, $\psi_q=0$ und $C_q=D_q=1$. Wenn aber $p>3$ und also die Summe der Zahlen (α) der Null congruent ist, so ist $f_q=1$, $\varphi_q=\psi_q=0$, mithin $C_q=2(-1)^q$ und $D_q=0$.

15. Wenn m zwischen 0 und q liegt und $n=q-m$ ist, so ist $f_m=f_n$ und überdies

$$\text{entweder } \varphi_m=\varphi_n \text{ und } \psi_m=\psi_n$$
$$\text{oder } \quad \varphi_m=\psi_n \text{ und } \psi_m=\varphi_n,$$

je nachdem nämlich q eine pare oder unpare Zahl ist. Wenn nämlich eine Summe, welche aus m Zahlen des Systems (α) besteht, der Zahl a congruent ist, so ist die Summe der n übrigen Zahlen desselben Systems $\equiv -a$, woraus man schliessen kann, dass $(m, 0, a)=(n, 0, -a)$ und eben so $(0, m, a)=(0, n, -a)$ ist. Setzt man $a=0$, so folgt, dass $f_m=f_n$ ist. Setzt man $a=1$, so erhält man die Gleichungen:

$$\varphi_m=(n, 0, -1), \qquad \psi_m=(0, n, -1).$$

Nun ist nach 9., wenn -1 quadratischer Rest der Zahl p ist, $(n, 0, -1)=(n, 0, 1)$ $=\varphi_n$ und $(0, n, -1)=(0, n, 1)=\psi_n$, im entgegengesetzten Falle aber $(n, 0, -1)$ $=(0, n, 1)=\psi_n$ und $(0, n, -1)=(n, 0, 1)=\varphi_n$, woraus der Satz sich ergiebt.

Aus dem obigen Satze und aus 13. folgt noch, dass $(-1)^m C_m=(-1)^n C_n$ und $(-1)^m D_m=(-1)^{n+q}.D_n$ ist. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $(-1)^m$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$C_m=(-1)^q C_n, \quad D_m=D_n.$$

16. Bezeichnet ω eine imaginäre Wurzel der Gleichung $x^p-1=0$, so ist

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\text{etc.}\ldots+\omega^{p-1} \;=\; 0.$$

Sind ferner m, n irgend zwei Zahlen, so ist, wenn $m\equiv n$ ist, $\omega^m=\omega^n$. Ist aber $m-n$ durch p nicht theilbar, so sind ω^m, ω^n zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $x^p-1=0$ und daher die Glieder der obigen Summe die p Wurzeln derselben. Setzt man also

$$(x-\omega^{\alpha_1})(x-\omega^{\alpha_2})\ldots(x-\omega^{\alpha_q}) \;=\; U,$$
$$(x-\omega^{\beta_1})(x-\omega^{\beta_2})\ldots(x-\omega^{\beta_q}) \;=\; V,$$

so ist

$$\frac{x^p-1}{x-1} \;=\; UV.$$

17. Bezeichnet man die Summe der Potenzen ω^{α_1}, ω^{α_2}, ... ω^{α_q} durch A_1, die Summe der Producte aus je zweien derselben durch A_2, die Summe der Producte aus je dreien durch A_3 u. s. w. und eben so die Summe der Potenzen ω^{β_1}, ω^{β_2}, ... ω^{β_q} durch B_1, die Summe der Producte aus je zweien derselben durch B_2, die Summe der Producte aus je dreien durch B_3 u. s. w.,

so ist

$$U = x^q - A_1 x^{q-1} + A_2 x^{q-2} - \text{etc.} \dots \pm A_q,$$
$$V = x^q - B_1 x^{q-1} + B_2 x^{q-2} - \text{etc.} \dots \pm B_q.$$

18. Wenn man die Summe A_m mit der Summe B_n multiplicirt, so erhält man eine Summe von $q_m . q_n$ Potenzen und zwar jede Potenz von ω, deren Exponent von m Zahlen des Systems (α) und n Zahlen des Systems (β) die Summe ist. Fasst man nun solche Potenzen, welche, weil ihre Exponenten congruent, einander gleich sind, zusammen, so folgt:

$$A_m . B_n = f(m,n) + (m,n,1)\omega + (m,n,2)\omega^2 + \text{etc.} \dots + (m,n,p-1)\omega^{p-1}.$$

Da aber, wenn α eine Zahl des Systems (α) und β eine Zahl des Systems (β) bezeichnet, $(m,n,\alpha) = \varphi(m,n)$ und $(m,n,\beta) = \varphi(n,m)$ ist, so geht die obige Gleichung in nachstehende über:

$$A_m B_n = f(m,n) + \varphi(m,n) A_1 + \varphi(n,m) B_1.$$

19. Nach 16. ist $A_1 + B_1 = -1$. Setzt man also $-A_1 + B_1 = \varrho$, so wird $2A_1 = -1-\varrho$, $2B_1 = -1+\varrho$ und mithin $\varrho^2 = 1 - 4A_1 B_1$. Nun ist nach dem vorigen Satze, wenn daselbst $m = n = 1$ gesetzt wird, $A_1 B_1 = f(1,1) - \varphi(1,1)$, woraus hervorgeht, dass $\varrho^2 = 1 - 4f(1,1) + 4\varphi(1,1) = \pm p$ ist, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem (11.) die Primzahl p die Form $4k+1$ oder $4k-1$ hat.

20. Setzt man in der vorletzten Nummer $n = 0$ und also 1 statt B_n, so erhält man die Gleichung:

$$A_m = f_m + \varphi_m A_1 + \psi_m B_1.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit 2 und setzt alsdann $-1-\varrho$ statt $2A_1$ und $-1+\varrho$ statt $2B_1$, so folgt

$$2A_m = 2f_m - \varphi_m - \psi_m + (\psi_m - \varphi_m)\varrho.$$

Wenn man endlich auch noch mit $(-1)^m$ multiplicirt, so erhält man

$$2(-1)^m A_m = C_m + D_m \varrho.$$

Eben so findet man, wenn man in 18. zuerst m mit n vertauscht und dann $n = 0$ setzt:

$$2B_m = f_m + \psi_m A_1 + \varphi_m B_1,$$
$$2(-1)^m B_m = C_m - D_m \varrho.$$

21. Setzt man

$$2x^q + C_1 x^{q-1} + C_2 x^{q-2} + \text{etc.} \dots + C_q = Y,$$
$$D_1 x^{q-1} + D_2 x^{q-2} + \text{etc.} \dots + D_q = Z,$$

so wird nach 17. und 20.

$$2U = Y+\varrho Z,$$
$$2V = Y-\varrho Z,$$

mithin

$$\frac{4(x^p-1)}{x-1} = Y^2 \mp pZ^2,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem p die Form $4k+1$ oder $4k-1$ hat. Setzt man $p=3$, so folgt

$$\frac{4(x^3-1)}{x-1} = (2x+1)^2+3.$$

Ist aber $p>3$, so ist nach 14. und 15.

$$C_q = 2(-1)^q, \quad D_q = 0$$

und, wenn m zwischen 0 und q liegt,

$$C_{(q-m)} = (-1)^q . C_m, \quad D_{(q-m)} = D_m .$$

22. Da es sehr mühsam ist, für grosse Werthe von m und p die Werthe von f_m, φ_m und ψ_m zu finden, um dann aus ihnen die Werthe von C_m und D_m zu berechnen, so ist ein Verfahren wünschenswerth, durch welches die letztern unmittelbar gefunden werden. Auf ein solches Verfahren führt aber nachstehender Satz:

Bezeichnet man die Summe der q Unbestimmten $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_q$ durch A_1, die Summe der Producte aus je zweien derselben durch A_2, die Summe der Producte aus je dreien durch A_3 u. s. w. und die Summe der Potenzen $\omega_1^h, \omega_2^h, \omega_3^h, \ldots \omega_q^h$ durch S_h, so ist

$$A_m = (-1)^m \Sigma \frac{(-S_1)^a}{a!\,1^a} . \frac{(-S_2)^b}{b!\,2^b} . \frac{(-S_3)^c}{c!\,3^c} \ldots,$$
$$a+2b+3c+\text{etc.} = m,$$

woraus zugleich hervorgeht, dass A_m durch die Summen $S_1, S_2, S_3, \ldots S_m$ bestimmt ist.

23. Setzt man im Vorigen statt der Unbestimmten $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_q$ die Potenzen $\omega^{\alpha_1}, \omega^{\alpha_2}, \ldots \omega^{\alpha_q}$ der Imaginären ω, so wird S_h, im Falle h durch p theilbar ist, $=q$, im entgegengesetzten Falle aber $=A_1 = \frac{1}{2}(-1-\varrho)$ oder $=B_1 = \frac{1}{2}(-1+\varrho)$, je nachdem $\left(\frac{h}{p}\right) = 1$ oder $=-1$ ist. Da nun A_m für alle Werthe von m, welche $>q$ sind, Null wird, also für solche Werthe nicht erst zu berechnen ist, so kann man annehmen, dass $m<p$ sei. In diesem Falle ist aber, wenn S_h in A_m vorkommt, auch $h<p$ und mithin

$-S_h = \frac{1}{2}(1+\varrho\lambda_h)$, wo der Einfachheit wegen λ_h für $\left(\frac{h}{p}\right)$ geschrieben ist. Die in der vorigen Nummer aufgestellte Gleichung geht hiernach, wenn auf beiden Seiten noch mit $2(-1)^m$ multiplicirt wird, in nachstehende über:

$$C_m + D_m\varrho = 2\Sigma\frac{(1+\varrho\lambda_1)^a}{a!2^a}\cdot\frac{(1+\varrho\lambda_2)^b}{b!4^b}\cdot\frac{(1+\varrho\lambda_3)^c}{c!6^c}\cdots$$
$$a+2b+3c+\text{etc.} = m.$$

Der Ausdruck rechter Hand kann, wenn man ihn zuerst nach Potenzen von ϱ entwickelt und alsdann, weil $\varrho^2=(-1)^q p$ ist, $(-1)^{nq}.p^n$ statt ϱ^{2n} und $(-1)^{nq}.p^n\varrho$ statt ϱ^{2n+1} setzt, in die Form $P+Q\varrho$ gebracht werden, wo P, Q von ϱ frei sind. Weil aber ϱ entweder irrational oder imaginär ist, so hat man die beiden Gleichungen:

$$C_m = P, \quad D_m = Q.$$

24. Setzt man im Vorigen $m=1$ und dann auch $m=2$, so erhält man die Gleichungen

$$C_1+D_1\varrho = 1+\varrho,$$
$$C_2+D_2\varrho = \tfrac{1}{4}(1+\varrho)^2+\tfrac{1}{2}(1+\varrho\lambda_2).$$

Aus der erstern folgt, dass $C_1 = D_1 = 1$ ist; aus der letztern folgt:

$$C_2 = \tfrac{1}{4}(3+\varrho^2), \quad D_2 = \tfrac{1}{2}(1+\lambda_2).$$

Ist nun $p=4k\pm1$, so ist $\varrho^2=1\pm4k$, $C_2=1\pm k$. Da endlich C_2, D_2 nach 13. entweder zwei unpare oder zwei pare Zahlen sind, so ist $\lambda_2=1$ und $D_2=1$ oder $\lambda_2=-1$ und $D_2=0$, je nachdem k eine pare oder unpare Zahl ist. Die Zahl 2 ist also quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest der Primzahl p, je nachdem diese die Form $8n\pm1$ oder die Form $8n\pm3$ hat.

25. Ist $m=2n+1$ eine unpare Primzahl, so kann, wie man sich leicht überzeugt, C_m in die Form $\frac{1}{m!2^{m-1}}+\frac{1}{m}+G$, D_m aber in die Form $\frac{(-1)^{nq}.p^n}{m!2^{m-1}}+\frac{\lambda_m}{m}+H$ gebracht werden, wo G, H Brüche sind, deren Nenner den Factor m nicht enthalten. Da nun C_m, D_m ganze Zahlen sind, so muss sowohl $1+(m-1)!2^{m-1}$, als auch $(-1)^{nq}.p^n+(m-1)!2^{m-1}.\lambda_m$, mithin auch, wenn man die erstere Summe mit $\left(\frac{m}{p}\right)=\lambda_m$ multiplicirt und sie alsdann von der letztern abzieht, $(-1)^{nq}.p^n-\left(\frac{m}{p}\right)$ durch m theilbar sein. Da endlich, wie aus 5. hervorgeht, wenn man daselbst m statt p und p statt h setzt, auch $p^n-\left(\frac{p}{m}\right)$ durch m theilbar ist, so ist auch $(-1)^{nq}.\left(\frac{p}{m}\right)-\left(\frac{m}{p}\right)$ durch m theilbar,

woraus man schliessen kann, dass $\left(\frac{m}{p}\right)=(-1)^{\pi q}.\left(\frac{p}{m}\right)$, mithin, wenn man auf beiden Seiten noch mit $\left(\frac{p}{m}\right)$ multiplicirt, $\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{p}{m}\right)=(-1)^{\pi q}$ ist.

26. Setzt man in der in 23. aufgestellten Gleichung $m=3$, so folgt, wenn $p>3$ ist,

$$C_3+D_3\varrho = \frac{(1+\varrho)^3}{24}+\frac{(1+\varrho)(1+\varrho\lambda_2)}{4}+\frac{1+\varrho\lambda_3}{3},$$

woraus sich die beiden Gleichungen ergeben:

$$C_3=\frac{1\pm 3p}{24}+\frac{1\pm p\lambda_2}{4}+\tfrac{1}{3}=\frac{5\pm p(1+2\lambda_2)}{8},$$

$$D_3=\frac{3\pm p}{24}+\frac{1+\lambda_2}{4}+\frac{\lambda_3}{3}=\frac{9+6\lambda_2+8\lambda_3\pm p}{24},$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem p die Form $4k+1$ oder die Form $4k-1$ hat. Ist also $p=8n\pm 1$, so ist $C_3=\frac{5+3(1\pm 8n)}{8}=1\pm 3n$. Ist aber $p=8n\mp 3$, so ist $C_3=\frac{5+3\mp 8n}{8}=1\mp n$.

27. Wird m als gegeben betrachtet, so sind C_m, D_m ganze Functionen von p und zwar ist, wenn m eine pare Zahl ist, die erstere vom Grade $\frac{1}{2}m$, die letztere aber vom Grade $\frac{1}{2}m-1$, während, wenn m eine unpare Zahl ist, beide vom Grade $\frac{1}{2}(m-1)$ sind. Weil aber die Coefficienten von C_m selbst wieder von den Einheiten $\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\left(\frac{2}{p}\right)$, $\left(\frac{3}{p}\right)$, ... $\left(\frac{m-1}{p}\right)$ abhängen, so ist C_m nur für alle diejenigen Werthe von p eine und dieselbe Function von p, welche, wenn man das Product aus allen Primzahlen, die kleiner als m sind, durch P_m bezeichnet, nach dem Modulus $4P_m$ congruent sind. Eben so ist, wenn man das Product aus allen Primzahlen, deren keine grösser als m ist, durch Q_m bezeichnet, D_m für alle Werthe von p, welche nach dem Modulus $4Q_m$ congruent sind, eine und dieselbe Function von p. Wenn nämlich die Differenz zweier Primzahlen p_1, p_2 sowohl durch 8 als auch durch jeden Primfactor der Zahl h theilbar ist, so ist, wie man sich leicht überzeugt, $\left(\frac{h}{p_1}\right)=\left(\frac{h}{p_2}\right)$. Dass $\left(\frac{-1}{p_1}\right)=\left(\frac{-1}{p_2}\right)$ ist, geht schon daraus hervor, weil p_1-p_2 durch 4 theilbar ist, mithin die Zahlen p_1, p_2 entweder beide die Form $4k+1$ oder beide die Form $4k-1$ haben.

Ist $m=3$, so ist $4Q_m=24$, daher man bei der Bestimmung von D_3 zu unterscheiden hat, welcher von 8 zwischen -12 und $+12$ liegenden Zahlen ± 1, ± 5, ∓ 7, ∓ 11 die Primzahl p nach dem Modulus 24 congruent ist. Ist

$p = 24n - 7$, so ist $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$, folglich $D_3 = \frac{9+6-8+p}{24}$ $= \frac{7+p}{24} = n$.

28. Wenn die Summe zweier Primzahlen p_1, p_2 sowohl durch 8 als auch durch jeden Primfactor der positiven Zahl h theilbar ist, so ist $\left(\frac{h}{p_1}\right) = \left(\frac{h}{p_2}\right)$, während $\left(\frac{-1}{p_1}\right) = -\left(\frac{-1}{p_2}\right)$ ist.

Hat nämlich p_1 die Form $8n \pm 1$, so hat p_2 die Form $8n \mp 1$. Hat aber p_1 die Form $8n \pm 3$, so hat p_2 die Form $8n \mp 3$, daher in jedem Falle $\left(\frac{2}{p_1}\right) = \left(\frac{2}{p_2}\right)$ ist. Ist h eine unpare Primzahl, so ist $\left(\frac{p_1}{h}\right) = \left(\frac{p_2}{h}\right)$ oder $\left(\frac{p_1}{h}\right) = -\left(\frac{p_2}{h}\right)$, je nachdem h die Form $4k+1$ oder $4k-1$ hat. Da nun im erstern Falle auch $\left(\frac{p_1}{h}\right)\left(\frac{h}{p_1}\right) = \left(\frac{p_2}{h}\right)\left(\frac{h}{p_2}\right)$, im letztern Falle aber, weil die eine von den Zahlen p_1, p_2 die Form $4k+1$ und die andere die Form $4k-1$ hat, $\left(\frac{p_1}{h}\right)\left(\frac{h}{p_1}\right) = -\left(\frac{p_2}{h}\right)\left(\frac{h}{p_2}\right)$ ist, so ist in jedem Falle $\left(\frac{h}{p_1}\right) = \left(\frac{h}{p_2}\right)$. Da hiernach der Satz gilt, wenn h eine Primzahl ist, durch welche $p_1 + p_2$ getheilt werden kann, so gilt er auch nach 1., wenn h ein Product aus solchen Primzahlen ist.

29. Bei der Bestimmung von C_m, hat man zu unterscheiden, welcher von den zwischen $-2P_m$ und $+2P_m$ liegenden Zahlen, deren keine mit P_m einen gemeinschaftlichen Theiler hat, die Primzahl p nach dem Modulus $4P_m$ congruent ist. Wenn nun r eine jener Zahlen ist und für $p = 4nP_m + r$

$$C_m = F(p) = F(r + 4nP_m) = \Phi(n)$$

ist, so ist für $p = 4nP_m - r$

$$C_m = F(-p) = F(r - 4nP_m) = \Phi(-n).$$

Nach dem vorigen Satze hat nämlich, was auch h für eine zwischen 0 und m liegende Zahl sein mag, $\left(\frac{h}{p}\right)$ in beiden Fällen einen und denselben Werth. Bemerkt man nun noch, dass in dem einen von den beiden Fällen p die Form $4k+1$ hat und also $\varrho^2 = p$ ist, während im andern p die Form $4k-1$ hat und also $\varrho^2 = -p$ ist, so folgt der Satz. Eben so lässt sich nachstehender Satz beweisen:

Wenn r eine zwischen $-2Q_m$ und $+2Q_m$ liegende Zahl ist, welche mit Q_m keinen gemeinschaftlichen Theiler hat und für $p = 4nQ_m + r$

$$D_m = F(p) \quad = \Phi(n)$$

ist, so ist für $p = 4nQ_m - r$

$$D_m = F(-p) = \Phi(-n).$$

Dass r zwischen den angegebenen Grenzen liege, ist für die obigen Sätze keine nothwendige Bedingung, sondern wurde nur deshalb angenommen, weil die Betrachtung dieser Fälle schon hinreichend ist.

30. Da $Q_3 = Q_4 = P_4 = P_5 = 6$ ist, so hat man bei den Bestimmungen von D_3, D_4, C_4, C_5 nur zu unterscheiden, welche von den 8 Formen $24n \pm 1$, $24n \pm 5$, $24n \mp 7$, $24n \mp 11$ die Primzahl p hat. Die Fälle, in welchen die obern Zeichen gelten, und also p die Form $4k+1$ hat, finden sich in nachstehender Tafel. Setzt man in dieser statt $24n+r$, es mag r positiv oder negativ sein, $24n-r$ und zugleich in den unter D_3, D_4, C_4, C_5 stehenden Functionen $-n$ statt n, so erhält man die den vier übrigen Fällen entsprechende Tafel.

p	D_3	D_4	C_4	C_5
$24n+1$	$n+1$	$2n+1$	$3n^2+11n+1$	$\frac{15}{2}n^2+\frac{25}{2}n+1$
$24n+5$	n	$-n$	$3n^2-2n$	$-\frac{9}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$
$24n-7$	n	$2n$	$3n^2+n$	$\frac{15}{2}n^2-\frac{1}{2}n$
$24n-11$	n	$-n+1$	$3n^2+2n-1$	$-\frac{9}{2}n^2+\frac{15}{2}n-2$

31. Da $Q_5 = Q_6 = P_6 = P_7 = 30$ ist, zwischen -60 und $+60$ aber 32 Zahlen liegen, deren keine mit 30 einen gemeinschaftlichen Theiler hat, so hat man bei den Bestimmungen von D_5, D_6, C_6, C_7 32 Fälle zu unterscheiden. Nachstehende Tafel beschränkt sich auf die Functionen D_5, D_6, C_6 und enthält nur vier Fälle. Wie sich aber die Tafel für die erwähnten Functionen leicht vervollständigen lasse, ist weiter unten angegeben.

p	D_5	D_6	C_6
$120n+1$	$\frac{15}{2}n^2+\frac{29}{2}n+1$	$\frac{45}{2}n^2+\frac{37}{2}n+1$	$75n^3+\frac{5.127}{2}n^2+\frac{137}{2}n+1$
$120n-7$	$\frac{15}{2}n^2+\frac{7}{2}n$	$\frac{45}{2}n^2+\frac{1}{2}n$	$75n^3+\frac{5.41}{2}n^2+\frac{3}{2}n$
$120n-11$	$\frac{15}{2}n^2+\frac{11}{2}n$	$-15n^2+4n$	$75n^3+5.29n^2-9n$
$120n+29$	$\frac{15}{2}n^2+\frac{1}{2}n$	$-15n^2-n+1$	$75n^3+5.4n^2+11n+3$

28 *

Ist nun für $p = 120n + r$

$$D_5 = \Phi(n), \quad D_6 = \Phi_1(n), \quad C_6 = \Phi_2(n),$$

so ist (29.) für $p = 120n - r$

$$D_5 = \Phi(-n), \quad D_6 = \Phi_1(-n), \quad C_6 = \Phi_2(-n).$$

Wenn ferner $\frac{r_1 - r}{24} = \varepsilon$ eine ganze Zahl ist und $\left(\frac{r_1}{5}\right) - \left(\frac{r}{5}\right) = 2\delta$ gesetzt wird, so ist für $p = 120n + r_1$

$$D_5 = \Phi\left(n + \frac{\varepsilon}{5}\right) + \frac{2\delta}{5}, \; D_6 = \Phi_1\left(n + \frac{\varepsilon}{5}\right) + \frac{\delta}{5}, \; C_6 = \Phi_2\left(n + \frac{\varepsilon}{5}\right) \pm \delta\left(24n + \frac{r_1}{5}\right),$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem r_1 oder $-r_1$ die Form $4k+1$ hat. Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Gleichungen, wenn man D_5, D_6, C_6 zuerst als Functionen von p darstellt und dann bemerkt, dass $\left(\frac{-1}{p}\right)$, $\left(\frac{2}{p}\right)$, $\left(\frac{3}{p}\right)$ dieselben Werthe haben, es mag $p = 120n + r$ oder $= 120n + r_1$ gesetzt werden.

Sucht man die Functionen D_5, D_6, C_6 für $p = 120n + 31$, so hat man $r_1 = 31$, für r aber diejenige von den Zahlen ± 1, ∓ 7, ∓ 11, ± 29, welche nach dem Modulus 24 der Zahl 31 congruent ist, nämlich die Zahl 7 zu setzen. Da alsdann $\varepsilon = 1$ und $\delta = 1$ wird und da für $p = 120n + 7$

$$D_5 = \frac{15}{2}n^2 - \frac{7}{2}n, \quad D_6 = \frac{45}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n, \quad C_6 = -75n^3 + \frac{5.41}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

ist, so ist für $p = 120n + 31$

$$D_5 = \frac{15}{2}\left(n + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(n + \frac{1}{5}\right) + \frac{2}{5} = \frac{15}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n,$$

$$D_6 = \frac{45}{2}\left(n + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{45}{2}n^2 + \frac{17}{2}n + 1$$

$$C_6 = -75\left(n + \frac{1}{5}\right)^3 + \frac{5.41}{2}\left(n + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(n + \frac{1}{5}\right) - \left(24n + \frac{31}{5}\right)$$

$$= -75n^3 + \frac{5.23}{2}n^2 + \frac{13}{2}n - 3.$$

32. Nach 13. kann man, wenn C_m, D_m bekannt sind, auch f_m, φ_m und ψ_m finden.

Ist $p = 8n \pm 1$, so ist $\varphi_2 = n - 1$, $\psi_2 = n$.

Ist $p = 8n + 4 \pm 1$, so ist $\varphi_2 = \psi_2 = n$.

33. Wenn s, $s+1$ zwei auf einander folgende Glieder der Reihe

$$1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; (p-1)$$



sind und $\left(\frac{s}{p}\right)=\left(\frac{s+1}{p}\right)$ ist, so soll gesagt werden, dass die Zahlen s, $s+1$ eine Folge I. oder II. Art bilden, je nachdem beide quadratische Reste oder quadratische Nichtreste der Zahl p sind. Ist aber $\left(\frac{s}{p}\right)=-\left(\frac{s+1}{p}\right)$, so soll s, $s+1$ ein Wechsel I. oder II. Art heissen, je nachdem die kleinere oder die grössere von den beiden Zahlen quadratischer Rest ist. Wenn man nun die Anzahl aller Folgen I. Art durch (R, R), die Anzahl aller Wechsel I. Art durch (R, N), die Anzahl aller Wechsel II. Art durch (N, R) und die Anzahl aller Folgen II. Art durch (N, N) bezeichnet und $p=4k\pm1$ setzt, so ist $(R, R)=k-1$, $(R, N)=k$, hingegen $(N, R)=(N, N)=k$ oder $=k-1$, je nachdem $p=4k+1$ oder $=4k-1$ ist.

Da nämlich die obige Reihe mit einem quadratischen Reste anfängt, so ist $(R, R)+(N, R)=\frac{1}{2}(p-3)$, während $(R, N)+(N, N)=\frac{1}{2}(p-1)$ ist. Da ferner nach 11. die Gleichung $x+y=p+1$, in welcher x eine Zahl des Systems (α), y aber eine Zahl des Systems (β) sein soll, $\frac{1}{4}(p-1)$ oder $\frac{1}{4}(p-3)$ Auflösungen zulässt, je nachdem $p=4k+1$ oder $=4k-1$ ist, und da im erstern Falle $p-y$, x ein Wechsel II. Art und $p-x$, y ein Wechsel I. Art, im letztern Falle aber $p-y$, x eine Folge I. Art und $p-x$, y eine Folge II. Art ist, so ist im erstern Falle $(N, R)=(R, N)=\frac{1}{4}(p-1)$, folglich $(R, R)=\frac{1}{2}(p-3)-\frac{1}{4}(p-1)=\frac{1}{4}(p-5)$ und $(N, N)=\frac{1}{2}(p-1)-\frac{1}{4}(p-1)=\frac{1}{4}(p-1)$, im letztern aber $(R, R)=(N, N)=\frac{1}{4}(p-3)$, folglich $(N, R)=\frac{1}{2}(p-3)-\frac{1}{4}(p-3)=\frac{1}{4}(p-3)$ und $(R, N)=\frac{1}{2}(p-1)-\frac{1}{4}(p-3)=\frac{1}{4}(p+1)$, woraus der Satz sich ergiebt *).

*) Leider habe ich die traurige Pflicht, den Lesern dieses Journals gleichzeitig mit dieser Abhandlung die Nachricht von dem Tode ihres hochverdienten Verfassers, dem dies Journal manchen werthvollen Beitrag verdankt, mittheilen zu müssen.

Georg Karl Christian von Staudt, 1798 zu Rothenburg an der Tauber geboren, einer der hervorragendsten Mathematiker aus der *Gauss*'schen Schule, seit 1835 Prof. ord. an der Universität zu Erlangen, starb am 1. Juni d. J., während er mit der Durchsicht der Correcturbogen der vorstehenden Abhandlung beschäftigt war. Seitdem er dieselbe vollendet und mir für das mathematische Journal zugesandt hatte, beschäftigte er sich mit geometrischen Untersuchungen und verfasste in den letzten drei Wochen seines Lebens eine Abhandlung „von den reellen und imaginären Halbmessern der Curven und Flächen zweiter Ordnung", welche demnächst als besondere Schrift bei *Korn* in Nürnberg erscheinen soll. So hinterlässt der berühmte Verfasser der „Geometrie der Lage" in seinen beiden letzten Arbeiten Untersuchungen aus den beiden Gebieten, denen er sich während seines Lebens immer mit besonderer Vorliebe gewidmet hatte, der Geometrie und der Theorie der Zahlen. *B.*

Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich.)

Die sogenannten Minimumsflächen besitzen eine merkwürdige Eigenschaft, welche ich bei Gelegenheit meiner Abhandlung über die Bestimmung krummer Oberflächen durch locale Messungen auf denselben (dieses Journal Band 64) Herrn *Weierstrass* mitgetheilt habe. Dieselbe besteht in Folgendem.

1. Seien S und S' zwei Minimumsflächen, d. h. solche, für welche die Summe der beiden Hauptkrümmungen in jedem Punkte $=0$ ist. Nachdem jede von diesen Flächen in eine beliebige Lage gebracht worden ist, wähle man auf ihnen Flächenstücke T, T' so aus, dass 1) auf keinem von beiden dieselbe Normalenrichtung zweimal, dagegen 2) jede auf dem einen stattfin- Normalenrichtung auch auf dem andern vorkommt.

Betrachtet man unter diesen Voraussetzungen einen Punkt m' von T' als Bild desjenigen Punktes m von T, für welchen die gleiche Normalenrichtung stattfindet, so wird T' ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von T.

Bei diesem Satze ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass die Flächen S, S' sich nur durch ihre Lage im Raume von einander unterscheiden. Durch blosse Drehung einer Minimumsfläche kann man also beliebig viele Abbildungen derselben auf sich selbst erhalten.

2. Der obige Satz bleibt bestehen, wenn eine der Flächen S, S' durch eine Kugel ersetzt wird.

Aus diesem zweiten Satze folgt der erste durch Wiederholung. Da ausserdem alle Abbildungen einer Kugelfläche auf einer Ebene bekannt sind, so sind es auch alle Abbildungen einer Minimumsfläche, wie zuerst von Herrn *Weingarten* gefunden worden ist*).

Ich habe mich veranlasst gesehen, diesen Gegenstand weiter zu verfolgen, und namentlich zu untersuchen, welche Flächen T überhaupt die Eigenschaft haben, dass sich ihnen eine zweite T' zuordnen lässt, welche, ohne zu T homothetisch zu sein, ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von T liefert, wenn sie nach obigem Princip auf T bezogen wird. Von dieser Unter-

*) Vergl. die reichhaltige Abhandlung: Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des andern ist. Dieses Journal Band 62, pag. 164, 165.

suchung sind selbstverständlich alle diejenigen Flächen T ausgeschlossen, auf denen jede überhaupt vorhandene Normalenrichtung eine Linie bestimmt, also die auf eine Ebene abwickelbaren Flächen.

Es hat sich herausgestellt, dass die verlangte Eigenschaft eine Flächenfamilie begründet, welche sich auch als das System derjenigen Flächen definiren lässt, die ein ebenes Bild gestatten, in welchem ihre Krümmungslinien durch zwei Schaaren zu einander senkrechter Geraden dargestellt werden. Es besitzt hiernach jede Fläche, an welcher die zuerst erwähnte Eigenschaft nachgewiesen ist, auch die zweite, und umgekehrt.

Diese Flächenfamilie ist sehr umfassend; mittelst der Formel B. des art. V., welche das Kriterium derselben enthält, findet man leicht, dass zu ihr nicht bloss die Minimumsflächen im gewöhnlichen Sinne, sondern allgemein diejenigen gehören, deren mittlere Krümmung constant ist, also die Minimumsflächen über gegebenem Volumen; ausserdem gehören hierhin alle Flächen zweiten Grades, alle Rotationsflächen, u. s. w.

In dieser Familie entspricht jeder Fläche T eine andere T', und im Allgemeinen auch nur eine nebst ihren homothetischen, welche durch T ihrer Gestalt und Lage nach bestimmt ist, wenn von Translationen ohne Drehungen abgesehen wird, die an der Abbildung nichts ändern. Die einzige Ausnahme hiervon bildet die Kugel, für welche die Aufgabe, T' zu finden, unbestimmt ist, weil sie selbst jeder beliebigen Minimumsfläche entspricht.

Da die einfachen Hülfsmittel, welche ich bei dieser Untersuchung benutzt habe, sich auch bei anderen Gelegenheiten als brauchbar erweisen, so erlaube ich mir, im Folgenden zu zeigen, wie sich im Anschlusse an einen directen Beweis der obigen Sätze über Minimumsflächen die übrigen Resultate ergeben haben. Jene Sätze selbst habe ich ursprünglich aus dem art. IV. meiner oben erwähnten Arbeit erhalten.

I.

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der Aufstellung der geometrischen Bedingungen, welche erforderlich sind, damit zwei Flächen T, T' einander ähnlich werden, wenn jedem Punkte m von T sein Bild m' auf T' durch die Bedingung gleicher Normalenrichtung zugeordnet wird, in welchem Falle m und m' entsprechende Punkte heissen sollen.

Zu dem Zwecke bestimme man nach *Gauss* (Disqu. gen. circa superf. c. I.) eine Richtung im Raume mit Hülfe einer Kugel K vom Halbmesser 1 durch den Punkt, in welchem ein gleichgerichteter Halbmesser auf der Kugel-

fläche endigt. Sind also N, N' die Normalen der Flächen T, T' in den Punkten m, m', so werden diese Punkte einander entsprechen, sobald beide Normalen dem nämlichen Punkte $\mathfrak{N}$ von K entsprechen. Damit ferner zwei von entsprechenden Punkten m, m' ausgehende Linienelemente ∂s, $\partial s'$ der Flächen T, T' in entsprechenden Punkten endigen, müssen auch in ihren Endpunkten die Normalen dem nämlichen Punkte $\mathfrak{P}$ von K entsprechen. Der unendlich kleine sphärische Bogen $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \varDelta$ giebt dann den Winkel an, um den sich die Normale N dreht, wenn ihr Fusspunkt von m aus ∂s beschreibt.

Wir haben nun zu untersuchen, welche Bedingungen erforderlich sind, damit das Verhältniss der entsprechenden Linienelemente ∂s, $\partial s'$ von der Lage des ihre Endpunkte bestimmenden Punktes $\mathfrak{P}$ unabhängig wird.

Seien ∂N_1, ∂N_2 in m beginnende Bogenelemente der beiden Krümmungslinien von T, ϱ_1, ϱ_2 die ihnen entsprechenden Krümmungshalbmesser der Fläche. Ferner sei δ_2 der Winkel, um den sich ϱ_1 dreht, wenn sein Fusspunkt ∂N_1 durchläuft, ebenso δ_1 der Winkel, um den sich ϱ_2 dreht, wenn sein Fusspunkt ∂N_2 durchläuft, also abgesehen vom Zeichen $\partial N_1 = \varrho_1 \delta_2$, $\partial N_2 = \varrho_2 \delta_1$ und $\partial s^2 = \varrho_1^2 \delta_2^2 + \varrho_2^2 \delta_1^2$. Haben ϱ_1', ϱ_2', δ_1', δ_2' dieselbe Bedeutung für die Fläche T' im Punkte m', so wird $\partial s'^2 = \varrho_1'^2 \delta_2'^2 + \varrho_2'^2 \delta_1'^2$ und mithin das zu untersuchende Verhältniss

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial s}\right)^2 = \frac{\varrho_1'^2 \delta_2'^2 + \varrho_2'^2 \delta_1'^2}{\varrho_1^2 \delta_2^2 + \varrho_2^2 \delta_1^2}.$$

Daraus ergeben sich die Sätze über die Minimumsflächen sofort. Nimmt man nämlich $\varrho_1'^2 = \varrho_2'^2$, $\varrho_1^2 = \varrho_2^2$, d. h. für T und T' Minimums- oder Kugelflächen, so heben die Drehungswinkel sich weg, indem aus der Betrachtung der Kugel K $\varDelta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 = \delta_1'^2 + \delta_2'^2$ folgt.

Ist nun, um zur allgemeinen Untersuchung überzugehen, o das Centrum der Kugel K und sind $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_1'$, $\mathfrak{N}_2'$ diejenigen Punkte des durch $\mathfrak{N}$ als Pol bestimmten Aequators, welche den Richtungen ∂N_1, ∂N_2, $\partial N_1'$, $\partial N_2'$ der Krümmungslinien von T und T' entsprechen, so folgt, weil der Punkt $\mathfrak{P}$ von K sowohl dem Endpunkte von ∂s, als auch dem von $\partial s'$ entspricht, dass der Uebergang von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{P}$ auf folgende zwei Arten bewirkt werden kann:

1. indem man zwei unendlich kleine Drehungen um die Axen $o\mathfrak{N}_1$, $o\mathfrak{N}_2$ zusammensetzt, von denen die erste den Winkel δ_1, die andere den Winkel δ_2 beträgt;

2. indem man zwei die Winkel δ_1', δ_2' betragende Drehungen um die Axen $o\mathfrak{N}_1'$, $o\mathfrak{N}_2'$ zusammensetzt.

Dies festgestellt, zählen wir auf dem Aequator von $\mathfrak{N}_1$ aus Längen, die nach $\mathfrak{N}_2$ hin wachsen und setzen fest, was offenbar gestattet ist, dass von den Punkten $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$ der zweite die grössere Länge hat. Ist alsdann α die Länge von $\mathfrak{N}'_1$, λ die Länge des Meridians $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$, so wird, weil alle Bogen δ unendlich klein sind, $\delta_1 = \varDelta \sin\lambda$, $\delta_2 = \varDelta\cos\lambda$, $\delta'_1 = \varDelta\sin(\lambda-\alpha)$, $\delta'_2 = \varDelta\cos(\lambda-\alpha)$, mithin

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial s}\right)^2 = \frac{\varrho_1'^2\cos^2(\lambda-\alpha)+\varrho_2'^2\sin^2(\lambda-\alpha)}{\varrho_1^2\cos\lambda^2+\varrho_2^2\sin\lambda^2},$$

sobald ∂s, $\partial s'$ in entsprechenden Punkten anfangen und endigen.

Dieser Ausdruck soll nun von der Lage des Punktes $\mathfrak{P}$, d. h. von λ unabhängig sein. Man erkennt ohne Mühe, dass diese Bedingung für jeden beliebigen Werth von α, d. h. unabhängig von den Richtungen, in denen die Krümmungslinien der Flächen T, T' von m, m' ausgehen, nur dann erfüllt wird, wenn zugleich $\varrho_1'^2 = \varrho_2'^2$, $\varrho_1^2 = \varrho_2^2$ ist, was den bereits oben erledigten Fall liefert.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann das Verhältniss der beiden Linienelemente nur noch in dem Falle von λ unabhängig sein, wenn $\alpha = 0$ oder ein Vielfaches von 90^0 ist. In allen diesen Fällen wird jedem der beiden von m ausgehenden Krümmungslinienelemente eines der beiden von m' ausgehenden parallel; wir schliessen daher keinen Fall aus, wenn wir

$$\alpha = 0$$

setzen, d. h. fordern, dass $\partial N'_1$ mit ∂N_1, $\partial N'_2$ mit ∂N_2 gleiche Richtung habe. Dann wird

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial s}\right)^2 = \frac{\varrho_1'^2\cos\lambda^2+\varrho_2'^2\sin\lambda^2}{\varrho_1^2\cos\lambda^2+\varrho_2^2\sin\lambda^2},$$

und dies wird nur dann von λ unabhängig, wenn $\varrho_1'^2 : \varrho_1^2 = \varrho_2'^2 : \varrho_2^2$, d. h. entweder $\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} = \frac{\varrho'_2}{\varrho_2}$, oder $\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} = -\frac{\varrho'_2}{\varrho_2}$ wird.

Die zweite von diesen beiden Lösungen liefert den allgemeinen Satz:

Wenn zwei Flächen T und T' in der Beziehung zu einander stehen, dass in je zwei durch gleiche Normalenrichtung einander entsprechenden Punkten m, m' derselben 1) *auch die Hauptschnitte beider Flächen einander parallel werden, und* 2) *zwischen den Verhältnissen der Krümmungen paralleler Hauptschnitte die Relation*

$$\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} + \frac{\varrho'_2}{\varrho_2} = 0$$

stattfindet, so wird T' ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von T, wenn jeder Punkt m' als das Bild des entsprechenden Punktes m angesehen wird.

In diesem Satze sind die auf die Minimumsflächen bezüglichen ebenfalls enthalten. Nimmt man nämlich für T' eine Minimumsfläche, so folgt aus der zweiten Bedingung, dass T eine Kugelfläche sein muss, und diese genügt offenbar auch der ersten Bedingung.

Die erste Lösung führt auf ganz elementare Resultate, die hauptsächlich als Vervollständigung des vorigen Satzes aufzufassen sind. In der That fordert dieselbe, wie leicht zu sehen ist, und auch aus den folgenden Untersuchungen hervorgeht, nichts anderes, als dass T und T' homothetisch sind, woraus dann freilich, da die Aehnlichkeit für beliebig grosse perspectivisch liegende Theile vorhanden ist, auch die Aehnlichkeit der kleinsten Theile folgt.

Es ergiebt sich aber hieraus, *dass ausser den durch den ersten Satz bestimmten Flächenpaaren und ihren homothetischen keine andern existiren, welche die von uns geforderten Eigenschaften besitzen.*

II.

Es wirft sich jetzt die Frage auf, wie und unter welchen Voraussetzungen die Bedingungen des obigen Satzes befriedigt werden können.

Zu dem Zwecke bemerken wir zunächst, was aus der zweiten Bedingung folgt, dass in entsprechenden Punkten nothwendig die eine Fläche gewölbt, die andere sattelförmig gebogen sein muss. Um über bestimmte Vorstellungen zu verfügen, wollen wir daher, was auf den schliesslichen Verlauf der Untersuchung keinen Einfluss mehr haben wird, festsetzen, es seien ϱ_1, ϱ_2, ϱ'_1 positiv, ϱ'_2 dagegen sei negativ.

Wir bezeichnen nun die rechtwinkligen Coordinaten von m durch x, y, z, durch x', y', z' diejenigen von m', ausserdem die Richtungscosinus der Normale der ersten und zweiten Krümmungslinie in m, also wegen des geforderten Parallelismus auch in m' durch a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2, wobei die Vorzeichen der Grössen a, b, c so gewählt sein sollen, dass die durch sie bestimmte Richtung der Normale derjenigen entgegengesetzt wird, in welcher von der Oberfläche aus die positiven Krümmungshalbmesser aufgetragen werden.

In Folge des Parallelismus der Krümmungslinien werden auch die Drehungswinkel um die zu ihren Tangenten parallelen Axen für beide Flächen gleich, also $\delta'_1 = \delta_1$, $\delta'_2 = \delta_2$.

Wir bestimmen nun zunächst die Grössen, um welche die Coordinaten von m und m' und die Richtungscosinus der Normale in Folge dieser Drehungen zunehmen.

Dreht man die Normale um eine zur Tangente der zweiten Krümmungslinie parallele und durch das Krümmungscentrum des ersten Hauptschnitts gehende Axe herum, bis der Drehungswinkel δ_2 geworden ist, so durchläuft ihr Fusspunkt auf beiden Flächen die erste Krümmungslinie, und weil ϱ_1, ϱ_1' positiv sind, beide in derselben Richtung. Die zurückgelegten Wege sind $\partial N_1 = \varrho_1 \delta_2$, $\partial N_1' = \varrho_1' \delta_2$, mithin die Zunahmen von x und x':

$$\underset{1}{\partial} x = a_1 \varrho_1 \delta_2, \quad \underset{1}{\partial} x' = a_1 \varrho_1' \delta_2,$$

vorausgesetzt, dass man den Drehungswinkel δ_2 positiv oder negativ nimmt, jenachdem m sich in der Richtung $a_1 b_1 c_1$, oder ihr entgegen bewegt.

Nach der Lehre von der Krümmung der Flächen ist aber auch $\underset{1}{\partial} x = \varrho_1 \underset{1}{\partial} a$, $\underset{1}{\partial} x' = \varrho_1' \underset{1}{\partial} a$, woraus in beiden Fällen

$$\underset{1}{\partial} a = a_1 \delta_2$$

folgt.

Dreht man die Normale um eine zur Anfangsrichtung der ersten Krümmungslinie parallele und durch das Krümmungscentrum des zweiten Hauptschnittes gehende Axe herum, bis der Drehungswinkel δ_1 geworden ist, so durchläuft ihr Fusspunkt auf beiden Flächen die zweite Krümmungslinie, aber in entgegengesetzten Richtungen. Sind ∂N_2, $\partial N_2'$ die wirklich zurückgelegten Wege, so nimmt x um $a_2 \partial N_2$ zu, x' um $a_2 \partial N_2'$ ab. Nun ist $\partial N_2 = \varrho_2 \delta_1$, $\partial N_2' = -\varrho_2' \delta_1$, also wachsen x und x' um

$$\underset{2}{\partial} x = a_2 \varrho_2 \delta_1, \quad \underset{2}{\partial} x' = a_2 \varrho_2' \delta_1,$$

wieder vorausgesetzt, dass δ_1 positiv oder negativ genommen wird, jenachdem m sich in der Richtung $a_2 b_2 c_2$ oder ihr entgegen bewegt.

Da ausserdem $\underset{2}{\partial} x = \varrho_2 \underset{2}{\partial} a$, $\underset{2}{\partial} x' = \varrho_2' \underset{2}{\partial} a$ ist, so folgt

$$\underset{2}{\partial} a = a_2 \delta_1.$$

Daraus ergeben sich für die vollständigen Differentiale die folgenden wichtigen Formeln:

$$\begin{array}{lll} \partial x = a_1 \varrho_1 \delta_2 + a_2 \varrho_2 \delta_1, & \partial y = b_1 \varrho_1 \delta_2 + b_2 \varrho_2 \delta_1, & \partial z = c_1 \varrho_1 \delta_2 + c_2 \varrho_2 \delta_1, \\ \partial a = \quad a_1 \delta_2 + \quad a_2 \delta_1, & \partial b = \quad b_1 \delta_2 + \quad b_2 \delta_1, & \partial c = \quad c_1 \delta_2 + \quad c_2 \delta_1, \\ \partial x' = a_1 \varrho_1' \delta_2 + a_2 \varrho_2' \delta_1, & \partial y' = b_1 \varrho_1' \delta_2 + b_2 \varrho_2' \delta_1, & \partial z' = c_1 \varrho_1' \delta_2 + c_2 \varrho_2' \delta_1, \end{array}$$

von denen die auf die Fläche T allein bezüglichen für jede beliebige Fläche gelten. Aus den bei ihrer Herleitung unterschiedenen Fällen ergiebt sich

übrigens, dass diese Formeln von den zu Eingange über die Vorzeichen der Krümmungshalbmesser gemachten Voraussetzungen unabhängig, also auf beide Fälle des vorigen art. anwendbar sind.

III.

Setzt man nun, um die erste Lösung des art. I. zu befriedigen, $\varrho_1' = k\varrho_1$, $\varrho_2' = k\varrho_2$, so wird $\partial x' = k\partial x$, $\partial y' = k\partial y$, $\partial z' = k\partial z$. Damit diese Gleichungen eine Fläche T' bestimmen können, müssen ihre rechten Seiten vollständige Differentiale sein. Betrachtet man z als Function von x, y, so folgt aus der ersten Gleichung, dass k von y, aus der zweiten, dass es von x unabhängig, also constant sein muss. Diese Lösung liefert also, wie schon früher angewandt worden ist, zu jeder beliebigen Fläche ihre sämmtlichen homothetischen.

IV.

Zur Befriedigung der zweiten Lösung

$$\frac{\varrho_1'}{\varrho_1} + \frac{\varrho_2'}{\varrho_2} = 0$$

setzen wir $\varrho_2' = H\varrho_2$, $\varrho_1' = -H\varrho_1$. Dann wird $\underset{1}{\partial} x' = -H\underset{1}{\partial} x$, $\underset{2}{\partial} x' = H\underset{2}{\partial} x$, u. s. w.

Nennt man nun diejenige Seite einer Fläche, von welcher ihre Normalen ausgehen, ihre Vorderseite, so ergiebt sich aus diesen Formeln zunächst, dass im vorliegenden Falle die Vorderseite von T auf der Rückseite von T' abgebildet wird, und umgekehrt, vorausgesetzt, dass man unter einer Abbildung eine im gewöhnlichen Sinne, also nicht verkehrt ähnliche versteht.

Sodann ergeben sich für die vollständigen Differentiale die Gleichungen

$$\partial x' = H(\underset{2}{\partial} x - \underset{1}{\partial} x), \qquad \partial y' = H(\underset{2}{\partial} y - \underset{1}{\partial} y), \qquad \partial z' = H(\underset{2}{\partial} z - \underset{1}{\partial} z),$$

von denen zunächst gezeigt werden soll, dass sie aus den Bedingungen unserer Untersuchung nicht bloss folgen, sondern dieselben auch umgekehrt nach sich ziehen.

Sind nämlich a, b, c die Richtungscosinus der Normale von T, so sind sie es auch für T', weil aus den vorstehenden Gleichungen

$$a\partial x' + b\partial y' + c\partial z' = 0$$

folgt.

Da ferner die Krümmungslinienelemente ∂N_1, ∂N_2 auf einander senkrecht stehen, so folgt $\partial s'^2 = H^2(\partial N_1^2 + \partial N_2^2) = H^2 \partial s^2$, also ist T' ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von T.

Auf Grund dieser beiden Folgerungen ergiebt sich endlich nach art. I. auch der Parallelismus der Krümmungslinien beider Flächen.

Folglich enthalten die vorstehenden Differentialgleichungen alle für die gegenwärtige Aufgabe nothwendigen und ausreichenden Bedingungen.

Setzt man $\frac{\varrho_1\varrho_2}{\varrho_1-\varrho_2}H=\Omega$, so lassen die obigen Gleichungen sich in die Form

$$(\mathfrak{A}.)\quad\begin{cases}\partial x' = \Omega\left[2\,\partial a-\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\partial x\right],\\ \partial y' = \Omega\left[2\,\partial b-\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\partial y\right],\\ \partial z' = \Omega\left[2\,\partial c-\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\partial z\right]\end{cases}$$

bringen. Dieselbe zeigt sofort, dass unsere ursprüngliche Aufgabe, die Bedingungen zu ermitteln, damit zu einer gegebenen Fläche T eine sie in der verlangten Weise abbildende existire, auf die Herstellung und Deutung der Integrabilitätsbedingungen zurückgeführt ist, welche erforderlich sind und hinreichen, damit die drei vorstehenden Ausdrücke zugleich vollständige Differentiale werden.

Es ist indessen zweckmässig, für diese Untersuchung die Differentialgleichungen so viel wie möglich in der ursprünglichen einfachsten Form beizubehalten.

V.

Wir setzen voraus, dass x, y und z als Functionen zweier von einander unabhängiger Variabeln u_1, u_2 in der Weise dargestellt sind, dass der Gleichung $\partial u_1=0$ diejenige Schaar Krümmungslinien von T entspricht, welcher die vorhin als erste bezeichnete angehört, der Gleichung $\partial u_2=0$ die andere Schaar. Bezeichnet man daher die Derivirten von x, y, z nach u_1, u_2 durch x_1, x_2, x_{12}, u. s. w., so wird

$$\underset{1}{\partial} x = x_2\,\partial u_2,\qquad \underset{2}{\partial} x = x_1\,\partial u_1,\qquad \text{u. s. w.}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen $\underset{1}{\partial} x=\varrho_1\underset{1}{\partial} a$, $\underset{1}{\partial} x=\varrho_2\underset{2}{\partial} a$, wenn

$$\frac{1}{\varrho_1}=r_1,\qquad \frac{1}{\varrho_2}=r_2$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial a}{\partial u_2}=r_1x_2,\qquad \frac{\partial a}{\partial u_1}=r_2x_1,$$

mithin durch Elimination von a

$$(1.)\qquad x_{12} = \frac{1}{r_1-r_2}\left(\frac{\partial r_2}{\partial u_2}x_1-\frac{\partial r_1}{\partial u_1}x_2\right),$$

wozu noch zwei ähnliche Gleichungen für y und z kommen. Ausserdem ist

$$(2.)\qquad x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0.$$

Dies vorausgeschickt, nehmen die Differentialgleichungen des vorigen art. die folgende Form an:

$$(A.)\qquad \begin{cases} \partial x' = H(x_2\partial u_2-x_1\partial u_1), \\ \partial y' = H(y_2\partial u_2-y_1\partial u_1), \\ \partial z' = H(z_2\partial u_2-z_1\partial u_1). \end{cases}$$

Für $\log H = Z$ liefert die erste als Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial Z}{\partial u_1}x_2+\frac{\partial Z}{\partial u_2}x_1+2x_{12} = 0,$$

oder wegen (1.)

$$\left[\frac{\partial Z}{\partial u_1}-\frac{2}{r_1-r_2}\frac{\partial r_1}{\partial u_1}\right]x_2+\left[\frac{\partial Z}{\partial u_2}+\frac{2}{r_1-r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u_2}\right]x_1 = 0.$$

Mit Rücksicht auf (2.) folgt aus dieser und den beiden hierzugehörigen Gleichungen, dass nothwendig

$$\frac{\partial Z_1}{\partial u_1} = \frac{2}{r_1-r_2}\frac{\partial r_1}{\partial u_1},\qquad \frac{\partial Z_2}{\partial u_2} = -\frac{2}{r_1-r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u_2}$$

sein muss, und umgekehrt sind mit diesen beiden zugleich alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

Damit aber diese beiden Gleichungen mit einander bestehen können, ist erforderlich und hinreichend, dass

$$(B.)\qquad \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{r_1-r_2}\frac{\partial r_1}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{r_1-r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u_2}\right) = 0$$

sei. Ist diese Bedingung erfüllt, so liefern also die vorstehenden Ausdrücke für ∂Z ein vollständiges Differential, und die so bestimmte Function

$$H = e^Z$$

macht auch die Ausdrücke für $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ zu vollständigen Differentialen. Zugleich ist ersichtlich, dass der letztern Forderung auf keine andere Weise genügt werden kann.

Es bedarf nur noch der geometrischen Interpretation von (*B.*). Sei

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2 = \xi_1^2,\qquad x_2^2+y_2^2+z_2^2 = \xi_2^2,$$

so folgt aus (1.) und (2.)

$$(3.)\quad \frac{1}{r_1-r_2}\frac{\partial r_2}{\partial u_2} = \frac{\partial \log \xi_1}{\partial u_2}, \qquad \frac{1}{r_1-r_2}\frac{\partial r_1}{\partial u_1} = -\frac{\partial \log \xi_2}{\partial u_1},$$

wodurch (*B.*) in

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\xi_1}{\xi_2}}{\partial u_1 \partial u_2} = 0$$

übergeht. Diese Gleichung fordert also, dass $\log \frac{\xi_1}{\xi_2}$ sich als Differenz einer bloss von u_1 und einer bloss von u_2 abhängigen Function darstellen lasse, dass also

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\psi(u_1)}{\psi(u_2)}$$

dem Quotienten aus zwei solchen Functionen gleich sei.

Führt man nun, was an den frühern Voraussetzungen nichts ändert, mittelst der Gleichungen $\psi(u_1)\partial u_1 = \partial u_1'$, $\psi(u_2)\partial u_2 = \partial u_2'$ zwei neue Variabeln u_1', u_2' ein, so folgt, dass die Allgemeinheit unseres Resultates nicht geändert wird, wenn wir $\psi(u_1)$ und $\psi(u_2)$ constant und einander gleich setzen. Dann wird die Lösung von (*B.*)

$$(4.)\quad \xi_1 = \xi_2.$$

Damit also die Gleichungen (*A.*) durch passende Wahl von H integrabel gemacht werden können, ist erforderlich und hinreichend, dass das Quadrat des Linienelementes von T sich in die Form $\partial s^2 = \xi_1^2(\partial u_1^2 + \partial u_2^2)$ bringen lasse, während $\partial u_1 = 0$, $\partial u_2 = 0$ die Differentialgleichungen der beiden Schaaren Krümmungslinien von T sind. Wir haben hiernach den Satz:

Damit einer Fläche T eine zweite T' in der oben verlangten Weise zugeordnet werden könne, ist erforderlich und hinreichend, dass T ein in den kleinsten Theilen ähnliches ebenes Bild gestatte, in welchem seine Krümmungslinien durch zwei Schaaren zu einander senkrechter Geraden dargestellt werden.

Und umgekehrt können alle Flächen T, zu denen die Gleichungen ($\mathfrak{A}$.) *oder* (*A.*) *eine zugeordnete T' liefern, in dieser Weise auf einer Ebene abgebildet werden.*

Bezeichnet man bei der Abbildung von T auf der Ebene der u_1, u_2 das Vergrösserungsverhältniss durch $\frac{1}{m}$, so wird

$$\partial s^2 = m^2(\partial u_1^2 + \partial u_2^2),$$

und es ergeben sich für die Familie der Flächen T aus (4.), (2.), (1.) und (3.) die Differentialgleichungen:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=m^2,\quad x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0,\quad x^2+y_2^2+z_2^2=m^2,$$

$$x_{12} = \frac{\partial \log m}{\partial u_1}x_2+\frac{\partial \log m}{\partial u_2}x_1,$$

$$y_{12} = \frac{\partial \log m}{\partial u_1}y_2+\frac{\partial \log m}{\partial u_2}y_1,$$

$$z_{12} = \frac{\partial \log m}{\partial u_1}z_2+\frac{\partial \log m}{\partial u_2}z_1.$$

Ist T diesen Gleichungen gemäss bestimmt, so wird

$$\partial Z = -2\frac{\partial \log m}{\partial u_1}\partial u_1-2\frac{\partial \log m}{\partial u_2}\partial u_2,$$

also $Z=\text{const.}-2\log m$,

$$H = \frac{A}{m^2},$$

so dass man zur Bestimmung von T' die integrabeln Gleichungen

$$\partial x' = \frac{A}{m^2}(x_1\partial u_1-x_2\partial u_2),$$

$$\partial y' = \frac{A}{m^2}(y_1\partial u_1-y_2\partial u_2),$$

$$\partial z' = \frac{A}{m^2}(z_1\partial u_1-z_2\partial u_2)$$

erhält.

Es ist hier nicht der Ort, diesen Gegenstand durch Ausführung von Beispielen weiter zu verfolgen.

Zürich, 2. April 1867.

Ueber ein Princip der Abbildung der Theile einer krummen Oberfläche auf einer Ebene.

(Von Herrn *H. Weber* zu Heidelberg.)

Die Aufgabe, ein bestimmtes Stück einer gegebenen Oberfläche auf einer andern gleichfalls gegebenen Oberfläche so abzubilden, dass einander entsprechende unendlich kleine Figuren auf beiden Oberflächen einander ähnlich sind, hat in gewissem Sinne ihre allgemeine Lösung gefunden durch die berühmten Arbeiten von *Lagrange* *) und *Gauss* **). Diese Aufgabe ist aber, da sie von partiellen Differentialgleichungen abhängt, keineswegs eine bestimmte, und die Bedingungen, welche nothwendig sind, um das Problem zu einem bestimmten zu machen, können von mannigfaltiger Art sein. In den einzelnen Fällen führt allerdings die Erfüllung solcher Bedingungen auf grosse Schwierigkeiten, und ist nur in wenigen Fällen gelungen.

Bei der practischen Anwendung dieser Theorie der Abbildung auf die Construction von Karten, wobei wenigstens in der Regel die Aehnlichkeit der kleinsten Theile als Grundprincip festgehalten wird, lässt man sich zur Beseitigung der oben erwähnten Unbestimmtheit von der Rücksicht leiten, dass auch das Bild im Grossen und Ganzen keine allzugrosse Abweichung von der Gestalt der abgebildeten Figur zeigt. Bereits *Gauss* hat in der citirten Abhandlung und in einer zweiten Abhandlung (Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie; Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd. 2) Arten der Abbildung angegeben, welche von diesem Gesichtspunkt aus vor anderen den Vorzug verdienen. Bei *Gauss* ist der leitende Gedanke der, dass wenn es sich z. B. um die Abbildung einer Kugelzone handelt, für eine bestimmte Breite das Aehnlichkeitsverhältniss $= 1$ wird, für alle anderen Breiten aber nur um Grössen dritter Ordnung von 1 abweicht, wobei die Breitenunterschiede als Grössen erster Ordnung ange-

---

*) *Lagrange*. Sur la construction des Cartes géographiques. Mémoires de l'Académie de Berlin 1779.

**) *Gauss*. Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. Abgedruckt in *Schumachers* astronomischen Abhandlungen 1825.

sehen werden. Demnach sind die von *Gauss* angegebenen Abbildungsarten nur näherungsweise und für verhältnissmässig geringe Breitenunterschiede als die besten zu betrachten.

Ich habe im Folgenden versucht, ein allgemeines Princip aufzustellen, durch welches man für jedes gegebene Flächenstück die beste Abbildungsart finden kann, d. h. diejenige Abbildung, welche ohne der Aehnlichkeit der kleinsten Theile zu nahe zu treten ein der gegebenen Figur auch im Ganzen möglichst ähnliches Bild liefert, wobei ich mich auf den Fall beschränken muss, wo die Fläche, auf welcher das Bild entworfen wird, eine Ebene ist, da sich im allgemeinen Fall die Eliminationen, welche zur Aufstellung der Gleichungen nöthig sind, nicht ausführen lassen.

Zur Lösung dieses Problems ist es zunächst erforderlich, einen neuen Begriff zu definiren, den man etwa bezeichnen kann als den Fehler der Karte, und der bei den unter gegebenen Umständen besten Karte ein Minimum werden muss.

Ist das Bild dem Abgebildeten vollkommen ähnlich, so muss dieser Fehler Null sein, und umgekehrt, wenn der Fehler Null ist, so sind die beiden Bilder vollkommen ähnlich. Dieser Fall kann natürlich nur dann eintreten, wenn die eine der gegebenen Oberflächen auf einer der zweiten Oberfläche vollkommen ähnlichen Fläche abwickelbar ist. In allen andern Fällen muss der Fehler einen immer positiven Werth besitzen, so dass es auch immer einen kleinsten Werth des Fehlers geben muss. Die Bestimmung des Minimums des Fehlers führt, da derselbe durch ein Integral definirt ist, auf ein Problem der Variationsrechnung, aber auf ein Problem eigenthümlicher Art, welches sich in seiner Verallgemeinerung kurz so aussprechen lässt:

Es sollen die willkürlichen Elemente einer durch eine partielle Differentialgleichung definirten Function so bestimmt werden, dass ein von dieser Function abhängiges bestimmtes Integral ein Minimum wird.

Die Lösung dieses Problems ist im Allgemeinen schwieriger als die Lösung der partiellen Differentialgleichung für sich mit gegebenen Grenzbedingungen, da zu der ersten partiellen Differentialgleichung eine zweite hinzutritt, welche mit der ersten gleichzeitig integrirt werden muss, da die Natur der Grenzbedingungen eine gesonderte Integration der beiden Gleichungen nicht gestattet. Durch Elimination einer Variablen können die beiden Differentialgleichungen durch eine Differentialgleichung höherer Ordnung ersetzt werden, welche in dem hier vorliegenden Fall linear und von der vierten Ordnung

wird, aber veränderliche Coefficienten enthält. Es ist mir bis jetzt nur gelungen, in einem besonders einfachen Fall die Integration durchzuführen, in welchem die partiellen Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückkommen, und wodurch die beste Abbildung einer ganzen gegen die Rotationsaxe senkrechten Zone einer beliebigen Rotationsfläche auf eine Ebene gefunden wird.

§. 1.

Zunächst erfordert die Auflösung unseres Problems die genaue Feststellung der Bedingungen für die Aehnlichkeit der kleinsten Theile. Bezeichnet man mit ds, dS zwei einander entsprechende unendlich kleine Längen auf der abzubildenden und auf der Bildfläche, so wird die Aehnlichkeit der kleinsten Theile bekanntlich ausgedrückt durch die Gleichung:

$$dS = p\,ds$$

worin p, das Aehnlichkeitsverhältniss oder der Massstab des Bildes, eine wesentlich positive Grösse ist, welche nur von der Lage des Anfangspunktes nicht aber von der Richtung des Elementes ds abhängt.

Die Function p muss, wenn die Aehnlichkeit der kleinsten Theile in keinem Punkt des Bildes verletzt werden soll, gewisse allgemeine Stetigkeitsbedingungen erfüllen, welche wesentlich dazu beitragen, die Willkürlichkeit in der Lösung des Problems der Abbildung zu beschränken.

Zunächst ist klar, dass wenn p an irgend einer Stelle des abzubildenden Flächenstücks 0 oder unendlich wird, an dieser Stelle von einer Aehnlichkeit der kleinsten Theile nicht die Rede sein kann, weil dann entweder ein von 0 verschiedenes Längenelement durch einen Punkt oder ein Punkt durch ein von 0 verschiedenes Längenelement abgebildet würde.

Ebenso darf aber auch p nicht längs einer Linie unstetig werden, denn betrachtet man die Bilder zweier unendlich kleiner Dreiecke zu beiden Seiten der Unstetigkeitslinie, so sind diese zwar ihren Urbildern ähnlich, aber das Aehnlichkeitsverhältniss ist ein anderes, wiewohl die Dreiecke auf der ursprünglichen Fläche einander unendlich nahe liegen. Wenn also auch die Bilder der beiden Seiten der Unstetigkeitslinie an einer Stelle zusammenhängend wären, so würde dieser Zusammenhang schon an den benachbarten Stellen aufgehoben. Demnach würde eine solche Unstetigkeitslinie das Bild in zwei getrennte unzusammenhängende Theile sondern.

Auch die Differentialquotienten der Function p sind gewissen Stetig-

keitsbedingungen unterworfen, zu welchen man durch die folgende geometrische Betrachtung gelangt. Man zieht durch einen beliebigen Punkt der abzubildenden Oberfläche eine beliebige Curve doppelter Krümmung auf derselben, und projicirt die dem betrachteten Punkt benachbarten Theile dieser Curve auf die Tangentenebene der Oberfläche, wodurch man ein Stück einer ebenen Curve erhält. Bezeichnet man nun mit ds ein Element dieser ebenen Curve oder, was der Kleinheit des Unterschieds wegen dasselbe ist, der Curve doppelter Krümmung, mit $d\sigma$ ein Element der auf der Oberfläche gemessenen Normale der Curve doppelter Krümmung, mit ds' endlich das Element auf der Oberfläche oder der Tangentenebene, welches mit $ds\,d\sigma$ ein Dreieck bildet, so ist der Contingenzwinkel der auf der Tangentenebene gelegenen Curve:

$$\vartheta = \frac{d\sigma^2 + ds^2 - ds'^2}{d\sigma\, ds}$$

und der reciproke Krümmungshalbmesser:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\sigma^2 + ds^2 - ds'^2}{d\sigma\, ds^2},$$

welcher gewissermassen als die in der Richtung der Oberfläche gemessene Krümmung der Raumcurve betrachtet werden kann. Führt man nun dieselbe Betrachtung durch hinsichtlich des Bildes unserer Curve auf der zweiten Oberfläche, so erhält man, wenn man den P, $d\Sigma$, dS, dS' die den Grössen ϱ, $d\sigma$, ds, ds' im Bilde entsprechende Bedeutung giebt:

$$\frac{1}{P} = \frac{d\Sigma^2 + dS^2 - dS'^2}{d\Sigma\, dS^2},$$

welches in dem Fall, wo die zweite Oberfläche eine Ebene ist, der wahre reciproke Krümmungshalbmesser des Bildes ist.

Versteht man nun unter p den Werth dieser Function, welcher an dem der Curve abgewendeten Ende des Elements $d\sigma$ Statt hat, so hat man vermöge der allgemeinen zu Grunde gelegten Gleichung:

$$d\Sigma = p\,d\sigma,$$
$$dS' = p\,ds',$$
$$dS = \left(p + \frac{\partial p}{\partial \sigma}\,d\sigma\right) ds.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die obige Formel für $\frac{1}{P}$ ein, so ergiebt sich mit Vernachlässigung des unendlich Kleinen:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p\varrho} + \frac{2}{p^2}\,\frac{\partial p}{\partial \sigma},$$

worin $d\sigma$ nach der convexen Seite der Curve positiv gerechnet ist. Diese Formel giebt nun Aufschluss über die Stetigkeitsbedingungen der Differentialquotienten von p. Wenn nämlich $\frac{\partial p}{\partial \sigma}$, d. h. der nach irgend einer auf der Oberfläche gemessenen Richtung genommene Differentialquotient an einer Stelle der abzubildenden Fläche unendlich würde, so müsste, wenn ϱ von 0 verschieden ist, $P=0$ sein, d. h. das Bild einer beliebigen, mit stetiger Krümmung über den Unstetigkeitspunkt gezogenen Linie müsste in dem Bild des Unstetigkeitspunkts eine Ecke haben, was offenbar mit der Aehnlichkeit der kleinsten Theile unverträgkch ist.

Wenn endlich $\frac{\partial p}{\partial \sigma}$ längs einer Linie unstetig wäre, also zu beiden Seiten einer Linie um eine endliche Grösse differirende Werthe hätte, so würden die Bilder zweier Linien, welche zu beiden Seiten der Unstetigkeitslinie derselben unendlich nahe und parallel verlaufen, in entsprechenden Punkten Krümmungshalbmesser mit endlicher Differenz haben. Es würde also, wenn auch die Bilder beider Linien in einen Punkt zusammenfielen und gleiche Richtung hätten, dieser Zusammenhang schon in den nächsten Punkten aufgehoben werden, d. h. es würde eine Zerreissung des Bildes längs der Unstetigkeitslinie stattfinden.

Demnach sind also die allgemeinen Bedingungen, welchen die Function p unterworfen werden muss, um die Aehnlichkeit der kleinsten Theile an allen Stellen aufrecht zu erhalten, folgende:

1. Die Function p darf an keiner Stelle unendlich oder 0 werden und an keiner Linie sprungweise Aenderungen erleiden.

2. Sämmtliche nach irgend einer auf der Oberfläche gemessenen Richtung genommene Differentialquotienten von p müssen an jeder Stelle der abzubildenden Fläche endlich sein und dürfen sich an keiner Linie sprungweise ändern.

Ausser diesen allgemeinen Bedingungen hat die Function p noch einer partiellen Differentialgleichung zu genügen, deren Form sich nicht allgemein angeben lässt, wenn nicht über die Natur der Oberfläche, auf welcher das Bild entworfen werden soll, specielle Annahmen gemacht werden, weil sonst die erforderlichen Eliminationen nicht ausgeführt werden können.

Ich beschränke mich hier auf den bei weitem einfachsten Fall der Abbildung einer beliebigen Oberfläche auf eine Ebene.

Ich nehme an, es sei die abzubildende Fläche durch drei Gleichungen

mit zwei unabhängigen Variablen bestimmt:

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v),$$

so dass u, v als Coordinaten eines Punktes auf der Oberfläche betrachtet werden können. Ich will ausserdem der Einfachheit wegen annehmen, die Curvensysteme $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ seien orthogonal. Es seien ferner U, V rechtwinklige Coordinaten in der Ebene, so kommt unsere Aufgabe darauf hinaus, U, V, p so als Functionen von u, v zu bestimmen, dass die Gleichung:

$$(1.) \qquad dU^2 + dV^2 = p^2(a^2 du^2 + b^2 dv^2)$$

identisch wird, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$a^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$b^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Wegen der Orthogonalität der Curven u, v hat man ausserdem:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Die Gleichung (1.) zerfällt in ein System von drei partiellen Differentialgleichungen:

$$(2.) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial u}\right)^2 = p^2 a^2, \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial u}\,\dfrac{\partial U}{\partial v} + \dfrac{\partial V}{\partial u}\,\dfrac{\partial V}{\partial v} = 0, \\[2ex] \left(\dfrac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial v}\right)^2 = p^2 b^2, \end{cases}$$

welche im Allgemeinen hinreichen, um die drei Functionen U, V, p zu bestimmen. Durch fortgesetzte Differentiation der Gleichungen (2.) lassen sich immer Gleichungen in hinlänglicher Anzahl ableiten, um zwei der unbekannten Grössen mit ihren Differentialquotienten zu eliminiren, wodurch eine partielle Differentialgleichung für die dritte Grösse übrig bleibt. Um die Gleichung für p abzuleiten, genügt scheinbar eine zweimalige Differentiation noch nicht. Es ist daher eine besondere Eigenthümlichkeit des Systems (2.), dass die Differentialgleichung für p doch nur von der zweiten Ordnung wird. Diese Gleichung lässt sich auf folgendem sehr einfachem Wege ableiten, welcher zugleich zur Kenntniss der Functionen U, V führt, wenn p als bekannt vorausgesetzt wird. Die Gleichungen (2.) werden identisch befriedigt durch die Annahme:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial u} = \lambda pa, & \dfrac{\partial V}{\partial u} = -\lambda' pa, \\ \dfrac{\partial U}{\partial v} = \lambda' pb, & \dfrac{\partial V}{\partial v} = \quad \lambda pb, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass die vorläufig noch unbekannten Grössen λ, λ' der Bedingung genügen:

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = 1,$$

so dass man durch Einführung eines unbestimmten Winkels ϑ setzen kann:

$$\lambda = \cos\vartheta, \quad \lambda' = \sin\vartheta.$$

Die Gleichungen (3.) führen nun, da $\frac{\partial U}{\partial u}$, $\frac{\partial U}{\partial v}$, $\frac{\partial V}{\partial u}$, $\frac{\partial V}{\partial v}$ exacte Differentialquotienten sein müssen, zu den Bedingungen für λ, λ':

$$\frac{\partial \lambda pa}{\partial v} = \frac{\partial \lambda' pb}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \lambda' pa}{\partial v} = -\frac{\partial \lambda' pb}{\partial u}$$

oder:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} pa + \lambda \frac{\partial pa}{\partial v} = \frac{\partial \lambda'}{\partial u} pb + \lambda' \frac{\partial pb}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial v} pa + \lambda' \frac{\partial pa}{\partial v} = -\frac{\partial \lambda}{\partial u} pb - \lambda \frac{\partial pb}{\partial u}.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen:

$$\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda' \frac{\partial \lambda'}{\partial u} = 0, \quad \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda' \frac{\partial \lambda'}{\partial v} = 0.$$

ergiebt sich hieraus sofort:

$$\frac{\partial pa}{\partial v} = pb \left\{ \lambda \frac{\partial \lambda'}{\partial u} - \lambda' \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right\},$$

$$\frac{\partial pb}{\partial u} = -pa \left\{ \lambda \frac{\partial \lambda'}{\partial v} - \lambda' \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right\}$$

oder durch Einführung des Winkels ϑ:

$$\frac{1}{pb} \frac{\partial pa}{\partial v} = \frac{\partial \vartheta}{\partial u},$$

$$\frac{1}{pa} \frac{\partial pb}{\partial v} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial v},$$

woraus sich die partielle Differentialgleichung für p ergiebt *):

---

*) Wenn man allgemein eine Differentialgleichung der Form

$$E dU^2 + 2F dU dV + G dV^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

$$(4.)\qquad \frac{\partial \frac{1}{pb}\frac{\partial pa}{\partial v}}{\partial v}+\frac{\partial \frac{1}{pa}\frac{\partial pb}{\partial u}}{\partial u} = 0.$$

Nimmt man p als gefunden an, durch Integration der Gleichung (4.), so erhält man ϑ mit einer additiven willkürlichen Constanten durch eine Quadratur:

$$\vartheta = \int\left(\frac{1}{pb}\frac{\partial pa}{\partial v}du-\frac{1}{pa}\frac{\partial pb}{\partial u}dv\right)$$

und schliesslich die gesuchten Functionen U, V ebenfalls durch Quadraturen:

$$U-U_0 = \int\{\cos(\vartheta-\vartheta_0)pa\,du+\sin(\vartheta-\vartheta_0)pb\,dv\},$$

$$V-V_0 = \int\{-\sin(\vartheta-\vartheta_0)pa\,du+\cos(\vartheta-\vartheta_0)pb\,dv\}.$$

Demnach sind, wenn das Aehnlichkeitsverhältniss p bestimmt ist, die Functionen U, V bis auf drei willkürliche Constanten ebenfalls bestimmt.

Bezeichnet man mit U', V' diejenigen Werthe der Functionen U, V, welche den Specialwerthen 0 der willkürlichen Constanten entsprechen, so sind die allgemeinen Ausdrücke dieser Functionen:

$$U = U_0+\cos\vartheta_0 U'-\sin\vartheta_0 V',$$

$$V = V_0+\sin\vartheta_0 U'+\cos\vartheta_0 V'.$$

Diese Gleichungen enthalten die Bedeutung der willkürlichen Constanten; sie drücken nur eine beliebige Verschiebung des rechtwinkligen Coordinatensystems U, V in der Ebene aus.

---

hat, so kann man immer die beiden Seiten dieser Gleichung als das Quadrat eines Längenelements auf einer und derselben Oberfläche betrachten (in dem vorliegenden Fall auf einer Ebene) und kann dann aus den Coefficienten der beiden Ausdrücke nach dem berühmten Theorem von *Gauss* (Disquisitiones generales circa superficies curvas; Commentat. Gotting. vol. VI) für das Krümmungsmass zwei Ausdrücke bilden, welche einander gleich sein müssen. Auf diese Weise gelangt man immer zu einer partiellen Differentialgleichung für die unbekannten Functionen. In unserem Fall stimmt diese Gleichung genau mit der für p gefundenen überein, welche demnach als enthalten in dem erwähnten *Gauss*'schen Theorem anzusehen ist. Ich habe der obigen im Text angewandten Methode vor dieser den Vorzug gegeben, theils weil nach der letzteren die Reduction der Gleichung auf die einfachste Form etwas weitläufig ist, theils auch weil man auf dem obigen Wege gleichzeitig die Ausdrücke für die Functionen U, V findet.

In ganz ähnlicher Weise hat bereits *Bour* eine partielle Differentialgleichung für λ aus der Differentialgleichung

$$dX^2+dY^2+dZ^2 = 4\lambda\,dx\,dy,$$

in welcher Z als gegebene Function von x, y angesehen wird, hergeleitet (Théorie de la déformation des surfaces, Journal de l'école polytechnique, cahier 39). In diesem Falle wird jedoch die Gleichung für λ nicht linear.

Demnach ist das Bild eines beliebigen Flächenstückes auf einer Ebene bis auf die Lage in der Ebene vollständig bestimmt, wenn das Aehnlichkeitsverhältniss an jeder Stelle des abzubildenden Flächenstücks gegeben ist.

Die Differentialgleichung (4.), welcher die Function p unterworfen ist, lässt sich ohne Schwierigkeit auf eine lineare reduciren, wenn man an Stelle von p den Logarithmus von p einführt.

Die Gleichung (4.) lässt sich nämlich schreiben:

$$\frac{\partial \frac{a}{b}\frac{\partial \log pa}{\partial v}}{\partial v}+\frac{\partial \frac{b}{a}\frac{\partial \log pb}{\partial u}}{\partial u}=0$$

oder indem man setzt:

$$q = \log p,$$

$$(5.)\qquad \frac{\partial \frac{a}{b}\frac{\partial q}{\partial v}}{\partial v}+\frac{\partial \frac{b}{a}\frac{\partial q}{\partial u}}{\partial u}=-\frac{\partial \frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}}{\partial v}-\frac{\partial \frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}}{\partial u}$$

Hinsichtlich der Stetigkeit ist q denselben Bedingungen unterworfen wie p, nur dass q auch negativ und 0 werden darf, aber nicht unendlich. Danach lässt sich leicht beweisen, dass q vollständig und eindeutig bestimmt ist, wenn z. B. sein Werth am Rande des abzubildenden Flächenstücks allenthalben gegeben ist, dass also dadurch auch das Bild bis auf seine Lage in der Ebene vollständig bestimmt ist. Ich übergehe hier diesen Beweis, der übrigens sehr einfach ist, da ich weiter unten den Beweis der Bestimmtheit und Eindeutigkeit des Bildes für eine andere Art der Bedingung führen werde.

§. 2.

Um das in der Einleitung aufgestellte Problem zu lösen, ist es zunächst erforderlich, den Begriff des Fehlers der Karte genau festzustellen. Dieser Fehler der Karte setzt sich zusammen aus allen einzelnen Fehlern, welche an den verschiedenen Stellen des Bildes stattfinden, welche aber nur eine relative Bedeutung haben, d. h. sie beziehen sich auf einen beliebig zu wählenden Punkt des Bildes, in welchem dasselbe als genau richtig angesehen wird. Uebrigens ist die Wahl dieses Punktes ohne Einfluss auf das Endresultat.

Bezeichnet man mit ds, ds' zwei auf einander folgende Längenelemente der abzubildenden Fläche, und bezeichnet p den Werth des Aehnlichkeitsverhältnisses im Anfangspunkt des Elements ds, so hat man für die Bilder dieser

Elemente die Ausdrücke:

$$dS = p\,ds,$$

$$dS' = \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\,ds\right)ds';$$

folglich:

$$\frac{dS'}{dS} = \left(1 + \frac{\partial \log p}{\partial s}\,ds\right)\frac{ds'}{ds}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die unendlich kleine Grösse $\frac{\partial \log p}{\partial s}\,ds$ betrachtet werden kann als die Abweichung von der vollständigen Aehnlichkeit beim Uebergang von einem Element ds zu dem folgenden ds'. Geht man nun auf einer beliebigen Curve von einem festen Punkte O zu einem veränderlichen Punkte P über, und entwirft gleichzeitig das Bild dieser Curve, so summiren sich im Verlauf dieser Linie alle die einzelnen Abweichungen von der Aehnlichkeit, die beim Uebergang von einem Element der Curve zum folgenden auftreten, und demnach hat man das Integral

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \log \frac{p}{p_0}$$

zu betrachten als die Abweichung von der vollkommenen Aehnlichkeit beim Uebergang vom Punkte O zum Punkte P auf einer beliebigen Curve. Diese Grösse $\log \frac{p}{p_0}$ kann daher bezeichnet werden als die Verzeichnung des Bildes im Punkte P. Diese Verzeichnung kann sowohl positiv als negativ sein und gleich grosse positive und negative Werthe der Verzeichnung werden einen gleichen Fehler des Bildes bedingen. Demnach liegt es nahe als Fehler des Bildes im Punkte P verglichen mit dem Punkte O das Quadrat der Verzeichnung $\left(\log \frac{p}{p_0}\right)^2$ anzusehen. Der Fehler der ganzen Karte ist dann zu definiren als der mittlere Werth aller Elementarfehler, den man erhält, wenn man das Integral des Elementarfehlers über die ganze abzubildende Fläche nimmt, und dieses dividirt durch die abzubildende Fläche selbst. Demnach ist der Fehler, wenn man die Coordinaten u, v zu Grunde legt:

$$\frac{\iint \left(\log \frac{p}{p_0}\right)^2 ab\,du\,dv}{\iint ab\,du\,dv},$$

und unsere Aufgabe ist jetzt die, die Function p der partiellen Differentialgleichung (4.) und den Stetigkeitsbedingungen gemäss so zu bestimmen, dass

das Integral

$$V = \iint \left(\log \frac{p}{p_0}\right)^2 ab\,du\,dv,$$

genommen über das ganze abzubildende Flächenstück, den kleinsten Werth erhält *). Die Aufgabe wird noch etwas vereinfacht durch Einführung der Function q an Stelle von p. Dann wird das Integral V:

$$V = \iint (q-q_0)^2 ab\,du\,dv,$$

während q nun der Differentialgleichung (5.) unterworfen ist.

Nach den Principien der Variationsrechnung ist die Bedingung des Minimums von V folgende: bedeutet δq eine unendlich kleine Veränderung von q, so muss die Gleichung erfüllt sein:

$$(6.)\qquad 0 = \iint \delta q\,(q-q_0)\,ab\,du\,dv.$$

Hierin muss sowohl q als $q+\delta q$ der Differentialgleichung (5.) genügen, d. h. δq muss der reducirten Gleichung genügen:

$$(7.)\qquad \frac{\partial \frac{a}{b}\frac{\partial \delta q}{\partial v}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{b}{a}\frac{\partial \delta q}{\partial u}}{\partial u} = 0,$$

ist aber im Uebrigen eine beliebige unendlich kleine Grösse, welche mit ihren ersten Differentialquotienten in der ganzen abzubildenden Fläche stetig sein muss.

Durch diese Bedingungen ist δq vollständig bestimmt, wenn es am Rande des abzubildenden Flächenstücks gegeben ist, am Rande aber kann es beliebig sein.

Diese Behauptung lässt sich dadurch beweisen, dass man annimmt, man hätte zwei Functionen $\delta q'$, $\delta q''$ gefunden, welche am Rande dieselben Werthe annehmen, denselben Stetigkeitsbedingungen und der Gleichung (7.) genügen. Die Differenz $\delta q''' = \delta q' - \delta q''$ genügt dann ebenfalls der Gleichung (7.) und nimmt am Rande den Werth 0 an. Multiplicirt man dann die Gleichung (7.), nachdem man $\delta q = \delta q'''$ gesetzt hat, mit $\delta q'''\,du\,dv$ und integrirt über die ganze Fläche, so erhält man durch partielle Integration:

$$\iint ab\,du\,dv \left\{ \frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial \delta q'''}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial \delta q'''}{\partial u}\right)^2 \right\} = 0,$$

woraus sich unmittelbar $\delta q''' = 0$ ergiebt. Demnach ist die Variation δq am

*) Diese Bestimmungsweise der Function p wird noch durch eine gewisse Analogie mit der Methode der kleinsten Quadrate gestützt.

Rande als willkürlich im Innern der Fläche aber als durch den Randwerth gegeben zu betrachten.

Es kommt also zunächst darauf an, das Integral (6.) auf ein anderes zu reduciren, in welchem nur noch die Grenzwerthe der Variation δq vorkommen. Um dies zu erreichen, multiplicirt man die Gleichung (7.) mit einem vorläufig noch unbestimmten Factor $\omega\, du\, dv$ und integrirt dann über die ganze Fläche, über welche das Integral (6.) genommen ist. Die nun anzuwendende partielle Integration setzt voraus, dass die Function ω mit ihrem ersten Differentialquotienten im Innern der ganzen Fläche stetig sei, was also hiermit angenommen werden soll.

Unter dieser Voraussetzung gelangt man durch zweimalige partielle Integration zu folgender Gleichung:

$$0 = \iint \delta q \left\{ \frac{\partial \frac{a}{b} \frac{\partial \omega}{\partial v}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{b}{a} \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial u} \right\} du\, dv$$
$$- \int \left\{ \frac{a}{b}\, du \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \delta q - \omega \frac{\partial \delta q}{\partial v} \right) + \frac{b}{a}\, dv \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \delta q - \omega \frac{\partial \delta q}{\partial u} \right) \right\},$$

wobei sich das einfache Integral auf die ganze Begrenzung des abzubildenden Flächenstücks erstreckt. Das Randintegral lässt sich noch etwas einfacher schreiben, wenn man die Differentiation nach der auf der Oberfläche gemessenen Normale der Randcurve ∂n und das Element der Randcurve selbst, ds, einführt. Es geht dadurch über in:

$$\int ds \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} \delta q - \omega \frac{\partial \delta q}{\partial n} \right\}.$$

Die gewünschte Reduction des Doppelintegrals (6.) wird nun bewerkstelligt sein, wenn es möglich ist, die Function ω so zu bestimmen, dass sie der Gleichung genügt:

$$(8.) \qquad \frac{\partial \frac{a}{b} \frac{\partial \omega}{\partial v}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{b}{a} \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial u} = ab(q - q_0).$$

Unter dieser Voraussetzung ergiebt sich die Gleichung:

$$(9.) \qquad \iint \delta q (q - q_0)\, ab\, du\, dv = \int ds \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} \delta q - \frac{\partial \delta q}{\partial n} \omega \right\}.$$

Nimmt man die Function q als bereits bekannt an, so ist die Gleichung (8.) eine lineare partielle Differentialgleichung für ω, welche im Wesentlichen dieselbe Eigenschaften hat, wie die Differentialgleichung für q. Die Function ω wird also durch diese Gleichung und die Stetigkeitsbedingungen erst dann als

vollständig bestimmt zu betrachten sein, wenn der Werth von ω am Rande irgend wie gegeben ist. Nehmen wir diese Bedingung so an, dass ω am Rande verschwinden soll, so fällt in dem Randintegral (9.) der Theil weg, welcher $\frac{\partial \delta q}{\partial n}$ enthält, welches in unbekannter Weise von dem beliebigen Randwerth δq abhängt. Dann wird also das Integral (9.)

$$(10.)\qquad \iint \delta q(q-q_0)ab\,du\,dv = \int ds\frac{\partial \omega}{\partial n}\delta q.$$

Wenn nun das Integral V ein Minimum sein soll, so muss das Integral (10.) verschwinden, und da in dem einfachen Integral auf der rechten Seite δq ganz willkürlich ist, so kann dieses Integral nur unter der Bedingung verschwinden, dass am Rande allenthalben die Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0.$$

Demnach haben wir unser Problem auf die Integration eines Systems von partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt, welche gleichzeitig zu integriren sind, und welches folgende Form hat:

$$(11.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \frac{a}{b}\frac{\partial q}{\partial v}}{\partial v} + \dfrac{\partial \frac{b}{a}\frac{\partial q}{\partial u}}{\partial u} = -\dfrac{\partial \frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}}{\partial v} - \dfrac{\partial \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u}}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial \frac{a}{b}\frac{\partial \omega}{\partial v}}{\partial v} + \dfrac{\partial \frac{b}{a}\frac{\partial \omega}{\partial u}}{\partial u} = ab(q-q_0), \end{cases}$$

wozu die Bedingungen kommen, dass sowohl q als ω mit ihren ersten partiellen Differentialquotienten im Innern des abzubildenden Flächenstücks allenthalben stetig sind, und dass an der Grenze dieses Gebiets:

$$(12.)\qquad \omega = 0,\qquad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$$

werden.

§. 3.

Ich werde zunächst nachweisen, dass durch diese Bedingungen das Problem ein vollständig und eindeutig bestimmtes ist.

Um diesen Nachweis zu führen, nehme ich an, es seien für dasselbe Flächenstück zwei Lösungen der Gleichungen (11.) mit den Bedingungen gefunden: q', ω'; q'', ω''. Dann müssen die Differenzen:

$$q''' = q'-q'',\qquad \omega''' = \omega'-\omega''$$

den folgenden Gleichungen genügen:

$$(13.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \frac{a}{b} \frac{\partial q'''}{\partial v}}{\partial v} + \dfrac{\partial \frac{b}{a} \frac{\partial q'''}{\partial u}}{\partial u} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \frac{a}{b} \frac{\partial \omega'''}{\partial v}}{\partial v} + \dfrac{\partial \frac{b}{a} \frac{\partial \omega'''}{\partial u}}{\partial u} = abq''' \end{cases}$$

nebst denselben Grenz- und Stetigkeitsbedingungen wie oben.

Multiplicirt man nun die erste der Gleichungen (13.) mit $\omega''' du dv$ und integrirt über das ganze Gebiet, so erhält man durch zweimalige partielle Integration mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen:

$$0 = \iint q''' \left\{ \frac{\partial \frac{a}{b} \frac{\partial \omega'''}{\partial v}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{b}{a} \frac{\partial \omega'''}{\partial u}}{\partial u} \right\} du dv$$

oder wegen der zweiten Gleichung (13.)

$$0 = \iint ab q'''^2 du dv,$$

welche Gleichung, da ab wesentlich positiv ist, nicht anders befriedigt werden kann, als durch die Annahme

$$q''' = 0.$$

Daraus folgt dann ferner durch eine ganz analoge Schlussweise aus der zweiten Gleichung (13.)

$$\omega''' = 0,$$

wodurch der Nachweis geliefert ist, dass die Gleichungen (11.), (12.) nur eine einzige Lösung zulassen.

Nachdem dieser Satz bewiesen ist, ist es auch leicht, den Beweis zu führen, dass der Werth der Constanten q_0, welche in den Gleichungen (11.) vorkommt, ohne wesentlichen Einfluss auf das Endresultat ist. Nimmt man nämlich an, man habe zwei Functionen q', ω' gefunden, welche die Gleichungen (11.), (12.) befriedigen, wenn man darin $q_0 = 0$ setzt, so hat man bloss zu setzen $q = q' + q_0$, $\omega = \omega'$, wodurch die Gleichungen (11.) und (12.) in ihrer allgemeinen Form befriedigt werden. Man kann also unbeschadet der Allgemeinheit $q_0 = 0$ setzen, und hat dann nur nach der Integration q durch eine additive willkürliche Constante zu vervollständigen, oder was dasselbe ist, man hat p mit einem willkürlichen constanten Factor zu multipliciren, welcher constante Factor geometrisch eine Vergrösserung oder Verkleinerung des ebenen Bildes im Ganzen bedeutet. Die Wahl des Ausgangspunktes auf

der Fläche bei Bestimmung des Fehlers der Karte ist sonach ohne Einfluss auf die Bestimmung des besten Bildes eines Flächenstücks.

Um diese Resultate kurz und präcis zusammen zu fassen, kann man sagen:

Die Aufgabe: ein gegebenes Flächenstück auf eine Ebene in den kleinsten Theilen ähnlich und im Grossen und Ganzen möglichst treu abzubilden, ist eine bis auf vier willkürliche Constanten völlig bestimmte, von welchen Constanten drei eine willkürliche Lage des Bildes in der Ebene, die vierte eine willkürliche Grösse des Bildes (etwa eine beliebige Ausdehnung in einer bestimmten Richtung) ausdrücken. Man kann diese vier willkürlichen Constanten auch z. B. dadurch bestimmen, dass zwei beliebigen Punkten der abzubildenden Fläche zwei beliebige Punkte in der Bildebene entsprechen sollen.

Die Gleichungen des Problems nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn die abzubildende Oberfläche von der Art ist, dass es gelingt, überhaupt irgend eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung derselben auf die Ebene zu finden. In diesen Fällen nämlich lassen sich zwei neue Variable x, y als Functionen der alten u, v so bestimmen, dass sie die Gleichung

$$a^2 du^2 + b^2 dv^2 = m^2 (dx^2 + dy^2)$$

identisch befriedigen. Wenn man nun die Variablen x, y an Stelle der alten Variablen u, v einführt, so erhält man die identische Umformung:

$$\frac{\partial \frac{a}{b} \frac{\partial \psi}{\partial v}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{b}{a} \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\partial u} = \frac{ab}{m^2} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\},$$

und indem man an die Stelle von ψ in dieser Gleichung q und ω setzt, nehmen die Gleichungen (11.) des Problems die einfachere Gestalt an:

$$(14.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \varphi(x, y), \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = m^2 q. \end{cases}$$

Hierin bedeutet $\varphi(x, y)$ diejenige Function, welche man erhält, wenn man in dem Ausdruck

$$-\frac{m^2}{ab} \left\{ \frac{\partial \frac{1}{b} \frac{\partial a}{\partial v}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{1}{a} \frac{\partial b}{\partial u}}{\partial u} \right\}$$

die Variablen u, v durch die neuen Variablen x, y ausdrückt. Die Grenz- und Stetigkeitsbedingungen bleiben durch die Einführung der neuen Variablen un-

geändert, nur ist jetzt unter $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ die Differentiation nach der Normale der Grenzcurve zu verstehen, welche in der Ebene x, y gezeichnet anzunehmen ist.

Das System (14.) vereinfacht sich noch weiter, wenn man irgend ein particuläres Integral q^0 der ersten Gleichung (14.) und ein particuläres Integral ω^0 der Gleichung

$$\frac{\partial^2\omega^0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega^0}{\partial y^2} = m^2 q^0$$

finden kann, welche nur denselben Stetigkeitsbedingungen wie die Functionen q und ω genügen. Setzt man dann:

$$q = q'+q^0, \quad \omega = \omega'+\omega^0,$$

so erhält man das vereinfachte System:

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 q'}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 q'}{\partial y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2\omega'}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\omega'}{\partial y^2} = m^2 q', \end{cases}$$

wo jetzt ausser den alten Stetigkeitsbedingungen an der Grenze die Bedingungen zu erfüllen sind:

$$\omega^0+\omega' = 0, \quad \frac{\partial\omega^0}{\partial n}+\frac{\partial\omega'}{\partial n} = 0.$$

Solche particuläre Integrale lassen sich übrigens immer finden, nöthigen Falls durch die *Green*sche Methode.

§. 4.

Die Form der Gleichungen (15.) zeigt, dass die vollständige Lösung des gestellten Problems für irgend einen bestimmten Fall, d. h. für eine gegebene Begrenzung auf einer gegebenen Oberfläche die Integration einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung erfordert, welche man erhält, wenn man aus der ersten Gleichung (15.) mittelst der zweiten q' eliminirt. Diese Gleichung ist zwar linear, enthält aber veränderliche Coefficienten, welche nur von der Natur der Oberfläche abhängig sind, aber schon in den einfachsten Fällen, z. B. in dem einer Kugelfläche, eine ziemlich complicirte Gestalt haben, so dass zu erwarten steht, dass sich der Integration in den meisten Fällen bedeutende Schwierigkeiten in den Weg stellen werden. Diese Schwierigkeiten fallen nur in dem einen schon oben erwähnten Fall weg, wo es sich um die Abbildung einer vollen Zone irgend einer Rotationsfläche handelt.

Die allgemeine Aufgabe der Abbildung einer Rotationsfläche ist bereits von *Lagrange* in der oben citirten Abhandlung behandelt und gelöst.

Ist die Gleichung der erzeugenden Curve der Rotationsfläche

$$\eta = f(\xi),$$

wo ξ mit der Rotationsaxe zusammenfallen mag, so ist auch die Länge des Bogens v der erzeugenden Curve, vom Pol der Rotationsfläche aus gerechnet, als Function von ξ gegeben, demnach auch ξ und η als Functionen der Bogenlänge v. Diese Bogenlänge v der Meridiancurve und den Winkel u, welchen ein veränderlicher Meridian mit einem festen Meridian einschliesst, führt man als Coordinaten der Punkte auf der Rotationsoberfläche ein. Für ein beliebiges Längenelement ds auf der Oberfläche erhält man dann die Gleichung:

$$ds^2 = dv^2 + \eta^2 du^2.$$

Da nun η eine Function von v allein ist, so setzt man:

$$x = \int \frac{dv}{\eta}, \quad y = u$$

und erhält:

$$ds^2 = \eta^2 \{dx^2 + dy^2\},$$

worin die Lösung des Abbildungsproblems enthalten ist.

Die Einführung der Variablen x, y ergiebt für das hier vorliegende Problem die Gleichungen:

$$(16.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 q}{\partial y^2} = -\eta \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}, \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \eta^2 q. \end{cases}$$

Ist die abzubildende Fläche eine von zwei Parallelkreisen begrenzte Zone, so sind die Gleichungen der Grenze $x = x_0$, $x = x_1$; für diese Werthe muss sein:

$$(17.) \quad \omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

Da sowohl η als $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}$ durch x allein ausgedrückt werden können, so ist die Annahme statthaft, q und ω seien ebenfalls von x allein abhängig; dann können die Gleichungen (16.) durch Quadraturen integrirt werden, und die vier dabei auftretenden willkürlichen Constanten können so bestimmt werden, dass die Gleichungen (17.) an beiden Grenzen erfüllt sind.

Ist z. B. die Rotationsfläche eine Kugel mit dem Radius 1, so ist v das Complement der geographischen Breite, u die geographische Länge, und

man erhält:

$$\eta = a = \sin v, \qquad b = 1,$$

ohne Einführung der Variablen x und y werden hier die Differentialgleichungen für q und ω:

$$\frac{\partial \sin v \frac{\partial q}{\partial v}}{\partial v} = \sin v,$$

$$\frac{\partial \sin v \frac{\partial \omega}{\partial v}}{\partial v} = q \sin v,$$

und an den Grenzen $v = v_0$ und $v = v_1$:

$$\omega = 0, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0.$$

Daraus ergiebt sich:

$$q = \log C \frac{(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v)^{\lambda}}{\sin v},$$

und die Integration der Gleichung für ω ergiebt die nöthigen Bedingungen zur Bestimmung der beiden Constanten λ und C. Da q noch durch Hinzufügung einer beliebigen Constanten vervollständigt werden kann, so kommt es auf den Werth von C nicht weiter an.

Von dem Werth der Constanten λ aber hängt wesentlich der Charakter des Bildes ab.

In dem Falle zunächst, wo statt der Kugelzone eine Kugelhaube abzubilden ist, welche den Pol selbst enthält, in welchem $v = 0$ ist, hat man nur zwei Grenzbedingungen. In diesem Fall aber muss wegen der Stetigkeit von q $\lambda = 1$ sein, so dass dieser Fall auf die gewöhnliche stereographische Projection führt. Im Fall einer wirklichen Kugelzone, welche von den Parallelkreisen $v = v_0$, $v = v_1$ begrenzt ist, erhält man für λ folgenden Ausdruck:

$$\lambda = \frac{\int_{v_0}^{v_1} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} v . \sin v \, dv \int_{v_0}^{v_1} \log \sin v . \sin v \, dv - \int_{v_0}^{v_1} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \log \sin v \sin v \, dv \int_{v_0}^{v_1} \sin v \, dv}{\left(\int_{v_0}^{v_1} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \sin v \, dv \right)^2 - \int_{v_0}^{v_1} (\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} v)^2 \sin v \, dv \int_{v_0}^{v_1} \sin v \, dv}.$$

Wenn man nach den Formeln des §. 1 die Coordinaten U, V des Bildes bestimmt, so ergiebt sich:

$$U = C\cos\lambda u(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v)^{\lambda},$$
$$V = C\sin\lambda u(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v)^{\lambda}.$$

Die Parallelkreise werden also dargestellt durch concentrische Kreise und die Meridiane durch radiale Linien, wie bei der stereographischen Projection, nur mit dem Unterschied, dass man zur Darstellung eines Breitenkreises keinen vollständigen Kreis in der Ebene braucht, sondern nur einen Bogen $\lambda.2\pi$. Man kann das Bild also entwerfen auf einem geraden Kegel, dessen Kanten mit der Axe den Winkel $\arcsin\lambda$ bilden, auf welchem die Meridiane durch die Kanten und die Breitenkreise durch die vollständigen Kreisschnitte des Kegels dargestellt werden; dieses auf dem Kegel entworfene Bild hat man dann auf die Ebenen abzuwickeln.

Diese Art der Abbildung stimmt bis auf den Werth von λ mit der von *Gauss* angegebenen besten Abbildung einer Kugelzone auf die Ebene überein. Unser Werth von λ geht in den von *Gauss* gegebenen über unter der Voraussetzung, dass die Kugelzone so schmal sei, dass man ohne erheblichen Fehler an die Stelle der Integrale in dem Ausdruck für λ die arithmetischen Mittel der Grenzwerthe der unter den Integralzeichen stehenden Functionen multiplicirt mit dem Integrationsintervall setzen kann.

Heidelberg im April 1867.

Ueber ein Problem der Forstwissenschaft.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Der Umstand, dass an der hiesigen Universität auch die Forstwissenschaft vorgetragen wird, hat mich zur Kenntniss eines Problems gelangen lassen, dessen Lösung, wie mir der Vorstand des Forstinstitutes, Professor Dr. *Gustav Heyer*, mittheilte, für die Forstwissenschaft von grosser Wichtigkeit ist, und welche zugleich mathematisch nicht ohne Schwierigkeit und Interesse ist. Dieses Problem findet sich angegeben in der „Waldertrags-Regelung" von *Carl Heyer*, Giessen 1841, §. 48, und zerfällt in zwei Fragen. Die eine derselben bezieht sich darauf, ob und in welcher Weise allmälig ein bestimmter Zustand des Waldes herbeigeführt werden könne, wenn man denselben hinreichend oft nach einem bestimmten Systeme abholzt, wobei natürlich vorausgesetzt ist, dass am Ende jedes Jahres nur der jährliche Zuwachs geschlagen wird, und dass stets an die Stelle eines gefällten Baumes sofort ein anderer von dem Alter Null gesetzt wird. Die Zeit jedes Abtriebes ist von der Art der Bestände abhängig, mit denen er begonnen wird, und ändert sich daher bis zu jedem folgenden Abtriebe. Findet man nun, wie sich zeigen wird, dass die beim Beginne der verschiedenen Abtriebe vorhandenen Anfangszustände sich allmälig einem ganz bestimmten Zustande nähern, so muss auch die Dauer des Abtriebes sich allmälig einer festen Grenze, der normalen Umtriebszeit, nähern, und in der Ermittlung dieser besteht die zweite Frage.

Um Differentialrechnung anwenden zu können, nehme ich an, dass nicht nur am Ende jedes Jahres, sondern in jedem Augenblicke der in einem solchen entstehende Zuwachs geschlagen wird, wodurch die in Wahrheit sprungweise vor sich gehende Veränderung der Zustände in eine stetige verwandelt wird. Diese Abänderung wird an die Wirklichkeit eine um so grössere Annäherung geben, je grösser die Umtriebszeit ist, je kleiner also die Zeit eines Jahres der ganzen Dauer eines Abtriebes gegenüber erscheint.

Die Resultate der Untersuchung sind folgende:

1. Der Anfangszustand des Waldes nähert sich in der That allmälig einer bestimmten Grenze, welche zur Folge hat, dass jeder Baum in gleichem Alter gefällt wird.

2. Die Umtriebszeit, welcher die Dauer des Abtriebes sich mehr und mehr nähert, ist als einzige reelle Wurzel einer transcendenten Gleichung vollkommen und eindeutig bestimmt.

§. 1.

Zustände während des ersten Abtriebes.

Ich denke mir die Waldfläche in unendlich viele unendlich kleine Streifen getheilt, welche beliebig gekrümmt sein können, deren jeder nur Holz von gleichem Alter enthält, und deren jeder in einem Zeitelement dt abgeholzt zu werden bestimmt ist. Den Flächeninhalt des Streifens verwandle ich in ein Rechteck hdx, und indem ich die Elemente dx in der Folge, in welcher die Streifen abgeholzt werden sollen, auf der X-Axe antrage, erhalte ich für jeden Streifen eine Abscisse x, während alle Streifen die Strecke von 0 bis l auf der X-Axe bedecken, wenn hl die ganze Waldfläche bedeutet.

Die auf dem Streifen hdx befindliche Holzmasse bezeichne ich durch $hy\,dx$, wo y (Vorrath für die Flächeneinheit) eine Function von x ist, welche im ersten Augenblick bei gegebenem Zustande des Waldes gegeben vorliegt. Bezeichnet man zur Zeit t das Alter des Holzes auf dem Streifen x durch u, durch B den (überall gleich vorausgesetzten) Bodenwerth der Flächeneinheit, durch p den Procentsatz, nach welchem der Wald sich verzinst, so wird der Geldwerth des Vorraths nach der Methode der Zinseszinsen berechnet mit Hülfe der Formel:

$$y = B(1,0p^{u}-1) = B(e^{mu}-1),$$

wo

$$m = \log\text{nat}\, 1,0p.$$

Betrachten wir nun den Verlauf des ersten Abtriebes, welcher zur Zeit $t = 0$ beginnt. War im Anfange des Abtriebes das Alter der Bestände an der Stelle x durch t_0 (Function von x) gegeben, so ist zur Zeit t an denjenigen Stellen, bis zu welchen die Abholzung noch nicht vorgeschritten ist, $u = t + t_0$; an denjenigen Stellen aber, welche schon zur Zeit τ abgeholzt sind, ist $u = t - \tau$; dabei ist τ eine unbekannte Function von x, welche ausdrückt, zu welcher Zeit an der Stelle x geschlagen wird. Bezeichnen wir nun durch ξ den Ort, an welchem zur Zeit t geschlagen wird, so dass t, ξ in derselben Beziehung stehen wie τ, x, so hat man

$$\text{zwischen } x = 0 \text{ und } x = \xi \;:\; y = B(e^{m(t-\tau)}-1),$$
$$\text{zwischen } x = \xi \text{ und } x = l \;:\; y = B(e^{m(t+t_0)}-1).$$

Der gesammte Vorrath, welcher durch Khl bezeichnet werden soll, war anfangs durch die Formel

$$(1.)\qquad Khl = h\int_0^l y\,dx, \qquad K = \frac{B}{l}\Big(\int_0^l e^{mt_0}\,dx - l\Big)$$

gegeben. Derselbe muss stets unverändert bleiben, daher hat man auch zur Zeit t die Gleichung:

$$K = \frac{1}{l}\Big(\int_0^\xi y\,dx + \int_\xi^l y\,dx\Big)$$

$$= \frac{B}{l}\Big(\int_0^\xi e^{m(t-\tau)}\,dx + \int_\xi^l e^{m(t+t_0)}\,dx - l\Big),$$

oder indem man die Grösse

$$(2.)\qquad \varepsilon = \frac{B}{K+B}$$

einführt, welche für alles Folgende charakteristisch ist:

$$(3.)\qquad \frac{l}{\varepsilon} = e^{mt}\Big\{\int_0^\xi e^{-m\tau}\,dx + \int_\xi^l e^{mt_0}\,dx\Big\}.$$

Diese Gleichung bestimmt die Abhängigkeit von t und ξ, oder die Geschwindigkeit, mit welcher die Abholzung vorschreiten muss, um den Vorrath stets unverändert zu erhalten. Differentiirt man (3.) nach t, und bemerkt, dass für $x=\xi$ τ in t übergeht, so hat man:

$$-\frac{ml}{\varepsilon}e^{-mt} = \frac{d\xi}{dt}(e^{-mt} - e^{mt_0}),$$

wo auch in t_0 x durch ξ zu ersetzen ist. In dieser Gleichung kann man ξ, t mit x, τ vertauschen, und findet dann für τ die Differentialgleichung:

$$\frac{de^{-m\tau}}{dx} = \varepsilon(e^{-m\tau} - e^{mt_0}).$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung für $e^{-m\tau}$; man findet aus derselben:

$$e^{-m\tau} = e^{\frac{\varepsilon x}{l}}\Big\{C - \frac{\varepsilon}{l}\int_0^x e^{mt_0 - \frac{\varepsilon x}{l}}\,dx\Big\}.$$

Die Constante C bestimmt sich daraus, dass der Abtrieb zur Zeit $t=0$ bei $x=0$ beginnen soll; man hat also $\tau=0$ für $x=0$, daher $C=1$. Und die Schlagzeit τ für die Stelle x ist also durch die Formel gegeben:

$$(4.)\qquad e^{-m\tau} = e^{\frac{\varepsilon x}{l}}\Big\{1 - \frac{\varepsilon}{l}\int_0^x e^{mt_0 - \frac{\varepsilon x}{l}}\,dx\Big\}.$$

Diese Formel liefert die Zustände während des ganzen ersten Abtriebs. Das

Ende desselben erfolgt zur Zeit T (Dauer des Abtriebs), wenn an der Stelle $x = l$ geschlagen wird, und man hat also für T die Formel:

$$(5.)\qquad e^{-mT} = e^{\varepsilon}\left\{1-\frac{\varepsilon}{l}\int_0^l e^{mt_0-\frac{\varepsilon x}{l}}dx\right\}.$$

Diese Formeln enthalten ausser dem Prozent ($m = \log 1,0p$) und dem Anfangszustand (t_0) nur die Zahl ε, welche ein positiver echter Bruch ist, und den Quotienten des Bodenwerths durch den Gesammtwerth des Waldes (Bodenwerth + Bestandswerth) darstellt.

§. 2.

Recursionsformel für die Anfangszustände.

Zur Zeit T, am Ende des ersten Abtriebs, ist das Alter der Bestände durch die Function

$$t_1 = T-\tau$$

dargestellt, und zwar für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = l$. Mit Benutzung von (4.), (5.) hat man

$$(6.)\qquad e^{mt_1} = e^{\varepsilon\left(1-\frac{x}{l}\right)}\frac{1-\frac{\varepsilon}{l}\int_0^x e^{mt_0-\frac{\varepsilon x}{l}}dx}{1-\frac{\varepsilon}{l}\int_0^l e^{mt_0-\frac{\varepsilon x}{l}}dx}.$$

Die Function t_1 giebt zugleich die Anfangszustände für den zweiten Abtrieb, und übernimmt für diesen genau dieselbe Rolle, welche t_0 bei dem ersten versieht. Wendet man also die Formel (6.) an, indem man t_1 an Stelle von t_0 setzt, so erhält man an Stelle von t_1 die Function t_2 für die Bestandalter im Anfange des dritten Abtriebes; setzt man t_2 für t_0, so findet man t_3, die Function für die Bestandalter im Anfange des vierten Abtriebes u. s. w. Die Formel (6.) ist also eine Recursionsformel zur Bestimmung der Functionen

$$t_1,\quad t_2,\quad \ldots\quad t_n,\quad \ldots,$$

welche die aufeinanderfolgenden Abtriebe characterisiren. Ich werde an Stelle dieser Formel eine directe Bestimmung von t_n setzen, und werde dann zeigen welcher Grenze diese Function mit wachsendem n sich nähert.

Um diese Untersuchung bequemer führen zu können, führe ich an Stelle von t_n die Function

$$(7.)\qquad \varphi_n(x) = e^{mt_n-\varepsilon\left(1-\frac{x}{l}\right)}$$

ein. Mit Benutzung derselben verwandelt sich (6.) in die folgende Formel, welche zur Ableitung von ψ_{n+1} aus ψ_n dient:

$$(8.)\qquad \psi_{n+1}(x) = \frac{1-\frac{k}{l}\int\limits_0^x \psi_n(\xi)\,d\xi}{1-\frac{k}{l}\int\limits_0^l \psi_n(\xi)\,d\xi},$$

wo

$$(9.)\qquad k = \varepsilon e^{-\varepsilon}.$$

Aus der Formel (8.) folgt, dass für $n>0$ immer $\psi_n(l)=1$. Setzen wir

$$(10.)\qquad \psi_n(x) = \frac{\chi_n(x)}{\chi_n(l)},$$

so geht (8.) über in

$$(11.)\qquad \frac{\chi_{n+1}(x)}{\chi_{n+1}(l)} = \frac{\chi_n(l)-\frac{k}{l}\int\limits_0^x \chi_n(\xi)\,d\xi}{\chi_n(l)-\frac{k}{l}\int\limits_0^l \chi_n(\xi)\,d\xi}.$$

Die Functionen $\chi(x)$ sind aus (10.) nur bis auf constante Factoren bestimmt; wir können diese willkürlich bestimmen, indem wir an Stelle von (11.) die Gleichung setzen:

$$(12.)\qquad \chi_{n+1}(x) = \chi_n(l)-\frac{k}{l}\int\limits_0^x \chi_n(\xi)\,d\xi.$$

Hierdurch ist die Gleichung (11.) befriedigt; die Functionen χ_n aber sind mit Hülfe von (12.) völlig bestimmt, sobald $\chi_0(x)$ gegeben ist. Ich nehme an, dass $\chi_0=\psi_0$; wir haben dann die folgende Reihe von Gleichungen:

$$(13.)\qquad \begin{cases} \chi_1(x) = 1-\frac{k}{l}\int\limits_0^x \psi_0(\xi)\,d\xi, \\ \chi_2(x) = \chi_1(l)-\frac{k}{l}\int\limits_0^x \chi_1(\xi)\,d\xi, \\ \chi_3(x) = \chi_2(l)-\frac{k}{l}\int\limits_0^x \chi_2(\xi)\,d\xi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Bezeichnen wir jetzt durch $\varphi(x,s)$ die Reihe:

$$(14.)\qquad \varphi(x,s) = 1+\chi_1(x)\frac{s}{k}+\chi_2(x)\frac{s^2}{k^2}+\chi_3(x)\frac{s^3}{k^3}+\cdots,$$

so können wir die Gleichungen (13.) in die eine zusammenfassen, welche

entsteht, indem man dieselben der Reihe nach mit $1, \frac{s}{k}, \frac{s^2}{k^2}$ etc. multiplicirt:

$$(15.)\quad \frac{k}{s}\{\varphi(x,s)-1\} = \varphi(l,s)-\frac{k}{l}\int_0^x(\psi_0(\xi)+\varphi(\xi,s)-1)\,d\xi.$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von φ. Differentiirt man dieselbe nach x, so erhält man für φ die Differentialgleichung

$$\frac{d.\varphi(x,s)}{dx} = -\frac{s}{l}\{\psi_0(x)+\varphi(x,s)-1\},$$

aus welcher

$$\varphi(x,s) = 1+e^{-\frac{sx}{l}}Z-\frac{s}{l}\int_0^x e^{s\frac{\xi-x}{l}}\psi_0(\xi)\,d\xi.$$

folgt. Die willkürliche Constante Z, welche hier von s abhängen kann, bestimmt man aus der Gleichung

$$\varphi(0,s)-1 = \frac{s}{k}\varphi(l,s),$$

welche entsteht, wenn man in (15.) $x=0$ setzt. Man findet dann

$$Z = \frac{\frac{s}{k}-\frac{s^2}{kl}\int_0^l e^{s\frac{(\xi-l)}{l}}\psi_0(\xi)\,d\xi}{1-\frac{s}{k}e^{-s}},$$

und daher

$$(16.)\quad \begin{cases} \varphi(x,s) \\ = 1+\dfrac{\frac{s}{k}e^{-\frac{sx}{l}}}{1-\frac{s}{k}e^{-s}}-\dfrac{\frac{s^2}{kl}}{1-\frac{s}{k}e^{-s}}\displaystyle\int_0^l e^{s\frac{\xi-x-l}{l}}\psi_0(\xi)\,d\xi-\frac{s}{l}\int_0^x e^{s\frac{\xi-x}{l}}\psi_0(\xi)\,d\xi. \end{cases}$$

Die verschiedenen Functionen χ_n entstehen als Coefficienten der Entwicklung dieser Function nach aufsteigenden Potenzen von s, und man beweist leicht a posteriori, dass die Coefficienten der Entwicklung von (16.) den Gleichungen (13.) wirklich genügen.

Den Ausdruck φ kann man auf die einfachere Entwicklung der Function

$$(17.)\quad \vartheta(x,s) = X_1(x)\frac{s}{k}+X_2(x)\frac{s^2}{k^2}+\cdots = \frac{se^{-\frac{sx}{l}}}{k-se^{-s}}$$

zurückführen, indem man setzt:

$$\varphi(x, s) = 1+\vartheta(x, s)-\frac{s}{l}\int_0^l \vartheta(l+x-\xi, s)\psi_0(\xi)\,d\xi-\frac{s}{l}\int_0^x e^{s\frac{\xi-x}{l}}\psi_0(\xi)\,d\xi.$$

Führt man hier für ϑ und für $e^{s\frac{\xi-x}{l}}$ ihre Reihenentwicklungen ein, so ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten

$$(18.)\quad \chi_n(x) = X_n(x)-\frac{k}{l}\int_0^l X_{n-1}(l+x-\xi)\psi_0(\xi)\,d\xi-\frac{k^n}{l^n.1.2\ldots n-1}\int_0^x (\xi-x)^{n-1}\psi_0(\xi)\,d\xi,$$

und daher

$$(19.)\quad \begin{cases} \psi_n(x) = e^{mt_n+c\left(1-\frac{x}{l}\right)} \\ = \dfrac{X_n(x)-\dfrac{k}{l}\displaystyle\int_0^l X_{n-1}(l+x-\xi)\psi_0(\xi)\,d\xi-\dfrac{k^n}{l^n.1.2\ldots n-1}\displaystyle\int_0^x(\xi-x)^{n-1}\psi_0(\xi)\,d\xi}{X_n(l)-\dfrac{k}{l}\displaystyle\int_0^l X_{n-1}(2l-\xi)\psi_0(\xi)\,d\xi-\dfrac{k^n}{l^n.1.2\ldots n-1}\displaystyle\int_0^l(\xi-x)^{n-1}\psi_0(\xi)\,d\xi}. \end{cases}$$

Die Untersuchung der verschiedenen Anfangszustände ist hierdurch auf die Bildung der Functionen X zurückgeführt.

§. 3.

Bildung und Umformung der Functionen $X_n(x)$.

Die Functionen $X_n(x)$ sind ganze rationale Functionen von x. Setzt man

$$\frac{1}{k-se^{-s}} = \alpha_1+\alpha_2 s+\alpha_3 s^2+\cdots,$$

also

$$\vartheta(x, s) = s(\alpha_1+\alpha_2 s+\alpha_3 s^2+\cdots)\left(1-\frac{sx}{1.l}+\frac{s^2x^2}{1.2.l^2}-+\cdots\right),$$

so hat man

$$X_n(x) = k^n\left\{\frac{\alpha_1\left(-\frac{x}{l}\right)^{n-1}}{1.2\ldots n-1}+\frac{\alpha_2\left(-\frac{x}{l}\right)^{n-2}}{1.2\ldots n-2}+\cdots+\frac{\alpha_{n-2}\left(-\frac{x}{l}\right)^2}{1.2}+\frac{\alpha_{n-1}\left(-\frac{x}{l}\right)}{1}+\alpha_n\right\}.$$

Da ferner

$$\frac{1}{k-se^{-s}} = \frac{1}{k}+\frac{se^{-s}}{k^2}+\frac{s^2e^{-2s}}{k^3}\cdots$$

$$= \frac{1}{k}+\frac{s}{k^2}\left(1-\frac{s}{1}+\frac{s^2}{1.2}\cdots\right)+\frac{s^2}{k^3}\left(1-\frac{2s}{1}+\frac{(2s)^2}{1.2}-\cdots\right)+\cdots,$$

so haben die Coefficienten α folgende Werthe:

$$\alpha_1 = \frac{1}{k},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{k^2},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{k^3} - \frac{1}{1.k^2},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{k^4} - \frac{2}{1.k^3} + \frac{1}{1.2.k^2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\alpha_h = \frac{1}{k^h} - \frac{h-2}{1.k^{h-1}} + \frac{(h-3)^2}{1.2.k^{h-2}} - \frac{(h-4)^3}{1.2.3.k^{h-3}} + \cdots + (-1)^h . \frac{1}{1.2\ldots h-2.k^2}.$$

Diese Formeln geben sofort die vollständige Darstellung der Functionen X_n. Aber es ist in dieser Form nicht möglich, zu übersehen, welcher Grenze dieselben mit wachsendem n sich nähern. Hierzu führt die folgende Umformung derselben.

Die Functionen X_n entstanden als Entwicklungscoefficienten der Reihe $\vartheta(x, s)$. Aber diese ist nur dann eine Function im eigentlichen Sinne, wenn sie convergirt, also für solche complexe Werthe von k, für welche der Modul von $s e^{-s}$ kleiner als k ist. Ich werde weiter unten zeigen, dass diejenige Wurzel der Gleichung

$$s e^{-s} = k,$$

deren Modul der kleinste ist, die reelle und evidente Wurzel ε ist. Setzen wir also $s = u + v\sqrt{-1}$, so convergirt die Reihe ϑ in der u, v Ebene innerhalb eines Kreises, dessen Radius kleiner als ε ist. Man kann daher die Function $\vartheta(x, \zeta)$, wenn ζ innerhalb dieses Kreises liegt, als bestimmtes Integral definiren, mit Hülfe der Formel:

$$\int \frac{\vartheta(x, s)}{s(s-\zeta)} ds = 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{\vartheta(x, \zeta)}{\zeta},$$

wobei das Integral in der u, v Ebene über eine geschlossene Curve genommen wird, welche alle Wurzeln der Gleichung $k = s e^{-s}$ ausschliesst, den Punkt ζ aber einschliesst. Und es wird also

$$\vartheta(x, \zeta) = \frac{\zeta}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{-\frac{xs}{l}}}{k - s e^{-s}}\, \frac{ds}{s - \zeta};$$

das Integral kann auf einen unendlich kleinen Kreis um den Punkt ζ zusammengezogen werden. Man kann aber dieses Integral auch durch die Summe der entgegengesetzt genommenen Integralreste für die verschiedenen Wurzeln

der Gleichung $k = s e^{-z}$ verwandeln, welche innerhalb eines sehr grossen Kreises mit dem Radius R liegen, vermehrt um das Integral der oben integrirten Function über diesen Kreis selbst. Die Wurzeln der transcendenten Gleichung, welche innerhalb dieses Kreises liegen, seien $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$. Der Integralrest für σ_i ist

$$\frac{e^{-\frac{x\sigma_i}{l}}}{(\sigma_i-\zeta)e^{-\sigma_i}(\sigma_i-1)} = \frac{e^{\sigma_i\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{(\sigma_i-\zeta)(\sigma_i-1)};$$

man hat also

$$(20.)\qquad \vartheta(x,\zeta) = -\zeta\sum_1^m \frac{e^{\sigma_i\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{(\sigma_i-\zeta)(\sigma_i-1)} + \frac{\zeta}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{e^{-\frac{xz}{l}}}{k-se^{-z}}\,\frac{ds}{s-\zeta},$$

worin das Integral über den Kreis R auszudehnen ist.

Wenn, wie hier vorausgesetzt wird, der Modul von ζ kleiner als ε ist, so ist er um so mehr kleiner als R. In dem Integral kann man also $\frac{1}{s-\zeta}$ nach aufsteigenden Potenzen entwickeln, und man erhält dann dasselbe in der Form:

$$\int \frac{e^{-\frac{xz}{l}}}{k-se^{-z}}\left(\frac{1}{s}+\frac{\zeta}{s^2}+\frac{\zeta^2}{s^3}\cdots\right)ds.$$

Ich werde zeigen, dass wenn x ein von Null verschiedener echter Bruch ist, die Function

$$\frac{e^{-\frac{xz}{l}}}{k-se^{-z}}$$

auf dem Kreise verschwindet, bis auf einen unendlich kleinen Theil, in welchem sie endlich ist; nur bei $x=0$ wird sie auf einem endlichen Theil des Kreises endlich. Die Functionen also, welche mit ζ, ζ^2, etc. multiplicirt sind, nähern sich für grosse R an jeder Stelle des Kreises der Null. Man schliesst daher, dass für grosse m das Integral in (20.) immer ausgelassen werden kann, und dass man also setzen kann:

$$(21.)\qquad \vartheta(x,\zeta) = -\zeta\sum_1^\infty \frac{e^{\sigma_i\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{(\sigma_i-\zeta)(\sigma_i-1)},$$

ausgenommen für $x=0$. Entwickelt man aber nach Potenzen von ζ, so hat man

$$(22.)\qquad X_n = -k^n\sum_1^\infty \frac{e^{\sigma_i\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{(\sigma_i-1)\sigma_i^n},$$

und diese Formel ist selbst für $x=0$ dem Obigen zufolge immer richtig, ausgenommen bei $n=1$, wo für $x=0$ eine Ausnahme eintritt.

Was nun die zu beweisende Eigenschaft der Function

$$\frac{e^{-\frac{xz}{l}}}{k - ze^{-z}}$$

angeht, so convergirt dieselbe, da x positiv, für grosse Werthe von z offenbar gegen Null, sobald nur der reelle Theil von z negativ oder Null ist; dann kann die Function mit Vernachlässigung von k durch

$$\frac{e^{z\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{z}$$

ersetzt werden, was offenbar für grosse R verschwindet. Wenn dagegen der reelle Theil von z positiv ist, so kann man der zu betrachtenden Function die Form

$$\frac{e^{z\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{ke^{z} - z}$$

geben, und z gegen ke^z vernachlässigen, so dass die Form $e^{-\frac{zx}{l}}$ erscheint, welche abermals gegen Null convergirt. Ausgenommen sind nur Werthe von z, für welche der Modul von e^z mit dem von z vergleichbar wird. Zwar wird der Nenner nie zu Null, wenn nur, wie hier immer vorausgesetzt wird, der Kreis R nie durch einen der Punkte σ geht; daher wird auch die Function auf dem Kreise nie unendlich. Aber sie wird endlich, wenn der Modul $\sqrt{u^2+v^2}$ von $z = u+v\sqrt{-1}$ mit e^u vergleichbar ist. Dies kann für grosse Werthe von $\sqrt{u^2+v^2}$ nur dadurch eintreten, dass u relativ klein gegen v ist. Setzt man also $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$, und verwandelt dadurch das Integral in ein nach φ von 0 bis 2π genommenes, so verschwindet die zu integrirende Function immer, ausgenommen Werthe von φ, welche unendlich wenig kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ oder unendlich wenig grösser als $\frac{3}{2}\pi$ sind, was zu beweisen war.

§. 4.

Eigenschaften der Gleichung $k = ze^{-z}$.

Die transcendente Gleichung, auf welche die obige Untersuchung führt, hat, da $k = \varepsilon e^{-\varepsilon}$, die evidente reelle Wurzel $z = \varepsilon$, welche der Voraussetzung nach kleiner als 1 ist. Die übrigen reellen Wurzeln findet man als die Abscissen der Punkte, in denen die Curve

$$y = e^x$$

von der durch den Anfangspunkt gehenden Geraden

$$y = \frac{x}{k}$$

geschnitten wird. Nun hat die Curve $y = e^x$ stets dieselbe Art der Krümmung; sie nähert sich der Axe $-Y$ asymptotisch, und ihre Tangente nähert sich mit wachsendem x der Vertikalen. Die Tangente endlich, welche vom Anfangspunkt an sie gezogen wird, hat die Gleichung

$$y = ex;$$

für den Berührungspunkt ist $x = 1$, $y = e$.

Da nun stets $\frac{1}{k} > e$, so schneidet die Gerade $y = \frac{x}{k}$ die Curve $y = e^x$ zweimal; und zwar einmal mit kleinerer, einmal mit grösserer Abscisse, als die des Berührungspunkts der Tangente, welche gleich 1 war. Die transcendente Gleichung hat also nur zwei reelle Wurzeln; die eine, ε, ist kleiner, die andere grösser als 1. Man hat also den Satz:

I. Die transcendente Gleichung $\varepsilon e^{-\varepsilon} = z e^{-z}$ *hat, wenn* $\varepsilon < 1$, *ausser der evidenten Wurzel* $z = \varepsilon$ *nur eine reelle Wurzel, welche stets grösser als* 1 *ist. Sie nähert sich mit* ε *der* 1, *und wird unendlich gross, wenn* ε *sich der Null nähert.*

Um die imaginären Wurzeln zu discutiren, setze ich

$$z = u + v\sqrt{-1};$$

die Gleichung zerlegt sich dann in die beiden:

$$(23.)\quad \begin{cases} u = ke^u \cos v, \\ v = ke^u \sin v. \end{cases}$$

Da die conjugirten imaginären Wurzeln sich nur durch das Vorzeichen von v unterscheiden, so genügt es, positive v zu betrachten. Für solche ist nach der zweiten Gleichung (23.) auch $\sin v$ positiv, zugleich

$$e^u = \frac{v}{k \sin v} = \frac{v}{\sin v} \cdot \frac{e^\varepsilon}{\varepsilon} > e^\varepsilon,$$

also auch u positiv und grösser als ε, daher endlich nach der ersten Gleichung (23.) auch $\cos v$ positiv. Die Werthe von v liegen also in den Intervallen $2m\pi$ bis $\frac{4m+1}{2}\pi$ $(m = 0, 1, \ldots)$.

Nehmen wir einen Werth von v als gefunden an, so finden wir für dazugehörige u die Gleichung

$$u = ke^u \cos v.$$

Wir finden daher diesen Werth als Abscisse eines Schnittpunkts der Curve $y = e^x$ mit der Geraden

$$y = \frac{x}{k \cos v}.$$

Diese Gerade bildet gegen die X-Axe einen grössern Winkel als die oben betrachtete; daher ist die Abscisse des einen Schnittpunkts kleiner als ε, die des andern grösser als die reelle Wurzel der transcendenten Gleichung. Die erstere kann hier nicht die Grösse u liefern, welche grösser als ε sein sollte; daher hat man ferner den Satz:

II. Die reellen Theile der imaginären Wurzeln von $k = z e^{-z}$ sind stets positiv und grösser als die von ε verschiedene reelle Wurzel der Gleichung.

Was die imaginären Theile der Wurzeln angeht, so können dieselben nach dem Vorigen nur in den Intervallen

$$0 \dots \tfrac{1}{2}\pi, \quad 2\pi \dots \tfrac{5}{2}\pi, \quad 4\pi \dots \tfrac{9}{2}\pi, \quad \text{etc.}$$

liegen. Es entsteht die Frage, ob in jedem dieser Intervalle Werthe von v liegen, und wie viele. Um dies zu untersuchen, eliminire ich aus (23.) die Grösse u. Man erhält dann für v die Gleichung:

$$e^{\frac{v}{\operatorname{tg} v}} \frac{\sin v}{v} = k.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung betrachte ich als Abscissen der Schnittpunkte der Geraden $y = k$ mit der Curve

$$y = e^{\frac{x}{\operatorname{tg} x}} \frac{\sin x}{x}.$$

Nun folgt aus dieser Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = -e^{\frac{x}{\operatorname{tg} x}} \frac{(x - \sin x \cos x)^2 + \sin^4 x}{x^2 \sin x}.$$

In den oben angegebenen Intervallen ist dieser Ausdruck stets negativ; daher fällt die Curve in diesen Intervallen beständig; es kann daher in jedem nur einmal $y = k$ werden, also in jedem nur ein Werth von v existiren. Setzen wir nun die Grenzen der Intervalle ein, so finden wir:

$$\begin{array}{ll} x = 0 \;\; : y = e, & x = \frac{\pi}{2} : y = \frac{2}{\pi}, \\ x = 2\pi : y = \infty, & x = \frac{5\pi}{2} : y = \frac{2}{5\pi}, \\ x = 4\pi : y = \infty, & x = \frac{9\pi}{2} : y = \frac{2}{9\pi}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Da nun $\frac{1}{k} > e$, so kann im ersten Intervall niemals $y = \frac{1}{k}$ werden, wohl aber in jedem der andern. In dem ersten Intervall liegt also kein Werth von v, in den anderen je einer. Wir können die Intervalle noch beschränken,

indem wir statt der Grenzen $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$, etc. die entsprechenden Wurzeln der Gleichung

$$\xi = \varepsilon \operatorname{tg} \xi$$

einsetzen. Für diese wird immer

$$y = \frac{\cos\xi}{k},$$

also kleiner als $\frac{1}{k}$, und die Wurzeln v liegen also zwischen $2m\pi$ und den entsprechenden Wurzeln der Gleichung $\xi - \varepsilon \operatorname{tg} \xi = 0$. So haben wir noch den Satz:

III. Die imaginären Theile der Wurzeln der Gleichung $k = z e^{-z}$ liegen einzeln in den Intervallen

$$2\pi \dots \frac{5\pi}{2}, \quad 4\pi \dots \frac{9\pi}{2}, \quad 6\pi \dots \frac{13\pi}{2}, \quad \text{etc.}$$

und sind jedesmal kleiner als die entsprechenden Wurzeln der Gleichung $\xi - \varepsilon \operatorname{tg} \xi = 0$.

Diese Eigenschaften beweisen alles, was oben benutzt wurde. Die kleinste Wurzel ist ε; die übrigen liegen so, dass sie durch passend gewählte Kreise R getrennt werden können, und die Radien der letztern wachsen bis ins Unendliche.

§. 5.

Grenze, welcher die untersuchten Functionen mit wachsendem n sich nähern.

Die in §. 3. zuletzt gegebene Form der Functionen X_n ist sehr geeignet, um den Ausdruck zu ermitteln, welchem bei wachsendem n diese Functionen sich nähern. Bezeichnen wir durch σ die von ε verschiedene reelle Wurzel der transcendenten Gleichung, durch σ_h die übrigen, so ist

$$X_n(x) = -k^n \left\{ \frac{e^{\varepsilon\left(1-\frac{x}{T}\right)}}{(\varepsilon-1)\varepsilon^n} + \frac{e^{\sigma\left(1-\frac{x}{T}\right)}}{(\sigma-1)\sigma^n} + \Sigma \frac{e^{\sigma_h\left(1-\frac{x}{T}\right)}}{(\sigma_h-1)\sigma_h^n} \right\}$$

$$= -k^n \left\{ \frac{e^{\varepsilon\left(1-\frac{x}{T}\right)}}{(\varepsilon-1)\varepsilon^n} + \frac{1}{\sigma^n}\left(\frac{e^{\sigma\left(1-\frac{x}{T}\right)}}{\sigma-1} + \Sigma \frac{e^{\sigma_h\left(1-\frac{x}{T}\right)}}{\sigma_h-1} \left(\frac{\sigma}{\sigma_h}\right)^n \right) \right\}.$$

Nun ist nach dem Vorigen der Modul von $\frac{\sigma}{\sigma_h}$ immer kleiner als 1; daher nähert sich $\left(\frac{\sigma}{\sigma_h}\right)^n$ mit wachsendem n der Grenze Null, und man kann für sehr grosse n die Function $X_n(x)$ ersetzen durch den Ausdruck

$$X_n(x) = -k^n \left\{ \frac{e^{\varepsilon\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{(\varepsilon-1)\varepsilon^n} + \frac{e^{\sigma\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{(\sigma-1)\sigma^n} \right\}.$$

Auch hier wird noch das zweite Glied dem ersten gegenüber beständig kleiner; aber da, wie man sehen wird, die von dem ersten Gliede herrührenden Theile in den Functionen $\psi_n(x)$ sich zerstören, so muss man das zweite beibehalten.

Setzen wir den Grenzwerth von $X_n(x)$ in die Function $\chi_n(x)$ ein, so erhalten wir:

$$(24.)\quad \begin{cases} \frac{1}{k^n}\chi_n(x) = -\frac{e^{\varepsilon\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{(\varepsilon-1)\varepsilon^n} - \frac{e^{\sigma\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{(\sigma-1)\sigma^n} \\ \qquad + \frac{1}{l}\int_0^l \left(\frac{e^{\varepsilon\frac{\xi-x}{l}}}{(\varepsilon-1)\varepsilon^{n-1}} + \frac{e^{\sigma\frac{\xi-x}{l}}}{(\sigma-1)\sigma^{n-1}} \right)\psi_0(\xi)\,d\xi \\ \qquad - \frac{1}{1.2\ldots n-1}\int_0^x \left(\frac{\xi-x}{l}\right)^{n-1}\psi_0(\xi)\,d\xi. \end{cases}$$

Nun ist der erste Theil des von 0 bis l genommenen Integrals mit Rücksicht auf den Werth von ψ_0 (7.):

$$\frac{1}{l}\int_0^l \frac{e^{\varepsilon\frac{\xi-x}{l}}}{(\varepsilon-1)\varepsilon^{n-1}} e^{mf_0(\xi)}\,d\xi = \frac{e^{\varepsilon\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{l(\varepsilon-1)\varepsilon^{n-1}}\int_0^l e^{mf_0(\xi)}\,d\xi.$$

Aber nach (3.) wird, wenn wir $t=0$, und also auch $\xi=0$ setzen:

$$\frac{l}{\varepsilon} = \int_0^l e^{mf_0}\,d\xi.$$

Daher nimmt das untersuchte Glied den Werth

$$\frac{e^{\varepsilon\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{(\varepsilon-1)\varepsilon^n}$$

an, und hebt sich sich gegen das erste Glied in $\chi_n(x)$ auf. Es bleibt also:

$$\frac{\sigma^n}{k^n}\chi_n(x) = -\frac{e^{\sigma\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{\sigma-1}\left(1-\frac{\sigma}{l}\int_0^l e^{\sigma\frac{\xi-l}{l}}\psi_0(\xi)\,d\xi\right) - \frac{\sigma^n}{1.2\ldots n-1}\int_0^x \left(\frac{\xi-x}{l}\right)^{n-1}\psi_0(\xi)\,d\xi.$$

Das erste Glied rechts ist hier von dem Index n bereits unabhängig; das zweite nähert sich mit wachsendem n der Grenze Null. Denn erstlich wird jedes Glied des Integrals mit einer immer höheren Potenz des echten Bruches $\frac{\xi-x}{l}$ multiplicirt; zweitens nähert sich auch der Ausdruck

$$\frac{\sigma^n}{1.2\ldots n-1}$$

fortwährend mehr der Null, wenn man einen Werth von n erreicht hat, welcher grösser als σ ist. Für grosse n kann man also endlich setzen:

$$\chi_n(x) = -\frac{k^n}{\sigma^n}\,\frac{e^{\sigma\left(1-\frac{x}{l}\right)}}{\sigma-1}\left(1-\frac{\sigma}{l}\int_0^l e^{\sigma\frac{\xi-l}{l}}\psi_0(\xi)\,d\xi\right),$$

Daher wird nun auch

$$\frac{\chi_n(x)}{\chi_n(l)} = \psi_n(x) = e^{\sigma\left(1-\frac{x}{l}\right)},$$

und endlich

$$e^{mt_n} = \psi_n(x)\,e^{-\varepsilon\left(1-\frac{x}{l}\right)} = e^{(\sigma-\varepsilon)\left(1-\frac{x}{l}\right)},$$

oder

$$(25.)\qquad t_n = \frac{\sigma-\varepsilon}{m}\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Diese Gleichung lehrt, dass die Abtriebe bei wachsendem n schliesslich von dem Anfangszustande des Waldes (t_0) völlig unabhängig, und ihrem Verlauf nach völlig gleich werden, da ihre Anfangszustände einander gleich sind.

Setzt man diesen Ausdruck von t_n für t_0 in die Formel (4.), so erhält man für die Schlagzeit τ bei dem aus grossem n hervorgehenden *normalen Betriebe:*

$$\tau = \frac{\sigma-\varepsilon}{m}\,\frac{x}{l},$$

also

$$\tau+t_n = \frac{\sigma-\varepsilon}{m}.$$

Es wird also jeder Baum in gleichem Alter $\frac{\sigma-\varepsilon}{m}$ gefällt; und dieses Alter, die normale Umtriebszeit, erhält man, indem man die von Null verschiedene reelle Wurzel $\mu=\sigma-\varepsilon$ der transcendenten Gleichung

$$\varepsilon e^{\mu} = \mu+\varepsilon$$

durch lognat$\,1,0p$ *dividirt.*

Die so berechnete Umtriebszeit ist etwas verschieden von derjenigen u, welche die in der Forstwissenschaft übliche Formel

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{e^{mu}-1}{u.0,0p}$$

liefert. Dieser Unterschied rührt davon her, dass wir nicht jährliche, sondern

stetige Nutzung angenommen haben. Aber diese Differenz ist äusserst gering, namentlich wenn die Umtriebszeit einigermassen gross ist. Bezeichnet man die oben abgeleitete Umtriebszeit durch T, so ist unsere Formel

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{e^{mT}-1}{T.\log\text{nat}\,1,0p}.$$

Nun ist $0,0p$ sehr klein, $\log\text{nat}\,1,0p$ von $0,0p$ nur um eine Grösse verschieden, welche von der Ordnung $(0,0p)^2$ ist. Daher kann man auch setzen

$$T = u(1-m\alpha),$$

wo das hinzugefügte Glied wegen des Factors m eine kleine Correction giebt; und man findet

$$\alpha = \frac{1}{2(\varepsilon+um-1)},$$

eine Grösse, welche um so kleiner ist, je beträchtlicher die Grösse der Umtriebszeit u ist.

Die Formel (25.) stellt übrigens den einzig möglichen Anfangszustand dar, welcher sich stets unverändert bei jedem Abtriebe reproducirt. Sucht man nämlich aus (6.) eine solche Function t_0, welche gleich t_1 ist, oder aus (8.) eine Function ψ_n, welche gleich ψ_{n+1} ist, so sieht man zunächst aus (8.), dass diese Function ihrem Differentialquotienten proportional wird. Daher ist sie eine Exponentialfunction; dasselbe tritt daher bei e^{mt_0} ein, und man kann setzen

$$e^{mt_0} = e^{mt_1} = A\,e^{\mu\left(1-\frac{x}{T}\right)}.$$

Führt man dieses in (6.) ein, so findet man

$$A = 1, \quad \varepsilon e^{\mu} = \mu+\varepsilon,$$

was zu beweisen war.

§. 6.

Modificationen, welche bei Benutzung der einfachen Zinsrechnung eintreten.

Bei der Methode der einfachen Zinsen, wird die Formel

$$y = B(1,0p^u-1)$$

ersetzt durch die Formel

$$y = B.0,0p.u.$$

Man kann diesen Fall immer als speciellen Fall des vorigen ansehen, und zwar auf folgende Weise. *Nehmen wir an, der Zinsfuss p sei unendlich klein,*

der Bodenwerth B unendlich gross, ihr Product aber endlich, und zwar gleich dem Producte eines fingirten endlichen Bodenwerths B' mit einem fingirten endlichen Procent p'. Dann erhält man aus der ersten Formel:

$$y = B\left(1+u.0,0p+\frac{u^2}{1.2}(0,0p)^2\cdots-1\right) = Bu.0,0p = B'.u.0,0p'.$$

Für K erhält man nun den Ausdruck:

$$lK = B\int_0^l (e^{mt_0}-1)\,dx = B\int_0^l mt_0\,dx = B'.0,0p'\int_0^l t_0\,dx,$$

welcher endlich bleibt. Aber da B unendlich gross wird, so hat man

$$\varepsilon = \frac{B}{K+B} = 1-\frac{K}{B}\cdots$$

unendlich wenig von 1 verschieden.

Was nun die Vorgänge des ersten Abtriebs betrifft, so findet man an Stelle der Formeln (4.), (5.), (6.) die folgenden:

$$\tau = \frac{1}{l}e^{\frac{x}{T}}\int_0^x e^{-\frac{x}{T}}t_0\,dx,$$

$$T = \frac{e}{l}\int_0^l e^{-\frac{x}{T}}t_0\,dx,$$

$$t_1 = T-\tau = \frac{1}{l}\left\{e\int_0^l e^{-\frac{x}{T}}t_0\,dx - e^{\frac{x}{T}}\int_0^x e^{-\frac{x}{T}}t_0\,dx\right\}.$$

Für den normalen Zustand hat man

$$(26.)\qquad t_n = \frac{\mu}{0,0p}\left(1-\frac{x}{l}\right),$$

wo μ die von 0 verschiedene Wurzel der Gleichung

$$\varepsilon e^{\mu} = \mu+\varepsilon$$

ist. Da nun ε nahe an 1 rückt, so rückt nach §. 4 auch $\sigma=\mu+\varepsilon$ nahe an 1, und μ selbst ist also von 0 sehr wenig verschieden. Während man also bei der Berechnung der imaginären Wurzeln der transcendenten Gleichung ohne Weiteres $\varepsilon=1$ setzen darf, so darf doch bei der Berechnung der reellen Wurzel dies nicht geschehen; vielmehr erhält man

$$\frac{1}{\varepsilon} = 1+\frac{K}{B},\cdots = \frac{e^{\mu}-1}{\mu} = 1+\frac{\mu}{2}\cdots,$$

also

$$\mu = \frac{2K}{B}.$$

Setzt man dies in die Formel (26.) ein, so findet man

$$t_n = \frac{2K}{B.0,0p}\left(1-\frac{x}{l}\right) = \frac{2K}{B'.0,0p'}\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Die Umtriebszeit ist also durch die Formel

$$T = \frac{2K}{B'.0,0p'}$$

gegeben.

Ich übergehe die bei den andern Punkten der Untersuchungen eintretenden Modificationen, welche leicht zu finden sind.

Giessen, den 14. April 1867.

Sur l'ordre des conditions de la coexistence des équations algébriques à plusieurs variables.

(Par M. *Samuel Roberts* à Londres.)

Le beau mémoire de M. *Jonquières* sur les problèmes de contact des courbes algébriques (ce journal, Tome LXVI, cahier 4) me donne l'occasion d'offrir des résultats auxquels, de mon côté, je suis parvenu indépendamment en faisant usage d'un principe analogue ou plutôt identique. Les questions dont je m'occupe, se rapportent à l'ordre des conditions nécessaires pour que les équations données puissent coexister. Pour démontrer ou pour découvrir plusieurs théorèmes relatifs à des fonctions générales (mais toujours algébriques) on substitue au système donné un système de facteurs linéaires. Par exemple, si S équations, renfermant k variables indépendantes, doivent avoir une solution commune, il est permis d'employer, au lieu de ces équations, S produits composés de facteurs linéaires, en observant que l'ordre des conditions de coexistence ne peut changer de valeur à cause de cette restriction.

L'ordre d'un système de conditions explicites, dont le nombre n'est pas plus grand que le nombre des variables qu'elles renferment, est le produit des degrés des équations de condition. Mais en cas que les conditions se trouvent implicites et qu'on introduise des systèmes étrangers par notre procédé d'élimination, l'ordre du système sera le produit des équations dérivées moins la somme des ordres des systèmes étrangers. Par exemple, si l'on a simultanément

$$(1.)\quad Ax+By = 0,$$
$$(2.)\quad A'x+B'y = 0,$$
$$(3.)\quad A''x+B''y = 0$$

et qu'on élimine x, y successivement entre (1.), (2.) et entre (1.), (3.), on aura les conditions $AB'-A'B=0$, $AB''-A''B=0$, en introduisant, cependant, le système étranger $A=0$, $B=0$. Pour obtenir l'ordre net, il faut soustraire l'ordre de ce dernier système de l'ordre des équations dérivées. Encore, si l'on a simultanément

$$\begin{aligned}
&(4.) \quad Ax + By + Cz = 0,\\
&(5.) \quad A'x + B'y + C'z = 0,\\
&(6.) \quad A''x + B''y + C''z = 0,\\
&(7.) \quad A'''x + B'''y + C'''z = 0
\end{aligned}$$

et qu'on élimine x, y, z entre (4.), (5.), (6.) et entre (4.), (5.), (7.) successivement, le résultat sera d'un ordre connu. Mais, le système

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

étant étranger, il faut soustraire l'ordre de ce système de celui que nous venons de trouver.

Soit proposé le système linéaire

$$\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y \\ A_2x + B_2y \\ A_3x + B_3y \\ \cdots\cdots \\ A_sx + B_sy \end{array}\right\} = 0,$$

où A_1, A_2, ... A_s sont constants, mais où B_1, B_2, ... B_s désignent des fonctions du degré α à l'égard d'autres variables, et qu'on demande l'ordre des conditions de la coexistence du système, c'est-à-dire des conditions nécessaires pour que les équations puissent avoir une racine commune. Dans ce cas, il est aisé de montrer que l'ordre demandé est α^{s-1}. En effet, si l'on admet que l'ordre des conditions relatives à un système de $s-1$ équations formées d'une manière semblable, soit α^{s-2} et qu'on considère 1° le système renfermant les $s-1$ premières équations, 2° le système renfermant la première et la dernière des équations, on trouvera l'ordre α^{s-1}, en prenant les ordres de ces systèmes, savoir α^{s-2}, α, et en multipliant l'un des résultats par l'autre. Le système étranger est

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,\\ B_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_2x + B_2y \\ A_3x + B_3y \\ \cdots\cdots \\ A_{s-1}x + B_{s-1}y \end{array}\right\} = 0.$$

On voit la même chose en éliminant x, y entre la première et la seconde, la

première et la troisième etc. des équations. En ce cas, la correction généralement effective s'évanouit, et un facteur de l'ordre du seul système étranger sera l'ordre de $(A_1=0, B_1=0)$, qui est nul. On voit facilement que la formule est vraie pour $s=2$, $s=3$, ce qui démontre la proposition.

Supposons maintenant que les lettres $A_1, A_2, \ldots A_s$ désignent des fonctions des degrés $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ par rapport aux variables secondaires, et que les lettres $B_1, B_2, \ldots B_s$ désignent des fonctions des degrés $\mu_1+\alpha$, $\mu_2+\alpha, \ldots \mu_s+\alpha$ par rapport aux mêmes variables. Il est important d'observer que l'ordre des conditions dont nous nous occupons, ne dépend que des degrés des coefficients et qu'il ne dépend point de leurs formes spécifiques. D'après cela, on peut supposer que les coefficients de chaque équation $A_p x + B_p y = 0$ contiennent un facteur du degré μ_p par rapport aux variables secondaires. Dans cette supposition, l'ordre des conditions deviendra

$$(A.)\qquad \alpha^{s-1}+\alpha^{s-2}\sum_1(\mu)+\alpha^{s-3}\sum_2(\mu)+\cdots+\alpha\sum_{s-2}(\mu)+\sum_{s-1}(\mu),$$

si l'on représente par $\sum_p(\mu)$ la somme des produits des quantités $\mu_1\mu_2\ldots\mu_s$ prises p à p, en faisant usage du résultat précédent. En effet, on voit que le système peut coexister en cas que t des équations prises arbitrairement coexistent, et que les fonctions s'évanouissent, par lesquelles on multiplie les équations restantes. L'ordre particulier, qu'on obtient dans cette supposition est $\alpha^{t-1}\sum_{s-t}(\mu)$, et l'ordre total s'exprime par $\sum_{t=1}^{t=s}[\alpha^{t-1}\sum_{s-t}(\mu)]$ si l'on fait usage d'une notation bien connue. Par conséquent, la formule $(A.)$ exprime l'ordre cherché dans le cas général.

Si l'on remplace μ_1 par $a+\mu_1$, μ_2 par $a+\mu_2$, μ_3 par $a+\mu_3$ et ainsi de suite, je remarque que l'expression $(A.)$ peut se mettre sous la forme abrégée

$$D(\Phi),$$

le symbole D indiquant l'opération

$$\alpha^{s-1}\frac{\left(\frac{d}{da}\right)^s}{\Pi(s)}+\alpha^{s-2}\frac{\left(\frac{d}{da}\right)^{s-1}}{\Pi(s-1)}+\alpha^{s-3}\frac{\left(\frac{d}{da}\right)^{s-2}}{\Pi(s-2)}+\cdots+\alpha\frac{\left(\frac{d}{da}\right)^2}{1.2}+\left(\frac{d}{da}\right)$$

et Φ étant écrit à la place de

$$a^s+a^{s-1}\sum_1(\mu)+a^{s-2}\sum_2(\mu)+\cdots+a\sum_{s-1}(\mu)+\sum_s(\mu).$$

Je remarque aussi que le résultat conservera la même forme dans le cas où l'on substitue P' au lieu de $\sum_1(\mu)$, P'' au lieu de $\sum_2(\mu)$, P''' au lieu de $\sum_3(\mu)$ et ainsi de suite, substitution qu'on fait afin d'exclure des solutions étrangères.

Soit proposé un système de s équations linéaires, renfermant k variables indépendantes, savoir

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 x_1 + C_1 x_2 + \cdots + T_1 x_{k-1} + V_1 x_k &= 0, \\ A_2 x + B_2 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + T_2 x_{k-1} + V_2 x_k &= 0, \\ A_3 x + B_3 x_1 + C_3 x_2 + \cdots + T_3 x_{k-1} + V_3 x_k &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_s x + B_s x_1 + C_s x_2 + \cdots + T_s x_{k-1} + V_s x_k &= 0, \end{aligned}$$

les ordres des $A_1, A_2, A_3, \ldots A_s$, par rapport aux variables secondaires, étant $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_s$; ceux des $B_1, B_2, B_3, \ldots B_s$ étant $\mu_1+\alpha_1, \mu_2+\alpha_1, \mu_3+\alpha_1, \ldots \mu_s+\alpha_1$; ceux des $C_1, C_2, C_3, \ldots C_s$ étant $\mu_1+\alpha_2, \mu_2+\alpha_2, \mu_3+\alpha_2, \ldots \mu_s+\alpha_2$; et ainsi de suite, jusqu'à $V_1, V_2, V_3, \ldots V_s$, dont les ordres soient $\mu_1+\alpha_k, \mu_2+\alpha_k, \mu_3+\alpha_k, \ldots \mu_s+\alpha_k$.

En représentant par $S_p(\alpha_q)$ la somme des puissances et des produits de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q$ d'ordre p, je dis que l'ordre des conditions de la coexistence du système proposé est

$$(B.) \qquad \underset{s-k}{S}(\alpha_k) + \underset{s-k-1}{S}(\alpha_k) \underset{1}{\Sigma}(\mu) + \underset{s-k-2}{S}(\alpha_k) \underset{2}{\Sigma}(\mu) + \cdots + \underset{1}{S}(\alpha_k) \underset{s-k-1}{\Sigma}(\mu) + \underset{s-k}{\Sigma}(\mu).$$

Admettons que cette expression convienne à un tel système renfermant $k-1$ variables indépendantes, et considérons d'abord le système donné en excluant les termes $V_1 x_k, V_2 x_k, \ldots V_s x_k$. Dans ce cas on a, par hypothèse, pour l'ordre

$$\underset{s-k+1}{S}(\alpha_{k-1}) + \underset{s-k}{S}(\alpha_{k-1}) \underset{1}{\Sigma}(\mu) + \underset{s-k-1}{S}(\alpha_{k-1}) \underset{2}{\Sigma}(\mu) + \cdots + \underset{1}{S}(\alpha_{k-1}) \underset{s-k}{\Sigma}(\mu) + \underset{s-k+1}{\Sigma}(\mu),$$

expression qui est de la forme

$$(\beta.) \qquad \alpha_{k-1}^{s-k+1} + \alpha_{k-1}^{s-k} P' + \alpha_{k-1}^{s-k-1} P'' + \text{etc.}$$

Mais, en tenant compte des termes exceptés, le système secondaire dont nous venons de trouver l'ordre à l'égard des variables secondaires, se trouve de l'ordre 1 à l'égard des quantités x_{k-1}, x_k. Outre cela, il nous faut observer qu'en admettant x_{k-1}, x_k dans ce résultat, on admet toujours l'incrément $\alpha_k - \alpha_{k-1}$ (il est permis de poser $\alpha_k > \alpha_{k-1}$) à l'ordre des coefficients affectés de x_k. Par exemple, soit donné le système simple

$$\left.\begin{aligned} A_1 x + B_1 x_1 + C_1 x_2 \\ A_2 x + B_2 x_1 + C_2 x_2 \\ A_3 x + B_3 x_1 + C_3 x_2 \\ A_4 x + B_4 x_1 + C_4 x_2 \end{aligned}\right\} = 0,$$

on obtient le système dérivé

$$\left.\begin{array}{l} A_1(B_2x_1+C_2x_2)-A_2(B_1x_1+C_1x_2) \\ A_1(B_3x_1+C_3x_2)-A_3(B_1x_1+C_1x_2) \\ A_1(B_4x_1+C_4x_2)-A_4(B_1x_1+C_1x_2) \end{array}\right\} = 0$$

dont l'ordre, par rapport aux variables contenues dans les coefficients, est

$(\alpha_1+\mu_1+\mu_2)(\alpha_1+\mu_1+\mu_3)(\alpha_1+\mu_1+\mu_4)$, c'est-à-dire $\alpha_1^3+\alpha_1^2Q'+\alpha_1Q''+Q'''$;

mais il faut faire une correction de cet ordre, en substituant

$$\alpha_1^3+\alpha_1^2P'+\alpha_1P''+P'''.$$

En cas que cette quantité ne soit pas décomposable en trois facteurs numériques et entiers, trois équations à des indices entiers ne peuvent représenter les conditions, tout de même que deux équations renfermant deux variables indépendantes à des indices entiers ne peuvent représenter un nombre premier de points à moins qu'ils ne se rangent sur une droite. Maintenant, en considérant le système binaire entre x_{k-1}, x_k, on a pour l'ordre des conditions de coexistence

$$D'(\Phi'),$$

en écrivant, pour abréger, Φ' à la place de l'expression (β.) et en indiquant par le symbole D' l'opération suivante

$$(\alpha_k-\alpha_{k-1})^{s-k}\frac{\left(\frac{d}{d\alpha_{k-1}}\right)^{s-k+1}}{\Pi(s-k+1)}+(\alpha_k-\alpha_{k-1})^{s-k-1}\frac{\left(\frac{d}{d\alpha_{k-1}}\right)^{s-k}}{\Pi(s-k)}+\cdots$$

$$+(\alpha_k-\alpha_{k-1})\frac{\left(\frac{d}{d\alpha_k}\right)^2}{1.2}+\left(\frac{d}{d\alpha_k}\right).$$

Il n'est pas difficile de voir que ce résultat peut se mettre sous la forme (B.). Car on a, d'une manière symbolique:

$$E^{(\alpha_k-\alpha_{k-1})\frac{d}{d\alpha_{k-1}}}S_p(\alpha_{k-1}) = E^{(\alpha_k-\alpha_{k-1})\frac{d}{d\alpha_{k-1}}}\{\alpha_{k-1}^p+\alpha_{k-1}^{p-1}S_1(\alpha_{k-2})+\text{etc.}+S_p(\alpha_{k-2})\}$$

$$= \alpha_k^p+\alpha_k^{p-1}S_1(\alpha_{k-2})+\text{etc.}+S_p(\alpha_{k-2});$$

et il résulte de là qu'on aura

$$\frac{E^{(\alpha_k-\alpha_{k-1})\frac{d}{d\alpha_{k-1}}}-1}{\alpha_k-\alpha_{k-1}}S_p(\alpha_{k-1}) = \frac{\alpha_k^p-\alpha_{k-1}^p}{\alpha_k-\alpha_{k-1}}+\frac{\alpha_k^{p-1}-\alpha_{k-1}^{p-1}}{\alpha_k-\alpha_{k-1}}S_1(\alpha_{k-2})+\text{etc.}+S_{p-1}(\alpha_{k-2})$$

$$= S_{p-1}(\alpha_k)$$

en regardant $\alpha_k-\alpha_{k-1}$ comme constant.

Mais nous avons déjà montré que la formule $(B.)$ convient à un système binaire; ce qui complète la démonstration.

M. *Salmon* est parvenu, par induction, au même résultat, en l'établissant rigoureusement dans les cas où $s = k+2$, $s = k+3$ *). Au reste la formule est vraie, évidemment, pour $s = k+1$.

Désignons maintenant par

$$P_v(Ax + Bx_1 + Cx_2 + \cdots Tx_{k-1} + Vx_k)$$

un produit de v facteurs d'une forme semblable à celle qui se trouve représentée. Si l'on a le système simultané

$$(I'.)\quad \begin{cases} P_{m_1}(A_1x + B_1x_1 + C_1x_2 + \cdots + T_1x_{k-1} + V_1x_k) = 0, \\ P_{m_2}(A_2x + B_2x_1 + C_2x_2 + \cdots + T_2x_{k-1} + V_2x_k) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ P_{m_s}(A_sx + B_sx_1 + C_sx_2 + \cdots + T_2x_{k-1} + V_sx_k) = 0, \end{cases}$$

les lettres $A_1, A_2, \ldots; B_1, B_2, \ldots$ etc. conservant leurs significations précédentes, et qu'on propose de trouver l'ordre des conditions nécessaires pour que ces équations puissent avoir une solution commune.

On a, tout d'un coup, pour l'ordre cherché

$$m_1m_2\ldots m_s \sum_{t=1}^{t=s-k} \Big(\underset{t}{S}(\alpha_k) \sum_{s-k-t}(\mu)\Big).$$

Car on peut former $m_1m_2\ldots m_s$ systèmes linéaires distincts en prenant toujours un facteur de chacune des équations. Or, si l'on développe les produits, on obtiendra des fonctions dans lesquelles les coefficients des $x^{m_1}, x^{m_2}, \ldots x^{m_s}$ seront des ordres $m_1\mu_1, m_2\mu_2, \ldots m_s\mu_s$ respectivement, ceux des $x^{m_1-1}x_1$, $x^{m_2-1}x_1, \ldots x^{m_s-1}x_1$ seront des ordres $m_1\mu_1+\alpha_1, m_2\mu_2+\alpha_1, \ldots m_s\mu_s+\alpha_1$, et ainsi de suite.

Donc, en mettant λ_1 au lieu de $m_1\mu_1$, λ_2 au lieu de $m_2\mu_2$, etc., je dis qu'on aura pour l'ordre propre à un système général la valeur

$$(C.)\qquad m_1m_2\ldots m_s \sum_{t=1}^{t=s-k} \Big(\underset{t}{S}(\alpha_k) \sum_{s-k-t}\Big(\frac{\lambda}{m}\Big)\Big)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(C'.)\quad \begin{cases} \underset{s-k}{S}(\alpha_k)m_1m_2\ldots m_s + \underset{s-k-1}{S}(\alpha_k)\Sigma\mu_1m_2\ldots m_s + \underset{s-k-2}{S}(\alpha_k)\Sigma\mu_1\mu_2m_3\ldots m_s + \cdots \\ \qquad + S(\alpha_k)\Sigma\mu_1\mu_2\mu_{s-k-1}m_{s-k}\ldots m_s + \Sigma\mu_1\ldots\mu_{s-k}m_{s-k+1}\ldots m_s \end{cases}$$

---

*) Voyez ses „Lessons introductory to the modern Higher Algebra", édition seconde, p. 229.

En cas que $\frac{\lambda_p}{m_p}$ soit un nombre fractionnaire, on peut observer qu'on obtiendra le même résultat en distribuant l'ordre λ_p entre les facteurs d'une manière quelconque afin d'éviter les expressions fractionnaires. Il est nécessaire, seulement, que les incréments α_1, α_2, α_3, etc. demeurent les mêmes dans tous les facteurs.

Appliquons tout de suite la formule (C'.) à un exemple. On propose de trouver l'ordre des conditions nécessaires pour qu'une courbe algébrique puisse posséder un point de rebroussement.

Soit $u_r = 0$ l'équation de la courbe, u_r étant une fonction du degré r, homogène à l'égard des coordonnées trilinéaires x, y, z. Supposons, de plus, que le coefficient du terme affecté de x^r contienne d'autres variables au degré ϱ, et que l'ordre du coefficient d'un terme quelconque éprouve les incréments α_1, α_2 toutes les fois que le terme est affecté de y, z respectivement, en sorte que le coefficient de $x^{r-1}y$ est de l'ordre $\varrho+\alpha_1$, celui de $x^{r-3}yz^2$ est de l'ordre $\varrho+\alpha_1+2\alpha_2$, et ainsi de suite.

Il faudra que les coordonnées d'un point de rebroussement satisfassent aux équations

$$(\gamma.)\qquad \frac{du_r}{dx} = \frac{du_r}{dy} = \frac{du_r}{dz} = \frac{d^2u_r}{dx^2}\,\frac{d^2u_r}{dy^2} - \left(\frac{d^2u_r}{dx\,dy}\right)^2 = 0.$$

Ainsi, mettons dans la formule (C'.) $s=4$, $k=2$, $r-1$ au lieu de m_1, m_2, m_3 respectivement, $2(r-2)$ au lieu de m_4; ϱ, $\varrho+\alpha_1$, $\varrho+\alpha_2$, $2\varrho+2\alpha_1$ au lieu de μ_1, μ_2, μ_3, μ_4. De cette manière on obtient l'ordre des conditions de coexistence sous la forme

$$(a.)\quad \left\{\begin{array}{l} 2(r-1)^2(\varrho+\alpha_1)(3\varrho+\alpha_1+\alpha_2)+2(r-1)(r-2)(3\varrho^2+2(\alpha_1+\alpha_2)\varrho+\alpha_1\alpha_2) \\ +2(\alpha_1+\alpha_2)\{(r-1)^3(\varrho+\alpha_1)+(r-1)^2(r-2)(3\varrho+\alpha_1+\alpha_2)\}+2(r-1)^3(r-2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2). \end{array}\right.$$

Mais il faut observer que les coordonnées d'un point double situé sur la droite ($z=0$) satisferont aux conditions (γ.). Par conséquent, on doit soustraire l'ordre qui appartient à ce cas.

On a, par rapport à un tel point double,

$$\frac{du_r}{dx} = \frac{du_r}{dy} = \frac{du_r}{dz} = z = 0.$$

L'ordre de ce système est par (C'.)

$$(b.)\qquad (r-1)(3\varrho^2+2(\alpha_1+\alpha_2)\varrho+\alpha_1\alpha_2)+(r-1)^2(3\varrho+\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1+(r-1)^3\alpha_1^2.$$

Nous devons prendre le double de ce résultat parce qu'il se rapporte à un point double. Enfin, on a

$$(c.)\quad \begin{cases}(a.)-2(b.) = 12(r-1)(r-2)\varrho^2+8r(r-1)(r-2)(\alpha_1+\alpha_2)\varrho \\ \qquad +2r(r-1)(r-2)(r+1)\alpha_1\alpha_2+2r(r-1)^2(r-2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2),\end{cases}$$

ce qui est l'ordre cherché.

Pour donner un autre exemple de l'application de la formule générale que nous venons d'établir, on propose de trouver l'ordre des conditions nécessaires pour qu'une surface algébrique puisse posséder un point double tel que le cône tangent soit composé de deux plans (c'est-à dire le point double doit être bi-planaire).

Soit $V_r = 0$ l'équation de la surface, V_r étant une fonction du degré r, homogène à l'égard des coordonnées quadri-planaires x, y, z, w. On suppose que le coefficient de x^r est de l'ordre ϱ à l'égard d'autres variables et que les incréments des ordres des coefficients par rapport à y, z, w sont α_1, α_2, α_3 respectivement, en sorte que l'ordre, par exemple, du coefficient de $x^{r-4}yz^2w$ soit $\varrho+\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$. Les conditions auxquelles les coordonnées d'un tel point double bi-planaire doivent satisfaire, sont

$$(\delta.)\qquad \frac{dV_r}{dx} = \frac{dV_r}{dy} = \frac{dV_r}{dz} = \frac{dV_r}{dw} = H = 0,$$

la lettre H étant écrite pour le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2V_r}{dx^2}, & \frac{d^2V_r}{dx\,dy}, & \frac{d^2V_r}{dx\,dz} \\ \frac{d^2V_r}{dx\,dy}, & \frac{d^2V_r}{dy^2}, & \frac{d^2V_r}{dy\,dz} \\ \frac{d^2V_r}{dx\,dz}, & \frac{d^2V_r}{dy\,dz}, & \frac{d^2V_r}{dz^2} \end{vmatrix}$$

Par conséquent, nous devons mettre dans la formule $(C'.)$ $s = 5$, $k = 3$, $r-1$ au lieu de m_1, m_2, m_3, m_4 respectivement, $3(r-2)$ au lieu de m_5, ϱ, $\varrho+\alpha_1$, $\varrho+\alpha_2$, $\varrho+\alpha_3$, $3\varrho+2\alpha_1+2\alpha_2$ au lieu de $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$. Il résulte de là que l'ordre du système se met sous la forme

$$(a'.)\quad \begin{cases} 3(r-1)^3(r-2)\{6\varrho^2+3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\varrho+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\} \\ \qquad +(r-1)^3(4\varrho+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(3\varrho+2\alpha_1+2\alpha_2) \\ +(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\{(r-1)^4(3\varrho+2\alpha_1+2\alpha_2)+3(r-1)^3(r-2)(4\varrho+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\} \\ \qquad +3(r-1)^4(r-2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3). \end{cases}$$

Mais il faut observer que les coordonnées d'un point double situé dans le plan $(u = 0)$ satisferont aux conditions $(\delta.)$. Par conséquent on doit soustraire du résultat obtenu ci-dessus le double de l'ordre propre au système

$$\frac{dV_r}{dx} = \frac{dV_r}{dy} = \frac{dV_r}{dz} = \frac{dV_r}{dw} = w = 0.$$

En mettant dans la formule $(C'.)$ $s=4$, $k=2$, et en substituant $r-1$ à la place de m_1, m_2, m_3, m_4 respectivement, ϱ, $\varrho+\alpha_1$, $\varrho+\alpha_2$, $\varrho+\alpha_3$ à la place de μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 respectivement, on aura

$$(b'.)\quad \begin{cases} (r-1)^2\{6\varrho^2+3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\varrho+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\} \\ +(r-1)^3(\alpha_1+\alpha_2)(4\varrho+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+(r-1)^4(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2). \end{cases}$$

Enfin, on trouve

$$(c'.)\quad \begin{cases} (a'.)-2(b'.) = 30(r-1)^2(r-2)\varrho^2+15r(r-1)^2(r-2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\varrho \\ +r(r-1)^2(r-2)(3r+2)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)+3r(r-1)^3(r-2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) \end{cases}$$

ce qui est l'ordre cherché.

Le même procédé que nous venons d'employer peut s'étendre au cas où les systèmes d'équations doivent avoir deux ou plusieurs solutions distinctes communes. Prenons le système

$$P_{m_1}(A_1x+B_1x_1+C_1x_2) = 0,$$
$$P_{m_2}(A_2x+B_2x_1+C_2x_2) = 0,$$
$$P_{m_3}(A_3x+B_3x_1+C_3x_2) = 0,$$

en supposant que A_1, B_1, C_1 désignent des fonctions des degrés $\frac{\mu_1}{m_1}$, $\frac{\mu_1}{m_1}+\alpha_1$, $\frac{\mu_1}{m_1}+\alpha_2$, que A_2, B_2, C_2 désignent des fonctions des degrés $\frac{\mu_1}{m_1}$, $\frac{\mu_1}{m_1}+\alpha_1$, $\frac{\mu_2}{m_2}+\alpha_2$, et que A_3, B_3, C_3 désignent des fonctions des degrés $\frac{\mu_3}{m_3}$, $\frac{\mu_3}{m_3}+\alpha_1$, $\frac{\mu_3}{m_3}+\alpha_2$.

Considérons, premièrement, un système qui contient deux facteurs quelconques de chacune des équations, savoir:

$$K_1.L_1 = 0,$$
$$K_2.L_2 = 0,$$
$$K_3.L_3 = 0$$

en représentant par les lettres les facteurs respectifs. Ce système nous donne l'ordre

$$4\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}+\frac{\mu_3}{m_3}+\alpha_1+\alpha_2\right)^2 \quad \text{ou} \quad 4\varphi^2.$$

Car on a, par exemple, les deux systèmes

$$\left.\begin{matrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{matrix}\right| = 0, \qquad \left.\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\right| = 0$$

qui nous donnent l'ordre φ^2. Il y a quatre systèmes analogues.

Considérons, en second lieu, un système qui contient deux facteurs de la première équation, deux facteurs de la seconde et un facteur de la dernière, savoir

$$\begin{aligned} K_1.L_1 &= 0, \\ K_2.L_2 &= 0, \\ K_3 &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on tire, de la même manière que ci-dessus l'ordre $= 2\varphi^2$.

Considérons, enfin, un système qui contient deux facteurs de la première équation et un facteur de chacune des autres, savoir

$$\begin{aligned} K_1.L_1 &= 0, \\ K_2 &= 0, \\ K_3 &= 0, \end{aligned}$$

équations d'où nous tirons l'ordre $\left(\frac{\mu_2}{m_2}\right)^2+\left(\frac{\mu_3}{m_3}\right)^2+\frac{\mu_2\mu_3}{m_2m_3}+(\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{\mu_2}{m_2}+\frac{\mu_3}{m_3}\right)+\alpha_1\alpha_2$ en faisant coincider K_2, K_3. Il s'agit maintenant de déterminer les multiplicateurs numériques des ordres que nous venons de trouver. On obtient, par le calcul des combinaisons, les expressions

$$\frac{m_1.m_2.m_3(m_1-1)(m_2-1)(m_3-1)}{(1.2)^2}, \quad \frac{m_1.m_2.m_3(m_1-1)(m_1-2)}{(1.2)^2}, \quad \frac{m_1m_2m_3(m_1-1)}{1.2}.$$

Donc, en formant les termes symétriques, on aura, pour l'ordre des conditions à remplir pour que le système donné puisse avoir deux solutions distinctes communes (mais peut-être infiniment voisines), l'expression suivante

$$(D.)\left\{\begin{aligned} &\frac{m_1m_2m_3}{2}\Big\{[(m_1-1)(m_2-1)(m_3-1)+\Sigma(m_1-1)(m_2-1)]\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}+\frac{\mu_3}{m_3}+\alpha_1+\alpha_2\right)^2 \\ &\qquad +\Sigma(m_1-1)\left(\left(\frac{\mu_2}{m_2}\right)^2+\left(\frac{\mu_3}{m_3}\right)^2+\frac{\mu_2\mu_3}{m_2m_3}+(\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{\mu_2}{m_2}+\frac{\mu_3}{m_3}\right)+\alpha_1\alpha_2\right)\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Je dis donc que ce résultat n'est autre chose que l'ordre des conditions propres à un système de trois équations générales des degrés m_1, m_2, m_3, les coefficients de x^{m_1}, x^{m_2}, x^{m_3} étant respectivement des ordres μ_1, μ_2, μ_3, ceux de $x^{m_1-1}x_1$, $x^{m_2-1}x_1$, $x^{m_3-1}x_1$ étant respectivement des ordres $\mu_1+\alpha_1$, $\mu_2+\alpha_1$, $\mu_3+\alpha_1$, et ainsi de suite; en d'autres termes, c'est l'ordre des conditions à remplir pour que trois courbes planes puissent avoir deux intersections communes.

La formule s'accorde avec celle que M. *Salmon* a trouvée en suivant une route différente *).

*) Voyez ses „Lessons introductory to the modern Higher Algebra", édition seconde, p. 238. Dans une note vers la fin de ce livre l'auteur a bien voulu faire mention de la méthode de ce mémoire.

Les mêmes procédés nous conduisent à une formule plus générale, applicable au système (I'.) en faisant $s=k+1$. Il n'est pas nécessaire d'entrer dans les détails de la méthode qui ne diffère pas de la précédente. L'expression deviendra

$$(D'.)\qquad \frac{m_1 m_2 \dots m_{k-1}}{2}\left\{\begin{aligned}&[(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_{k-1}-1)+\Sigma(m_1-1)(m_2-1)\dots(m_k-1)+\cdots\\ &\qquad +\Sigma(m_1-1)(m_2-1)]\Big[\sum_1\frac{\mu}{m}+\sum_1\alpha\Big]^2\\ &+\Sigma\Big\{(m_1-1)\Big[\underset{2}{S}\Big(\frac{\mu_{k+1}}{m_{k+1}}\Big)-\frac{\mu_1}{m_1}\underset{1}{S}\Big(\frac{\mu_{k+1}}{m_{k+1}}\Big)\\ &\qquad +\sum_1(\alpha)\Big(\underset{1}{S}\Big(\frac{\mu_{k+1}}{m_{k+1}}\Big)-\frac{\mu_1}{m_1}\Big)+\sum_2(\alpha)\Big\}\end{aligned}\right.$$

Proposons-nous d'appliquer la formule (D.) à la détermination de l'ordre des conditions nécessaires pour qu'une courbe plane puisse avoir deux points doubles. Les coordonnées d'un tel point satisferont aux équations

$$\frac{dU_r}{dx}=\frac{dU_r}{dy}=\frac{dU_r}{dz}=0,$$

si nous conservons notre notation précédente.

Mettons, donc, dans la formule (D.) obtenu ci-dessus $r-1$ au lieu de m_1, m_2, m_3 respectivement, ϱ, $\varrho+\alpha_1$, $\varrho+\alpha_2$, au lieu de μ_1, μ_2, μ_3 respectivement. De là on obtient l'ordre

$$\frac{(r-1)(r-2)^2(r+1)}{2}\{3\varrho+r(\alpha_1+\alpha_2)\}^2$$
$$+\frac{(r-1)(r-2)}{2}\{9\varrho^2+6r(\alpha_1+\alpha_2)\varrho+3(r-1)^2(\alpha_1\alpha_2)+2(r-1)(\alpha_1+\alpha_2)^2+2\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2\}.$$

Mais il faut soustraire de ce résultat l'ordre propre à un point de rebroussement, savoir la quantité (c.). Enfin, il résulte que l'ordre demandé est

$$(r-1)(r-2)^2(r+1)[3\varrho+r(\alpha_1+\alpha_2)]^2$$
$$-\frac{(r-1)(r-2)}{2}[15\varrho^2+10r(\alpha_1+\alpha_2)\varrho+r(r+6)\alpha_1\alpha_2+2r(2r-3)(\alpha_1^2+\alpha_2^2)].$$

Proposons-nous de trouver l'ordre des conditions nécessaires pour qu'une surface algébrique $V_r=0$ puisse avoir deux points doubles. Il faut mettre

$$\frac{dV_r}{dx}=\frac{dV_r}{dy}=\frac{dV_r}{dz}=\frac{dV_r}{dw}=0.$$

En posant, donc, dans la formule (D'.) $k=3$, et en substituant $r-1$ au lieu de m_1, m_2, m_3, m_4 respectivement, ϱ, $\varrho+\alpha_1$, $\varrho+\alpha_2$, $\varrho+\alpha_3$ au lieu de μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 on a

$$\frac{(r-1)^2(r-2)^2(r^2+2)}{2}\{4\varrho+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)r\}^2+\frac{(r-1)^2(r-2)^2}{2}\{24\varrho^2+12\varrho(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$
$$+3(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)+2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)+(r-1)(12\varrho+3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+4(r-1)^2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\}.$$

En retranchant de ce résultat l'ordre (c'.) qui se rapporte à un point double biplanaire, on obtient

$$\frac{(r-1)^2(r-2)^2(r^2+2)}{2}(4\varrho+r(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3))^2-\frac{(r-1)^2(r-2)}{2}\{36\varrho^2+18r(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\varrho$$
$$+3r(2r-3)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)+2r(2r+3)(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)\},$$

ce qui est l'ordre cherché.

On pourrait étendre la méthode à plusieurs problèmes du même genre. En suivant la même voie je suis parvenu à l'expression de l'ordre des conditions nécessaires pour que quatre courbes planes puissent avoir deux intersections communes. A présent je ne veux donner que l'expression de l'ordre des conditions nécessaires pour que trois courbes planes puissent avoir trois points communs. En conservant la notation que nous avons employée cidessus, l'ordre s'exprime comme il suit

$$m_1m_2m_3\left\{\begin{array}{l} \quad\;\; \frac{(m_1-1)(m_1-2)(m_2-1)(m_2-2)(m_3-1)(m_3-2)}{2.3} \\ + \;\;\Sigma\frac{(m_1-1)(m_2-1)(m_2-2)(m_3-1)(m_3-2)}{2} \\ + \;\;\Sigma\frac{(m_1-1)(m_1-2)(m_2-1)(m_2-2)}{2.3} \\ +3\Sigma\frac{(m_1-1)(m_1-2)(m_2-1)(m_2-1)}{2} \\ + \;\;\Sigma\frac{(m_1-1)(m_1-2)(m_2-1)}{2} \\ + \;\;\Sigma\frac{(m_1-1)(m_2-1)}{2.3}+4(m_1-1)(m_2-1)(m_3-1) \end{array}\right\}\left(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}+\frac{\mu_3}{m_3}+\alpha_1+\alpha_2\right)^2$$

$$-m_1m_2m_3\Sigma\Big(\frac{(m_1-1)(m_1-2)(m_2-1)(m_3-1)}{2}+\frac{(m_1-1)(m_1-2)(m_2-1)}{2}+\frac{(m_1-1)(m_2-1)}{2}$$
$$+(m_1-1)(m_2-1)(m_3-1)\Big)\Big(\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_4}+\frac{\mu_3}{m_3}+\alpha_1+\alpha_2\Big)\Big(\frac{\mu_1^2}{m_1^2}+2\frac{\mu_1}{m_1}\Big(\frac{\mu_2}{m_2}+\frac{\mu_3}{m_3}\Big)$$
$$+\frac{\mu_2\mu_3}{m_2m_3}+(\alpha_1+\alpha_2)\Big(2\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_2}{m_2}+\frac{\mu_3}{m_3}\Big)+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2\Big)$$

$$+m_1m_2m_3\Sigma\frac{(m_1-1)(m_1-2)}{3}\Big(\frac{\mu_1^3}{m_1^3}+3\frac{\mu_1^2\mu_3}{m_1^2m_3}+(\alpha_1+\alpha_2)\Big(3\frac{\mu_1^2}{m_1^2}+3\frac{\mu_1\mu_3}{m_1m_3}\Big)$$
$$+(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_2)\Big(3\frac{\mu_1}{m_1}+\frac{\mu_3}{m_3}\Big)+(\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1\alpha_2^2)\Big)$$

$$+m_1m_2m_3\Sigma(m_1-1)(m_2-1)\frac{\mu_1}{m_3}\Big(\frac{\mu_2}{m_2}+\alpha_1\Big)\Big(\frac{\mu_3}{m_3}+\alpha_2\Big).$$

L'établissement de ce résultat n'est pas très-difficile, mais il demande nécessairement un procédé assez long, vu qu'il faut considérer sept espèces de systèmes élémentaires. En représentant des facteurs hypothétiques des équations par des lettres, on peut désigner les systèmes élémentaires comme il suit

$$\begin{array}{ccccccc} A.B.C & A.B.C & A.B.C & A.B.C & A.B.C & A.B.C & A.B \\ D.E.F & D.E.F & D.E.F & D.E & D.E & D & D.E \\ G.H.K & G.H & G & G.H & G & G & G \end{array}.$$

De cette manière, le problème se réduit à la détermination des ordres propres à des systèmes linéaires.

Il est évident qu'on peut résoudre beaucoup de problèmes particuliers au moyen des formules générales que nous venons de trouver.

Londres, 14. Février 1867.

Untersuchungen über Strahlenquadrupel *).

(Von Herrn *O. Hermes.*)

Wenn man einen beliebigen Punkt eines von den vier ein Strahlenquadrupel bildenden windschiefen Strahlen (1.), (2.), (3.), (4.), etwa den Punkt p des Strahls (1.), mit einem zweiten Strahl, etwa (2.), durch eine gerade Linie verbindet, welche nöthigenfalls verlängert den Strahl (3.) durchschneidet und von dem auf (2.) liegenden Punkte q dieser Verbindungslinie geradlinig, den letzten Strahl (4.) durchschneidend, zum Strahl (1.) zurückkehrt, oder kürzer ausgedrückt, *wenn man vom Punkte p des Strahls* (1.) *geradlinig über* (3.) *nach* (2.) *geht und dann über* (4.) *nach* (1.) *zurückkehrt,* so ist der dadurch auf (1.) bestimmte *Rückkehrpunkt* p_3 (i. d. vorigen Abh. $p_{3,4}$) im Allgemeinen von dem *Ausgangspunkte* p verschieden. Sollen die Punkte p und p_3 zusammenfallen, so ist dazu entweder eine besondere Lage des Ausgangspunktes p erforderlich, nämlich auf einer der beiden, alsdann reellen, Leitlinien des durch das Strahlenquadrupel bestimmten Strahlensystems der ersten Ordnung und der ersten Classe, oder es müssen die vier gegebenen Strahlen selbst eine besondere Lage zu einander haben. Die dazu erforderliche Bedingung (pag. 162) ist ganz unabhängig von der Lage des Punktes p auf dem Strahl (1.), so dass also bei dem in Betracht gezogenen Strahlenquadrupel Ausgangspunkt und Rückkehrpunkt zusammenfallen, von welchem Punkte des Strahls (1.) man die Construction beginnen mag. Das Strahlenquadrupel heisst alsdann *hyperboloidisch,* weil sich durch die Strahlen desselben ein Hyperboloid legen lässt.

Eine erste Ergänzung dieser Eigenschaften der Strahlenquadrupel hat sich ergeben beim weiteren Verfolge der gebrochenen Linie pqp_3, indem man von p_3 als neuem Ausgangspunkte geradlinig zuerst über (4.) nach (2.) geht und dann über (3.) nach (1.) zurückkehrt: wenn man jetzt und für die Folge von der besonderen Lage des Ausgangspunktes p auf einer der Leitlinien absieht, und es soll der neue Rückkehrpunkt p_3'', — der frühere Rückkehrpunkt soll von nun an mit dem Index 1, also als der Punkt p_3', bezeichnet werden, — mit p zusammenfallen, so muss eine bestimmte Bedingung erfüllt werden (pag. 164), durch welche ebenfalls die Lage des Punktes p auf dem

---

*) Zusatz zu der Abhandlung p. 153 dieses Bandes.

Strahl (1.) ganz willkürlich gelassen wird. Das Strahlenquadrupel heisst alsdann *schliessend.* — Die betreffenden Eigenschaften der Strahlenquadrupel noch weiter zu verallgemeinern, ist der Gegenstand der vorliegenden Untersuchung.

§. 1.

Die Strahlen des Strahlenquadrupels seien (pag. 161 und 162) gegeben durch die Gleichungen:

$$(1.)\begin{cases} t=0,\\ u=0,\end{cases}\quad (2.)\begin{cases} v=0,\\ w=0,\end{cases}\quad (3.)\begin{cases} t=\alpha\lambda v+\beta\mu w,\\ u=\gamma\mu v+\delta\lambda w,\end{cases}\quad (4.)\begin{cases} t=\alpha\lambda_1 v+\beta\mu_1 w,\\ u=\gamma\mu_1 v+\delta\lambda_1 w,\end{cases}$$

und zur Abkürzung eingeführt:

$$(5.)\qquad \lambda\mu_1-\lambda_1\mu=A,\qquad \alpha\delta\lambda\lambda_1-\beta\gamma\mu\mu_1=B,$$

welche homogen und vom ersten Grade sind in Beziehung auf die Constanten λ, μ und λ_1, μ_1; ferner sei der auf (1.) gegebene Ausgangspunkt:

$$p:\quad t=u=0,\quad \frac{v}{w}=\frac{v_1}{w_1},$$

so wird (pag. 162) der Punkt

$$p_3':\quad t=u=0,\quad \frac{v}{w}=\frac{Bv_1-\beta\delta Aw_1}{Bw_1-\alpha\gamma Av_1};$$

nunmehr ergiebt sich weiter der zweite Rückkehrpunkt p_3'', wenn man statt v_1 und w_1 bezüglich $Bv_1-\beta\delta Aw_1$ und $Bw_1-\alpha\gamma Av_1$ einsetzt, nämlich:

$$p_3'':\quad t=u=0,\quad \frac{v}{w}=\frac{B^2v_1-2\beta\delta ABw_1+\alpha\beta\gamma\delta A^2v_1}{B^2w_1-2\alpha\gamma ABv_1+\alpha\beta\gamma\delta A^2w_1}.$$

Setzt man die bisher durchgeführte Construction noch weiter fort, indem man p_3'' als neuen Ausgangspunkt betrachtet, so wird der dritte Rückkehrpunkt:

$$p_3''':\quad t=u=0,\quad \frac{v}{w}=\frac{B^3v_1-3\beta\delta AB^2w_1+3\alpha\beta\gamma\delta A^2Bv_1-\alpha\beta^2\gamma\delta^2A^3w_1}{B^3w_1-3\alpha\gamma AB^2v_1+3\alpha\beta\gamma\delta A^2Bw_1-\alpha^2\beta\gamma^2\delta A^3v_1},$$

und so lassen sich nach ganz einfachem Gesetze fortschreitend die Ausdrücke für immer spätere Rückkehrpunkte bilden. Diese Ausdrücke gestatten eine sehr vortheilhafte Darstellung, wenn man in ihnen die Glieder mit v_1 und w_1 zusammenfasst; alsdann nämlich werden für den zuletzt betrachteten Rückkehrpunkt p_3''' die Factoren von v_1 und w_1, abgesehen von den Factoren 2, $\beta\gamma$ und $\alpha\delta$:

$$(B+\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}.A)^3+(B-\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}.A)^3 \text{ und } (B+\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}.A)^3-(B-\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}.A)^3;$$

also wenn man noch zur Abkürzung:

$$(6.)\qquad \alpha\beta\gamma\delta=\varpi,\quad B+\sqrt{\varpi}.A=L,\quad B-\sqrt{\varpi}.A=M$$

einführt, wo demnach auch L und M homogen und vom ersten Grade in Beziehung auf λ, μ und λ_1, μ_1 sind, so ergiebt sich für die ersten Rückkehrpunkte

$$p_3':\quad t=u=0,\quad \frac{v}{w}=\frac{(L+M)v_1-\beta\delta(L-M)w_1}{(L+M)w_1-\alpha\gamma(L-M)v_1},$$

$$p_3'':\quad t=u=0,\quad \frac{v}{w}=\frac{(L^2+M^2)v_1-\beta\delta(L^2-M^2)w_1}{(L^2+M^2)w_1-\alpha\gamma(L^2-M^2)v_1},$$

und ganz allgemein für den k^{ten} Rückkehrpunkt:

$$(7.)\qquad p_3^{(k)}:\quad t=u=0,\quad \frac{v}{w}=\frac{(L^k+M^k)v_1-\beta\delta(L^k-M^k)w_1}{(L^k+M^k)w_1-\alpha\gamma(L^k-M^k)v_1}.$$

Alle diese Gleichungen sind in Beziehung auf L und M und demnach auch in Beziehung auf λ und μ homogen, und es bleiben darum die Werthe von $\frac{v}{w}$ bei veränderlichen Werthen, sowohl von λ und μ, als von λ_1 und μ_1, ganz dieselben, wenn die Verhältnisse $\frac{\lambda}{\mu}$ und $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ dieselben Werthe beibehalten. Wenn man also die Strahlen (3.) und (4.) durch andere Strahlen des durch das Strahlenquadrupel bestimmten Strahlensystems der ersten Ordnung und der ersten Classe $\left(\frac{\beta}{\gamma},\frac{\delta}{\alpha}\right)$ ersetzt, jedoch unter Festhaltung der Bedingung, dass die neuen Strahlen den bezüglich durch die Strahlen (1.), (2.), (3.) und (1.), (2.), (4.) bestimmten Hyperboloiden zugehören, deren Gleichungen die Parameter λ und μ nur in ihrem Verhältniss enthalten (pag. 162), so bleiben die Rückkehrpunkte p_3 ungeändert.

Verfolgt man den zur Construction der Rückkehrpunkte p_3 eingeschlagenen Weg in entgegengesetzter Richtung, d. h. geht man vom Punkte p zuerst geradlinig über (4.) zum Strahl (2.) und dann über (3.) zum Strahl (1.) und so weiter, so gelangt man, und zwar durch einfache Umkehrung der Ausdrücke für die Punkte p_3 zu ganz analogen Gleichungen für die Reihe der Rückkehrpunkte p_4 ($p_{4,3}$ pag. 162). Allgemein ergiebt sich:

$$(8.)\qquad p_4^{(k)}:\quad t=u=0,\quad \frac{v}{w}=\frac{(L^k+M^k)v_1+\beta\delta(L^k-M^k)w_1}{(L^k+M^k)w_1+\alpha\gamma(L^k-M^k)v_1}.$$

Der Kürze wegen möge noch gesetzt werden:

$$(9.)\qquad L^k+M^k=B_k,\quad L^k-M^k=A_k;$$

alsdann werden die Gleichungen der Rückkehrpunkte beider Art der k^{ten}

Ordnung:

$$(10.)\quad \begin{cases} p_3^{(k)}: & t=u=0, \quad \dfrac{v}{w}=\dfrac{B_k v_1-\beta\delta A_k w_1}{B_k w_1-\alpha\gamma A_k v_1}, \\ p_4^{(k)}: & t=u=0, \quad \dfrac{v}{w}=\dfrac{B_k v_1+\beta\delta A_k w_1}{B_k w_1+\alpha\gamma A_k v_1}. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich für den zum Ausgangspunkte p in Beziehung auf $p_3^{(k)}$ und $p_4^{(k)}$ conjugirten harmonischen Punkt p' (pag. 176) die Gleichungen:

$$p': \quad t=u=0, \quad \frac{v}{w}=\frac{\beta\delta w_1}{\alpha\gamma v_1},$$

welche ganz unabhängig sind, sowohl von den Werthen der Parameter λ und μ, als von der Ordnungszahl k der betrachteten Rückkehrpunkte, und demnach auch vollständig den früher (pag. 172) erhaltenen Punkt p' darstellen. Man hat also den Satz:

Wenn man von einem beliebig auf dem Strahl (1.) *eines Strahlenquadrupels* (1.), (2.), (3.), (4.) *gegebenen Punkte p aus zuerst geradlinig über* (3.) *zum Strahl* (2.) *geht und dann über* (4.) *wieder zum Strahl* (1.) *zurückkehrt und von dem Rückkehrpunkte* p_3 *aus dieselbe Construction wiederholt, und wenn man ferner von p aus zuerst geradlinig über* (4.) *zum Strahl* (2.) *geht und dann über* (3.) *wieder zum Strahl* (1.) *zurückkehrt und vom Rückkehrpunkte* p_4 *aus dieselbe Construction wiederholt, so mag man nach dem ersten und dem zweiten Verfahren nach kmaliger Rückkehr zum Strahl* (1.) *auf diesem bezüglich zu den Punkten* $p_3^{(k)}$ *und* $p_4^{(k)}$ *gelangt sein: — alsdann ist der zum Anfangspunkte p in Beziehung auf jedes Punktepaar* $p_3^{(k)}$ *und* $p_4^{(k)}$ *conjugirte harmonische Punkt derselbe, welches auch der Index k sein möge, und ebenso seiner Lage nach ganz unabhängig von den Parametern* λ, μ *und* λ_1, μ_1 *der Strahlen* (3.) *und* (4.) *des Strahlenquadrupels, so dass diese sich also durch jede zwei beliebige Strahlen des Systems* $\left(\frac{\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\alpha}\right)$ (pag. 158) *ersetzen lassen. Die Punktepaare* $p_3^{(k)}$ *und* $p_4^{(k)}$ *ferner sind conjugirte Punkte eines Involutionssystems und bleiben unverändert dieselben, wenn man den Strahl* (3.) *oder den Strahl* (4.) *des Strahlenquadrupels durch eine beliebige Generatrix desselben Systems der bezüglich durch die Strahlen* (1.), (2.), (3.) *und* (1.), (2.), (4.) *bestimmten Hyperboloide ersetzt.*

§. 2.

Fällt einer von den Rückkehrpunkten p_3 oder p_4 mit dem Ausgangspunkte p zusammen, so ist das Strahlenquadrupel *schliessend*. Die dazu er-

forderlichen Bedingungen zwischen den Parametern λ, μ und λ_1, μ_1 der Strahlen (3.) und (4.) ergeben sich sofort aus den Gleichungen (7.) und (8.). Nämlich der Punkt $p_3^{(k)}$ fällt mit p zusammen, wenn

$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{(L^k+M^k)v_1 - \beta\delta(L^k-M^k)w_1}{(L^k+M^k)w_1 - \alpha\gamma(L^k-M^k)v_1},$$

woraus sich die einfachere Bedingungsgleichung

$$(\alpha\gamma v_1^2 - \beta\delta w_1^2)(L^k - M^k) = 0$$

herleiten lässt. Das Verschwinden des ersten Factors bedingt für den Ausgangspunkt p eine Lage auf einer der beiden Leitlinien des durch das Strahlenquadrupel bestimmten Strahlensystems (pag. 158), kommt also hier nicht in Betracht, so dass die einzige Bedingung für das Zusammenfallen der Punkte $p_3^{(k)}$ und p wird:

$$(11.) \qquad L^k - M^k = 0.$$

Diese Bedingung ist ganz unabhängig von den Constanten v_1 und w_1, durch welche die Lage des Punktes p auf dem Strahl (1.) bestimmt wird, so dass, wenn sie erfüllt wird, der k^{te} Rückkehrpunkt mit dem Ausgangspunkte zusammenfällt, wo dieser auch auf dem Strahl (1.) gewählt sein mag. Ferner ist aus der Uebereinstimmung der Form der Gleichungen (7.) und (8.) der Rückkehrpunkte $p_3^{(k)}$ und $p_4^{(k)}$ sofort zu entnehmen, dass die Gleichung (11.) auch die Bedingung dafür ist, dass die Punkte $p_4^{(k)}$ und p zusammenfallen, was andrerseits als selbstverständlich zu bezeichnen ist, weil man unter Voraussetzung des Zusammenfallens der Punkte p und $p_3^{(k)}$ beim Rückwärtsverfolgen des zur Construction von $p_3^{(k)}$ von p aus erforderlichen zusammenhängenden, aus lauter geraden Linien bestehenden Zuges zum Ausgangspunkte p als einem Rückkehrpunkte p_4 gelangen muss. Man kann demnach ein Strahlenquadrupel, bei welchem der k^{te} Rückkehrpunkt mit dem Ausgangspunkte zusammenfällt, als ein ***schliessendes Strahlenquadrupel der k^{ten} Ordnung*** bezeichnen, welcher Bezeichnung entsprechend jede vier hyperboloidische Geraden ein schliessendes Strahlenquadrupel der ersten Ordnung bilden.

Es ist nicht ohne Interesse, die Gleichung (1.) noch näher ins Auge zu fassen. Die linke Seite derselben ist bekanntlich eine ganze Function von L und M, welche sich in soviel irreductible Factoren zerlegen lässt, als die Zahl k Theiler hat, die Zahlen 1 und k mit eingerechnet: alle diese Factoren haben ihre bestimmte Bedeutung, insofern sie gleich Null gesetzt die Bedingung dafür sind, dass bereits frühere Rückkehrpunkte, deren Ordnungszahlen

Theiler von k sind, mit dem Ausgangspunkte zusammenfallen. Es fällt nämlich z. B. der zwölfte Rückkehrpunkt $p^{(12)}$ mit p zusammen, auch wenn bereits $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$, $p^{(4)}$ oder $p^{(6)}$ mit p zusammenfällt, weil man in jedem dieser Fälle durch öftere Wiederholung der Construction bei der zwölften Rückkehr zum Strahl (1.) in den Ausgangspunkt p wiedereintrifft.

Als einfachste Beispiele seien aufgeführt die Bedingungen schliessender Strahlenquadrupel mit den Ordnungszahlen:

$k=1,\quad L-M=0$ oder $A=0,$

$k=2,\quad L^2-M^2=0$ - $A.B=0,$

$k=3,\quad L^3-M^3=0$ - $A(3B^2+\varpi A^2)=0,$

$k=4,\quad L^4-M^4=0$ - $AB(B^2+\varpi A^2)=0,$

$k=5,\quad L^5-M^5=0$ - $A(5B^4+10\varpi B^2A^2+\varpi^2A^4)=0,$

$k=6,\quad L^6-M^6=0$ - $AB(3B^2+\varpi A^2)(B^2+3\varpi A^2)=0,$

$k=12,\quad L^{12}-M^{12}=0$ - $AB(3B^2+\varpi A^2)(B^2+\varpi A^2)(B^2+3\varpi A^2)(B^4+14\varpi B^2A^2+\varpi^2A^4)=0,$

aus welchen jedesmal leicht die Bedingung für schliessende Strahlenquadrupel einer bestimmten Ordnung im engeren Sinne zu entnehmen ist.

Nunmehr könnte die Frage aufgeworfen werden, ob es möglich ist, dass ein späterer Rückkehrpunkt $p^{(k)}$ anstatt mit dem Ausgangspunkte p, zuerst mit einem Rückkehrpunkte $p^{(h)}$, wo also $h<k$, zusammenfällt. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass diese Frage verneint werden muss. Es ist nämlich charakteristisch für die Construction des von p ausgehenden zusammenhängenden Zuges, dass derselbe in seinem ganzen Verlaufe unzweideutig ist, also vom Ausgangspunkte bis zum Rückkehrpunkte $p^{(k)}$ die dazwischenliegenden Rückkehrpunkte p', p'', ... $p^{(k-1)}$ durchläuft, deren Bezeichnung durch den Index 3 oder 4 zu vervollständigen ist, jenachdem die erste Richtung des Zuges über den Strahl (3.) oder den Strahl (4.) hingeht: denn dieser Zug setzt sich in seinem ganzen Verlaufe zusammen aus geraden Linien, welche je einen bestimmten Punkt der Strahlen (1.) oder (2.) bezüglich mit den Strahlen (2.) oder (1.) verbinden und zwar so, dass dabei ein bestimmter von den Strahlen (3.) oder (4.) durchschnitten wird, deren Construction also bekanntlich, jeden Doppelsinn ausschliessend, darauf hinauskommt, durch den auf (1.) oder (2.) bestimmten Punkt und den Strahl (3.) oder (4.) eine Ebene zu legen, welche bezüglich den Strahl (2.) oder (1.) in einem zweiten Punkte der gesuchten Geraden durchschneidet. Ebenso gelangt man umgekehrt vom k^{ten} Rückkehrpunkte zum Ausgangspunkte, indem man der Reihe nach die Rück-

kehrpunkte $p^{(k-1)}, p^{(k-2)}, \dots p'', p'$ zurücklegt, ohne bei irgend einem Brechungspunkte des zu verfolgenden Zuges aus dem zuerst eingeschlagenen Wege ausweichen zu können. Wollte man jetzt annehmen, dass etwa der k^{te} Rückkehrpunkt mit dem h^{ten} zusammenfallen soll, wo $h < k$ ist, ehe der Zug den Ausgangspunkt wiedererreicht hat, so würde man beim Rückwärtsverfolgen des Zuges von $p^{(k)}$ über $p^{(k-1)}$, $p^{(k-2)}$, ... vom Punkte $p^{(h)}$ aus entweder den Weg über $p^{(h-1)}$ oder $p^{(k-1)}$ einschlagen können, jenachdem man den Punkt $p^{(h)}$ als den im anfänglichen Zuge auf $p^{(h-1)}$ oder $p^{(k-1)}$ folgenden Rückkehrpunkt ansieht, was dem eben dargestellten Charakter dieses Zuges widerspricht.

Dasselbe Resultat ergiebt sich sofort aus den Gleichungen (7.) und (8.). Wenn nämlich, der vorigen Annahme entsprechend, die Rückkehrpunkte $p^{(k)}$ und $p^{(h)}$ zusammenfallen sollen, so muss die Gleichung:

$$\frac{(L^h+M^h)v_1-\beta\delta(L^h-M^h)w_1}{(L^h+M^h)w_1-\alpha\gamma(L^h-M^h)v_1} = \frac{(L^k+M^k)v_1-\beta\delta(L^k-M^k)w_1}{(L^k+M^k)w_1-\alpha\gamma(L^k-M^k)v_1}$$

erfüllt werden, woraus sich nach den gewöhnlichen Reductionen ergiebt:

$$(\alpha\gamma v_1^2-\beta\delta w_1^2)(LM)^{2h}(L^{k-h}-M^{k-h}) = 0.$$

Man kann hier, wie früher, vom ersten Factor absehen, so dass nur die letzten Factoren in Betracht zu ziehen sind. Wenn zunächst die Bedingung

$$L^{k-h}-M^{k-h} = 0$$

zur Geltung kommen soll, so ergiebt sich (Gl. (11.)), dass bereits der $(k-h)^{te}$ Rückkehrpunkt mit dem Ausgangspunkte zusammenfällt, was der Forderung widerspricht, dass zuerst ein Zusammenfallen des k^{ten} Rückkehrpunktes mit dem h^{ten} stattfinden soll, andererseits aber, wenn man diese Forderung fallen lässt, in der That das Zusammentreffen der Punkte $p^{(k)}$ und $p^{(h)}$ bedingen kann, weil, nachdem einmal der $(k-h)^{te}$ Punkt in den Ausgangspunkt eingetreten ist, auch weiterhin jede zwei Rückkehrpunkte zusammenfallen, deren Indices sich um $(k-h)$ oder ein Vielfaches von $(k-h)$ unterscheiden.

Die zweite Bedingung

$$(12.)\qquad LM = 0, \quad \text{oder} \quad B^2-\varpi A^2 = 0,$$

lässt sich, wie folgt, umformen:

$$(\sqrt{\alpha\delta}.\lambda+\sqrt{\beta\gamma}.\mu)(\sqrt{\alpha\delta}.\lambda-\sqrt{\beta\gamma}.\mu)(\sqrt{\alpha\delta}.\lambda_1+\sqrt{\beta\gamma}.\mu_1)(\sqrt{\alpha\delta}.\lambda_1-\sqrt{\beta\gamma}.\mu_1) = 0.$$

Wenn einer dieser Factoren, welche nur bei reellen Leitlinien reell sind, verschwindet, so wird (pag. 158) der den zugehörigen Parametern λ, μ oder λ_1, μ_1 entsprechende Strahl (3.) oder (4.) eine der Leitlinien des Systems, d. h. durchschneidet derselbe die Strahlen (1.) und (2.), was der

ursprünglichen Annahme eines aus windschiefen Geraden bestehenden Strahlenquadrupels widerstreitet. Also:

Ein Strahlenquadrupel ist schliessend von der k^{ten} Ordnung, sobald für einen bestimmten Ausgangspunkt p der k^{te} Rückkehrpunkt wieder mit p zusammenfällt.

In jedem schliessenden Strahlenquadrupel können die Leitstrahlen (oben (3.) und (4.)) *zur Construction der Rückkehrpunkte vertauscht werden, ohne dass das Strahlenquadrupel aufhört schliessend zu sein.*

Das Zusammenfallen eines späteren Rückkehrpunktes mit einem früheren ist nicht möglich, wenn nicht bereits der Ausgangspunkt wiedererreicht worden ist.

§. 3.

Es darf nicht besonders hervorgehoben werden, dass bei den in den vorhergehenden Paragraphen besprochenen Constructionen die Strahlen (1.) und (2.) vertauscht werden können, wie bei den schliessenden Strahlenquadrupeln von den Strahlen (3.) und (4.) der eine die Stelle des andern einnehmen konnte. Man kann desshalb zur Vereinfachung des Ausdruckes auch hier die ersteren, sowie die letzteren als *Gegenstrahlen* von einander unterscheiden. Diese Bezeichnung gewinnt eine neue Bedeutung, wenn sich nunmehr noch weiter ergiebt, dass auch bei den jetzigen allgemeineren Constructionen das Strahlenpaar (1.) und (2.) mit dem Strahlenpaar (3.) und (4.) vertauscht werden kann (vergl. pag. 170).

Um dieses darzuthun, mögen die Coordinaten in der Weise transformirt werden, dass die Strahlen (3.) und (4.) auf ähnliche Art ausgedrückt werden, wie bisher die Strahlen (1.) und (2.). Man setze dazu:

$$t-\alpha\lambda\, v-\beta\mu\, w = t', \quad t-\alpha\lambda_1\, v-\beta\mu_1 w = v',$$
$$u-\gamma\mu v-\delta\lambda\, w = u', \quad u-\gamma\mu_1 v-\delta\lambda_1\, w = w',$$

wo t', u', v', w' noch mit gewissen Constanten multiplicirt sein können. Wenn man jetzt zur Abkürzung

$$\alpha\delta\lambda^2-\beta\gamma\mu^2 = C, \quad \alpha\delta\lambda_1^2-\beta\gamma\mu_1^2 = C_1,$$
$$\alpha\delta(\lambda-\lambda_1)^2-\beta\gamma(\mu-\mu_1)^2 = C-2B+C_1 = N$$

einführt, so erhält man zum Ausdruck der alten Coordinaten durch die neuen:

$$\begin{aligned} N.v &= \delta(\lambda_1-\lambda)(t'-v')-\beta(\mu_1-\mu)(u'-w'), \\ N.w &= \alpha(\lambda_1-\lambda)(u'-w')-\gamma(\mu_1-\mu)(t'-v'), \\ N.t &= (C_1-B)t'+(C-B)v'-\alpha\beta A(u'-w'), \\ N.u &= (C_1-B)u'+(C-B)w'-\gamma\delta A(t'-v'). \end{aligned}$$

Vermöge dieser Gleichungen lassen sich jetzt, wenn der gemeinschaftliche Factor N fortgelassen wird, die Strahlen (1.) und (2.) folgendermassen darstellen: der Strahl (1.) durch die Gleichungen:

$$C_1 t' = Bv' - \alpha\beta Aw' \quad \text{und} \quad C_1 u' = Bw' - \gamma\delta Av',$$

und der Strahl (2.) durch die Gleichungen:

$$t' - v' = 0 \quad \text{und} \quad u' - w' = 0.$$

Also wenn man statt $C_1 t'$ und $C_1 u'$ bezüglich t' und u' einführt, wobei zu bemerken ist, dass der Factor $C_1 = \alpha\delta\lambda_1^2 - \beta\gamma\mu_1^2$ nicht verschwindet, so lange der Strahl (4.) nicht mit einer Leitlinie zusammenfällt (pag. 158), so werden die Gleichungen der vier Strahlen des Strahlenquadrupels:

$$(1^a.) \begin{cases} t = Bv - \alpha\beta Aw, \\ u = Bw - \gamma\delta Av, \end{cases} \quad (2^a.) \begin{cases} t = C_1 v, \\ u = C_1 w, \end{cases} \quad (3^a.) \begin{cases} t = 0, \\ u = 0, \end{cases} \quad (4^a.) \begin{cases} v = 0, \\ w = 0, \end{cases}$$

wo noch zur Vereinfachung von den neuen Coordinaten die Indices weggelassen sind.

Wenn man jetzt von einem beliebig auf dem Strahl (3.) angenommenen Punkte r aus:

$$r: \quad t = u = 0, \quad \frac{v}{w} = \frac{v_1}{w_1},$$

über den Strahl (1.) hin die gerade Linie zieht bis zum Strahl (4.), so wird dieser im Punkte s_0 getroffen:

$$s_0: \quad v = w = 0, \quad \frac{t}{u} = \frac{Bv_1 - \alpha\beta Aw_1}{Bw_1 - \gamma\delta Av_1},$$

und wenn man von einem beliebig auf dem Strahl (4.) gegebenen Punkte s aus:

$$s: \quad v = w = 0, \quad \frac{t}{u} = \frac{t_1}{u_1},$$

über den Strahl (2.) hin die Verbindungsgerade mit dem Strahl (3.) zieht, so ist deren Fusspunkt r_0 auf dem letzteren:

$$r_0: \quad t = u = 0, \quad \frac{v}{w} = \frac{t_1}{u_1}.$$

Aus diesen Fundamentalgleichungen ergeben sich leicht die gesuchten Relationen. Dem Früheren entsprechend werde der erste Rückkehrpunkt, welcher sich auf dem Strahl (3.) ergiebt, wenn man erst vom Punkte r dieses Strahls geradlinig über (1.) zum Strahl (4.) geht und dann in einer zweiten geraden Linie weiter über (2.) zum Strahl (3.) zurückkehrt, nunmehr r_1' genannt, dagegen r_2, wenn man bei dieser Construction die Rollen der beiden

Leitstrahlen (1.) und (2.) vertauscht. Die Bedeutung der späteren Rückkehrpunkte r_1'', r_1''', ... $r_1^{(k)}$ und r_2'', r_2''', ... $r_2^{(k)}$ ist alsdann von selbst klar. Für diese Punkte ergeben sich jetzt ganz allgemein die Gleichungen:

$$r_1^{(k)}: \quad t = u = 0, \quad \frac{v}{w} = \frac{(L^k+M^k)v_1 - \alpha\beta(L^k-M^k)w_1}{(L^k+M^k)w_1 - \gamma\delta(L^k-M^k)v_1},$$

$$r_2^{(k)}: \quad t = u = 0, \quad \frac{v}{w} = \frac{(L^k+M^k)v_1 + \alpha\beta(L^k-M^k)w_1}{(L^k+M^k)w_1 + \gamma\delta(L^k-M^k)v_1},$$

wo L und M die frühere Bedeutung haben.

Die aus diesen Gleichungen zu ziehenden Folgerungen liegen auf der Hand. Als der zum Punkte r in Beziehung auf die Punktepaare $r_1^{(k)}$ und $r_2^{(k)}$ conjugirte harmonische Punkt ergiebt sich hier der Punkt:

$$r': \quad t = u = 0, \quad \frac{v}{w} = \frac{\alpha\beta w_1}{\gamma\delta v_1}.$$

Was aber hier vorzugsweise von Bedeutung ist, die Bedingung, dass einer der Rückkehrpunkte $r_1^{(k)}$ oder $r_2^{(k)}$ mit dem Ausgangspunkte r zusammenfällt, ist, abgesehen von der besonderen Annahme

$$\gamma\delta v_1^2 - \alpha\beta w_1^2 = 0,$$

welche für die nunmehrigen Coordinaten dem Punkte r eine Stelle auf einer der Leitlinien anweisen würde, ebenfalls

$$L^k - M^k = 0,$$

also ganz dieselbe, als sich früher (Gl. (11.)) ergeben hat als Bedingung dafür, dass einer der Rückkehrpunkte $p_3^{(k)}$ oder $p_4^{(k)}$ mit dem Ausgangspunkte p zusammentrifft. Ein gleiches Resultat würde sich ergeben haben, wenn man von einem beliebigen Punkte s des Strahls (4.) aus die Construction begonnen hätte. Es ergiebt sich demnach der Satz:

Wenn ein Strahlenquadrupel nach einer bestimmten Anzahl von Umläufen schliesst, indem man von einem beliebigen Punkte eines der beiden Gegenstrahlen (1.) *oder* (2.) *ausgeht, so schliesst dasselbe ebenso nach derselben Anzahl von Umläufen, wenn man von einem beliebigen Punkte der Gegenstrahlen* (3.) *oder* (4.) *aus die Construction beginnt*, oder kürzer:

Bei einem schliessenden Strahlenquadrupel von einer beliebigen Ordnung kann man jedes Paar von Gegenstrahlen als Leitstrahlen anwenden.

§. 4.

Um die Eigenschaften der Strahlenquadrupel nunmehr noch durch die Projectionstheorie zu entwickeln, sind auch die Brechungspunkte des gebrochenen Zuges $pp_3'p_3''...p_3^{(k)}$ und $pp_4'p_4''...p_4^{(k)}$ auf dem Strahl (2.) in Betracht

zu ziehen. Dieselben seien bezüglich q_3, q'_3, q''_3, ... $q_3^{(k-1)}$ und q_4, q'_4, q''_4, ... $q_4^{(k-1)}$, so dass also jede vom Strahl (1.) über (3.) zum Strahl (2.) und dann über (4.) zum Strahl (1.) gezogene gebrochene Linie $p_3^{(h)} p_3^{(h+1)}$ auf dem Strahl (2.) den Brechungspunkt $q_3^{(h)}$ und ebenso jede vom Strahl (1.) über (4.) zum Strahl (2.) und dann über (3.) zum Strahl (1.) gehende gebrochene Linie $p_4^{(h)} p_4^{(h+1)}$ auf (2.) den Brechungspunkt $q_4^{(h)}$ hat. Die gegenseitige Beziehung der Punkte eines zweiten Systems $P_3^{(h)}$, $P_4^{(h)}$, $Q_3^{(h)}$, $Q_4^{(h)}$ ist demnach selbstverständlich.

Alsdann tritt als Fundamentaleigenschaft eines Strahlenquadrupels die folgende auf:

I. *Wenn man von zwei beliebig auf dem Strahl* (1.) *gegebenen Punkten p und P aus geradlinig einmal über* (3.) *hin nach* (2.) *geht und dann über* (4.) *nach* (1.) ***zurückkehrt, und dann umgekehrt zuerst über*** (4.) *hin nach* (2.) *geht und von da aus über* (3.) *zum Strahl* (1.) *zurückkehrt, durch welche Constructionen sich als Brechungspunkte auf dem Strahl* (2.) *die Punkte q_3, q_4 und Q_3, Q_4, sowie auf* (1.) *die Rückkehrpunkte p'_3, p'_4 und P'_3, P'_4 ergeben, so sind die drei Punktepaare*

$$p \text{ und } P, \quad p'_3 \text{ und } P'_4, \quad p'_4 \text{ und } P'_3$$

conjugirte Punkte eines Involutionssystems.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich sofort daraus, dass man sowohl die Punkte p'_3, p, P'_3, P, als die Punkte p, p'_4, P, P'_4 als schiefe Projectionen der Punkte q_3, q_4, Q_3, Q_4 bezüglich auf den durch die Strahlen (1.), (2.), (4.) und (1.), (2.), (3.) bestimmten Hyperboloiden betrachten kann, dass also die beiden Punktsysteme p'_3, p, P'_3, P und p, p'_4, P, P'_4 projectivisch (homographisch) sind und demnach p und P, p'_3 und P'_4, p'_4 und P'_3 als conjugirte Punkte in Involution stehen.

Verallgemeinert heisst der Satz:

II. *Wenn man die im Satze* (I.) *angegebene Construction nach beiden Seiten hin von den Punkten p und P aus wiederholt, so sind auch jede vier gleichvielte Rückkehrpunkte $p_3^{(k)}$ und $P_4^{(k)}$, $p_4^{(k)}$ und $P_3^{(k)}$ als conjugirte Punkte in Involution mit den Ausgangspunkten p und P.*

Zum Beweise dieses Satzes hat man die beiden Fälle zu unterscheiden, ob der Index k gerade oder ungerade ist. Jenachdem man nämlich, diesen Fällen entsprechend, von den Punkten $P^{\left(\frac{k}{2}\right)}$ oder $Q^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}$ ausgeht und entweder die vier Punkte $p_3^{\left(\frac{k}{2}\right)}$, $p_4^{\left(\frac{k}{2}\right)}$, $P_3^{\left(\frac{k}{2}\right)}$, $P_4^{\left(\frac{k}{2}\right)}$ oder die vier Punkte $q_3^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}$,

$q_4^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}$, $Q_3^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}$, $Q_4^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}$ zugleich windschief $k$mal der Reihe nach, einmal die ersteren über (3.) auf den Strahl (2.) und weiter über (4.) auf den Strahl (1.), die letzteren über (4.) auf den Strahl (1.) und dann über (3.) auf (2.) u. s. w. projicirt, und ferner die ersteren zuerst über (4.) auf (2.) und weiter über (3.) auf (1.), die letzteren über (3.) auf (1.) und dann über (4.) auf (2.) u. s. w., gelangt man zuletzt zu den beiden Punktsystemen $p_3^{(k)}$, p, $P_3^{(k)}$, P und p, $p_4^{(k)}$, P, $P_4^{(k)}$, welche demnach projectivisch sind und vereinigt ein Involutionssystem darstellen mit den Punktepaaren

$$p \text{ und } P,\quad p_3^{(k)} \text{ und } P_4^{(k)},\quad p_4^{(k)} \text{ und } P_3^{(k)}.$$

Aus diesen beiden Sätzen ergiebt sich sofort, dass ein Strahlenquadrupel schliessend ist, sobald sich ein beliebiger der in den Sätzen (I.) und (II.) beschriebenen gebrochenen Züge zwischen den Gegenstrahlen (1.) und (2.) des Quadrupels schliesst; denn sobald für einen beliebigen Werth des Index k zwei Rückkehrpunkte $p_3^{(k)}$ und $p_4^{(k)}$ zusammenfallen, so tritt dasselbe bei den ihnen conjugirten Punkten der Involution, d. h. den Rückkehrpunkten $P_3^{(k)}$ und $P_4^{(k)}$ ein, welches auch die Lage des Ausgangspunktes P sein mag.

Dass ferner alsdann auch jeder zwischen den beiden Gegenstrahlen (3.) und (4.) hin und her gehende gebrochene Zug, dessen geradlinige Theile bezüglich die Strahlen (1.) und (2.) durchschneiden, sich in den Rückkehrpunkten der k^{ten} Ordnung schliesst, folgt einfach daraus, dass durch die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der Linien des geschlossenen Zuges zwischen den Gegenstrahlen (1.) und (2.) mit den Strahlen (3.) und (4.) selbst ein geschlossener Zug der geforderten Art zwischen den Gegenstrahlen (3.) und (4.) dargestellt wird. Denn bezeichnet man die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden der Punktepaare $p_3^{(h)}$, $q_3^{(h)}$ und $q_3^{(h)}$, $p_3^{(h+1)}$ bezüglich mit den Strahlen (3.) und (4.) durch $r_3^{(h)}$ und $s_3^{(h)}$, sowie die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden der Punktepaare $p_4^{(h)}$, $q_4^{(h)}$ und $q_4^{(h)}$, $p_4^{(h+1)}$ bezüglich mit den Strahlen (4.) und (3.) durch $s_4^{(h)}$ und $r_4^{(h)}$, so liegt die Verbindungsgerade der Punktepaare $r_3^{(h)}$ und $s_3^{(h)}$ oder $r_4^{(h)}$ und $s_4^{(h)}$ in derselben Ebene mit dem Strahl (1.) und kann demnach als eine diesen Strahl durchschneidende Linie angesehen werden, und ebenso lässt sich die Verbindungsgerade jedes Punktepaares $s_3^{(h)}$ und $r_3^{(h+1)}$, sowie $r_4^{(h)}$ und $s_4^{(h+1)}$ als Durchschnittslinie des Strahls (2.), mit welchem sie in derselben Ebene liegt, betrachten. Wenn zunächst die Punkte $p_3^{(k)}$ und $p_4^{(k)}$ zusammenfallen, d. h. wenn das Strahlenquadrupel als ein schliessendes der $2k^{\text{ten}}$ Ordnung zu bezeichnen ist, so schliesst sich auch der gebrochene Zug

$r_3 s_3 r_3' s_3' r_3'' s_3'' \ldots r_3^{(k-1)} s_3^{(k-1)}{}_{\ldots}$ und in der entgegengesetzten Richtung $r_3 s_4 r_4 s_4' r_4' s_4'' r_4'' \ldots s^{(k-1)} r_4^{(k-1)}{}_{\ldots}$, indem der Punkt $r_4^{(k-1)}$ als Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von $q_4^{(k-1)}$ und $p_4^{(k)}$ (oder $p_3^{(k)}$) mit dem Strahl (3.), derselbe ist wie $r_3^{(k)}$, der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von $p_3^{(k)}$ und $q_3^{(k)}$ (oder $q_4^{(k-1)}$) mit dem Strahl (3.). Dasselbe ergiebt sich, wenn zwei Rückkehrpunkte $p_3^{(k)}$ und $p_4^{(k-1)}$ oder $p_3^{(k-1)}$ und $p_4^{(k)}$ zusammenfallen, d. h. bei den schliessenden Strahlenquadrupeln der $(2k-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Noch bleibt zu zeigen übrig, dass die zum Punkte p in Beziehung auf alle Punktepaare p_3' und p_4', p_3'' und p_4'', ... $p_3^{(k)}$ und $p_4^{(k)}$ conjugirten harmonischen Punkte alle in denselben Punkt p' zusammenfallen.

Für die beiden Punktepaare p_3' und p_4', p_3'' und p_4'' ergiebt sich das sofort aus dem Satze (I.). Wenn man nämlich die beiden Punkte p_3' und p_4' als Ausgangspunkte annimmt, so stehen mit ihnen in Involution als conjugirte Punktepaare die Rückkehrpunkte p_3'' und p_4'', sowie p und p, und es ist demnach p Doppelpunkt der Involution für die Punktepaare p_3' und p_4', p_3'' und p_4''. Dass aber diesem Involutionssystem ferner die Punktepaare p_3''' und p_4''', ... $p_3^{(k)}$ und $p_4^{(k)}$ angehören, ergiebt sich durch eine einfache Schlussfolge: für die Ausgangspunkte $p_3^{(h)}$ und $p_4^{(h)}$ sind nach dem Satze (I.) in Involution die Punktepaare

$$p_3^{(h-1)} \text{ und } p_4^{(h-1)}, \quad p_3^{(h)} \text{ und } p_4^{(h)}, \quad p_3^{(h+1)} \text{ und } p_4^{(h+1)},$$

also wenn man der Reihe nach für h die Werthe 2, 3, ... $k-1$ setzt, so ergeben sich als zu demselben Involutionssystem gehörig die Punktepaare p_3' und p_4', p_3'' und p_4'', p_3''' und p_4''', ... $p_3^{(k)}$ und $p_4^{(k)}$, und weil der Ausgangspunkt p ein Doppelpunkt dieses Involutionssystems ist, so ist der zweite Doppelpunkt p' gleichzeitig conjugirt harmonisch zu p in Beziehung auf alle diese Punktepaare $p_3^{(h)}$ und $p_4^{(h)}$.

§. 5.

Zum Schluss sei noch auf eine Reihe von Sätzen aus der ebenen Geometrie aufmerksam gemacht, welche sich aus den Eigenschaften räumlicher Strahlenquadrupel ergeben.

Durch die windschiefe Projection der Punkte q, q', q'', ... des Strahls (2.) auf den Strahl (1.) vermittelst der Leitstrahlen (3.) und (4.) ergiebt sich auf dem Strahl (1.) eine doppelte Reihe von Punkten p, nämlich p_3, p_3', p_3'', ... und p_4, p_4', p_4'', ..., deren jede der Punktreihe q des Strahls (2.) projectivisch ist, so dass der Strahl (1.) durch die Punkte $p_3^{(h)}$ und $p_4^{(h)}$ doppelt projectivisch (homographisch) getheilt wird.

Wenn man umgekehrt auf der einen von zwei Geraden G_1 und G_2 eine einfache Punktreihe $q, q', q'', \ldots$, auf der andern zwei ihr projectivische Punktreihen $p_3, p_3', p_3'', \ldots$ und $p_4, p_4', p_4'', \ldots$ annimmt, so haben die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punktepaare $q^{(h)}$ und $p_3^{(h)}$, $q^{(h)}$ und $p_4^{(h)}$ der beiden Linien G_1 und G_2 die in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Beziehungen zu einander, und die sämmtlichen projectivischen Eigenschaften derselben bleiben ungeändert, wenn man die beiden gegebenen Geraden G_1 und G_2, die Träger der projectivischen Punktreihen, als in derselben Ebene liegend annimmt. Alsdann aber sind bekanntlich die Verbindungslinien der Punkte der Reihe q mit den entsprechenden Punkten der Reihen p_3 und p_4 bezüglich Tangenten von zwei Kegelschnitten, welche die Geraden G_1 und G_2 zu gemeinschaftlichen Tangenten haben. Demnach ergiebt sich aus der Eigenschaft schliessender Strahlenquadrupel der zweiten Ordnung:

Wenn die abwechselnden Eckpunkte eines Vierecks auf zwei Geraden G_1 und G_2 liegen, welche gemeinschaftliche Tangenten zweier Kegelschnitte K_1 und K_2 sind, und ein Paar Gegenseiten den Kegelschnitt K_1, das andere Paar den Kegelschnitt K_2 berührt, so giebt es unendlich viele Vierecke, welche in ganz ähnlicher Weise den beiden Geraden eingeschrieben und den beiden Kegelschnitten umgeschrieben sind.

Ebenso erhält man allgemein aus der Eigenschaft der schliessenden Strahlenquadrupel der k^{ten} Ordnung:

Wenn sich ein $2k$-Eck in der Weise zwei gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte einzeichnen lässt, dass seine Seiten abwechselnd den einen und den andern Kegelschnitt berühren, so lassen sich solche $2k$-Ecke den beiden Tangenten einzeichnen, welchen Punkt derselben man auch als ersten Eckpunkt annehmen mag.

Die weitere Durchführung dieser Sätze, deren Reihe sich durch die Theorie der reciproken Polaren verdoppeln lässt, liegt nicht im Zweck der gegenwärtigen Untersuchung.

Berlin, Mai 1867.

Ueber einen besonderen Fall der orthogonalen Substitutionen.

(Von Herrn *Stern* zu Göttingen.)

Wird die Verwandlung einer Function der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_m$ in eine Function der Veränderlichen $y_1, y_2, \dots y_m$ durch eine lineare orthogonale Substitution bewerkstelligt, welche durch die Gleichungen

$$x_1 = a_{1,1}\,y_1 + a_{1,2}\,y_2 + \cdots + a_{1,m}\,y_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m = a_{m,1}\,y_1 + a_{m,2}\,y_2 + \cdots + a_{m,m}\,y_m$$

ausgedrückt wird, so finden *im Allgemeinen*, wie bekannt, zwischen den m^2 Coefficienten $a_{1,1}, \dots a_{m,m}$ jedesmal $\frac{m(m+1)}{1.2}$ Gleichungen statt, so dass nur $\frac{m^2-m}{2}$ dieser Grössen unabhängig sind. Herr Prof. *Schläfli* hat den besonderen Fall untersucht, wenn die Constanten den Bedingungen $a_{1,1} = a_{2,2} = \cdots = a_{m,m}$ und $a_{\alpha,\beta} = -a_{\beta,\alpha}$ genügen und zugleich m eine gerade Zahl ist, und findet durch geometrische Betrachtungen, dass in diesem Falle die Anzahl der unabhängigen Coefficienten $= n^2 - n + 1$ ist. Er bemerkt zugleich, er hielte es für schwierig diesen Satz direct zu beweisen (Quart. Journ. of pure and appl. mathem. Oct. 1866, p. 182). Ich will im Folgenden einen directen Beweis dieses Satzes geben, welcher zugleich auf den Fall anwendbar ist, wenn die Coefficienten den angegebenen Bedingungen genügen, während m eine ungerade Zahl ist. Im allgemeinen Falle hat man die m Gleichungen

$$a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2 + \cdots + a_{m,1}^2 = 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{1,m}^2 + a_{2,m}^2 + \cdots + a_{m,m}^2 = 1,$$

welche das System $(A.)$ heissen sollen und die $\frac{m(m-1)}{2}$ Gleichungen

$$a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2} + \cdots + a_{m,1}a_{m,2} = 0,$$
$$a_{1,1}a_{1,3} + a_{2,1}a_{2,3} + \cdots + a_{m,1}a_{m,3} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{1,m-1}a_{1,m} + a_{2,m-1}a_{2,m} + \cdots + a_{m,m-1}a_{m,m} = 0,$$

welche das System $(B.)$ heissen sollen.

In dem besonderen hier zu betrachtenden Falle geht das System (*A.*) in

$$\begin{aligned} a_{1,1}^2+a_{1,2}^2+\cdots+a_{1,m}^2 &= 1, \\ a_{1,2}^2+a_{2,1}^2+\cdots+a_{2,m}^2 &= 1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1,m}^2+a_{2,m}^2+\cdots+a_{1,1}^2 &= 1 \end{aligned}$$

über, welche Gleichungen das System (A_1.) heissen mögen. In jeder Gleichung des Systems (*B.*) fallen nun zwei Glieder weg und zwar, wenn diese Gleichung mit $a_{1,k}a_{1,l}$ beginnt, so heben sich die darin enthaltenen Glieder $a_{k,k}a_{k,l}$ und $a_{l,k}a_{l,l}$ auf. Diese Gleichung wird also

$$(1.)\quad a_{1,k}a_{1,l}+a_{2,k}a_{2,l}+\cdots+a_{k-1,k}a_{k-1,l}+a_{k+1,k}a_{k+1,l}+\cdots+a_{l+1,k}a_{l+1,l}+\cdots+a_{m,k}a_{m,l}=0.$$

Insofern aber $a_{k+1,k}=-a_{k,k+1}$ u. s. w., so kann man diese Gleichung in eine andere verwandeln, in welcher der kleinere der jedesmal zusammengehörenden zwei Indices voransteht, nur kommen in dieser neuen Gleichung positive und negative Zeichen vor. Da aber für die folgende Beweisführung diese Zeichen ganz gleichgültig sind und nur die Darstellung verwirren könnten, so will ich zwar je zwei zusammengehörende Indices, nach ihrer Grösse geordnet, schreiben, jedoch die einzelnen mit + oder − verbundenen Glieder nur durch einen verticalen Strich trennen, welcher also das + oder − Zeichen vertritt. Ich schreibe demnach statt der Gleichung (1.) die folgende

$$(2.)\quad a_{1,k}a_{1,l}\,|\,a_{2,k}a_{2,l}\ldots|\,a_{k-1,k}a_{k-1,l}\,|\,a_{k,k+1}a_{k+1,l}\ldots|\,a_{k,m}a_{l,m} = 0,$$

in welcher also $a_{l,m}$ der höchste Coefficient ist. Indem man für k und l alle ihnen zukommenden Werthe setzt, erhält man sämmtliche aus dem Systeme (*B.*) entspringenden Gleichungen; sie sollen das System (B_1.) heissen.

Sei nun zuerst $m=2n$. Dann sind die zwei ersten Gleichungen des Systems (A_1.)

$$(a_1.)\quad a_{1,1}^2+a_{1,2}^2+a_{1,3}^2+\cdots+a_{1,2n}^2 = 1,$$
$$(a_2.)\quad a_{1,2}^2+a_{1,1}^2+a_{2,3}^2+\cdots+a_{2,2n}^2 = 1.$$

Zieht man die zweite dieser Gleichungen von der ersten ab, so hat man

$$(b_1.)\quad a_{1,3}^2\cdots+a_{1,2n}^2-a_{2,3}^2\cdots-a_{2,2n}^2 = 0.$$

Man nehme nun die $4n-6$ in dieser letzten Gleichung vorkommenden Coefficienten $a_{1,3}$, $a_{1,4}$, ... $a_{1,2n-1}$ und $a_{2,3}$, $a_{2,4}$, ... $a_{2,2n-1}$ als gegeben an, so enthält sie noch die zwei unbekannten Coefficienten $a_{1,2n}$ und $a_{2,2n}$. Die erste Gleichung des Systems (B_1.) ist aber

$$(b_2.)\quad a_{1,3}a_{2,3}\,|\,a_{1,4}a_{2,4}\ldots|\,a_{1,2n}a_{2,2n}=0,$$

in welcher mithin ebenfalls nur die zwei Coefficienten $a_{1,2n}$ und $a_{2,2n}$ als Unbekannte enthalten sind, und welche daher aus den zwei Gleichungen $(b_1.)$ und $(b_2.)$ bestimmt werden. Nimmt man nun noch $a_{1,2}$ als gegeben an, so findet man aus $(a_1.)$ den Werth von $a_{1,1}$ (ohne Rücksicht auf das Zeichen, was auch für das Folgende gilt). Die $4n-5$ als gegeben angenommenen Coefficienten und die daraus gefundenen bilden die Reihe $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ u. s. w. bis $a_{2,2n}$.

Die dritte Gleichung des Systems $(A_1.)$ enthält ausser den jetzt bekannten Coefficienten $a_{1,3}$, $a_{2,3}$, $a_{3,3}$ noch die $2n-3$ Coefficienten $a_{3,4}$, $a_{3,5}$, ... $a_{3,2n}$. In dem Systeme $(B_1.)$ kommen aber zwei Gleichungen vor, welche mit dem Coefficienten $a_{1,2n}$ schliessen, nämlich diejenigen, welche mit $a_{1,1}a_{1,3}$ und mit $a_{1,2}a_{1,3}$ beginnen. Man hat also drei Gleichungen, in welchen kein Coefficient höheren Ranges als $a_{3,2n}$ vorkommt und mithin kein anderer unbekannter Coefficient als $a_{3,4}$, $a_{3,5}$, ... $a_{3,2n}$. Nimmt man die $2n-6$ Coefficienten $a_{3,4}$, $a_{3,5}$, ... $a_{3,2n-3}$ als gegeben an, so findet man vermittelst der erwähnten drei Gleichungen die Coefficienten $a_{3,2n-2}$, $a_{3,2n-1}$, $a_{3,2n}$. Es sind also jetzt die sämmtlichen Coefficienten in der Reihe $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, ... $a_{3,2n}$ theils als bekannt angenommen, theils gefunden. Man nehme nun allgemein an, man kenne bereits sämmtliche Coefficienten, nach ihrem Range geordnet, von $a_{1,1}$ bis $a_{k,2n}$, und es soll nun untersucht werden, wie viele der Coefficienten $a_{k+1,k+2}$, $a_{k+1,k+3}$, ... $a_{k+1,2n}$ man als gegeben annehmen muss, damit man die übrigen bestimmen kann. Diese $2n-(k+1)$ Coefficienten und keine höheren kommen in der $k+1^{\text{ten}}$ Gleichung des Systems $(A_1.)$ vor, welche mit $a_{1,k+1}^2$ beginnt. Ferner enthält das System $(B_1.)$ eine Anzahl k Gleichungen, welche mit dem Coefficienten $a_{k+1,2n}$ schliessen und also keinen höheren enthalten, und zwar sind es diejenigen, welche mit den Coefficienten $a_{1,1}a_{1,k+1}$, $a_{1,2}a_{1,k+1}$, ... $a_{1,k}a_{1,k+1}$ beginnen. Man muss daher $2n-2(k+1)$ dieser Coefficienten als bekannt voraussetzen, um die übrigen $k+1$ zu finden. Hieraus ergiebt sich, dass überhaupt nur noch so lange Coefficienten als gegeben vorausgesetzt werden müssen, als $k+1<n$ ist, also höchstens $k=n-2$ ist. D. h. also, um schliesslich die sämmtlichen Glieder der Reihe $a_{n-1,n}a_{n-1,n+1}$ ... $a_{n-1,2n}$ zu kennen, muss man $2n-2(n-1)$ oder zwei Glieder aus dieser Reihe als bekannt voraussetzen, wofür man am einfachsten die zwei ersten $a_{n-1,n}$ und $a_{n-1,n+1}$ nimmt. Die folgenden Coefficienten $a_{n,n+1}$ u. s. w. kann man immer aus Gleichungen, die in genügender Zahl vorhanden sind, bestimmen und braucht daher keinen derselben als bekannt vorauszusetzen.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich demnach, dass man, um sämmtliche Coefficienten zu bestimmen, eine Anzahl derselben kennen muss, welche durch $4n-5+\Sigma 2(n-k)$ ausgedrückt wird, wo man für k alle Zahlen $k=3$ bis $k=n-1$ zu nehmen hat. Dies giebt also n^2-n+1 unabhängige Coefficienten, aus welchen die übrigen bestimmt werden.

Ist z. B. $n=3$ und schreibt man, zur Abkürzung, 1,1 statt $a_{1,1}$ und allgemein k, l statt $a_{k,l}$ so enthält das System $(A_1.)$ die Gleichungen

$$(1.)\quad 1,1^2+1,2^2+1,3^2+1,4^2+1,5^2+1,6^2 = 1,$$
$$(2.)\quad 1,2^2+1,1^2+2,3^2+2,4^2+2,5^2+2,6^2 = 1,$$
$$(3.)\quad 1,3^2+2,3^2+1,1^2+3,4^2+3,5^2+3,6^2 = 1,$$
$$(4.)\quad 1,4^2+2,4^2+3,4^2+1,1^2+4,5^2+4,6^2 = 1,$$
$$(5.)\quad 1,5^2+2,5^2+3,5^2+4,5^2+1,1^2+5,6^2 = 1,$$
$$(6.)\quad 1,6^2+2,6^2+3,6^2+4,6^2+5,6^2+1,1^2 = 1$$

und das System $(B_1.)$ die Gleichungen

$$(7.)\quad 1,3.2,3+1,4.2,4+1,5.2,5+1,6.2,6 = 0,$$
$$(8.)\quad -1,2.2,3+1,4.3,4+1,5.3,5+1,6.3,6 = 0,$$
$$(9.)\quad -1,2.2,4-1,3.3,4+1,5.4,5+1,6.4,6 = 0,$$
$$(10.)\quad -1,2.2,5-1,3.3,5-1,4.4,5+1,6.5,6 = 0,$$
$$(11.)\quad 1,2.2,6+1,3.3,6+1,4.4,6+1,5.5,6 = 0,$$
$$(12.)\quad 1,2.1,3+2,4.3,4+2,5.3,5+2,6.3,6 = 0,$$
$$(13.)\quad 1,2.1,4-2,3.3,4+2,5.4,5+2,6.4,6 = 0,$$
$$(14.)\quad 1,2.1,5-2,3.3,5-2,4.4,5+2,6.5,6 = 0,$$
$$(15.)\quad 1,2.1,6-2,3.3,6-2,4.4,6-2,5.5,6 = 0,$$
$$(16.)\quad 1,3.1,4+2,3.2,4+3,5.4,5+3,6.4,6 = 0,$$
$$(17.)\quad 1,3.1,5+2,3.2,5-3,4.4,5+3,6.5,6 = 0,$$
$$(18.)\quad 1,3.1,6+2,3.2,6-3,4.4,6-3,5.5,6 = 0,$$
$$(19.)\quad 1,4.1,5+2,4.2,5+3,4.3,5+4,6.5,6 = 0,$$
$$(20.)\quad 1,4.1,6+2,4.2,6+3,4.3,6-4,5.5,6 = 0,$$
$$(21.)\quad 1,5.1,6+2,5.2,6+3,5.3,6+4,5.4,6 = 0.$$

Nimmt man nun die 7 Coefficienten 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 2,3; 2,4; 2,5 als bekannt an, so findet man aus den Gleichungen (1.), (2.) und (7.) die Werthe von 1,6 und 2,6 mithin auch den Werth von 1,1. Dann findet man aus den

Gleichungen (3.), (8.) und (12.) den Werth von 3,4; 3,5; 3,6. Zur Bestimmung von 4,5 und 4,6 kann man zwei der vier Gleichungen (4.), (9.), (13.) und (16.) auswählen und schliesslich 5,6 aus einer der Gleichungen (5.), (10.), (11.), (14.), (15.), (17.), (18.), (19.), (20.) bestimmen.

Die Betrachtung bleibt im Wesentlichen dieselbe, wenn m eine ungerade Zahl $= 2n+1$ ist. Man nimmt zuerst die $4n-3$ Coefficienten $a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots a_{1,2n}$ und $a_{2,3}, a_{2,4}, \ldots a_{2,2n}$ als gegeben an und findet vermittelst der zwei ersten Gleichungen des Systems $(A_1.)$ und der ersten Gleichung des Systems $(B_1.)$ die Werthe von $a_{1,2n+1}$ und $a_{2,2n+1}$ und den Werth von $a_{1,1}$. Man hat dann wieder, wie im vorhergehenden Falle, drei Gleichungen zwischen den $2n+1-3$ Coefficienten $a_{3,4}, \ldots a_{3,2n+1}$, so dass $2n+1-2.3$ derselben als bekannt angenommen werden müssen, und allgemein müssen von den Coefficienten $a_{k,k+1}, \ldots a_{k,2n}$ nothwendig $2n+1-2k$ als bekannt angenommen werden, wenn die übrigen gefunden werden sollen. Im Ganzen sind daher $4n-3+\Sigma(2n+1-2k)$ Coefficienten als bekannt voraus zu setzen, wo für k die Zahlen von $k=3$ bis $k=n$ zu nehmen sind, also n^2+1 unabhängige Coefficienten. Dieser Ausdruck gilt jedoch erst von $m=7$ an. Ist nämlich $m=3$ so hat man, mit Benutzung der schon oben gebrauchten Abkürzung die sechs Gleichungen

$$(1.)\quad 1,1^2+1,2^2+1,3^2=1, \qquad (4.)\quad 1,3.2,3=0,$$
$$(2.)\quad 1,2^2+1,1^2+2,3^2=1, \qquad (5.)\quad 1,2.2,3=0,$$
$$(3.)\quad 1,3^2+2,3^2+1,1^2=1, \qquad (6.)\quad 1,2.1,3=0.$$

Die Differenz der zwei ersten Gleichungen mit der vierten verbunden, giebt $1,3=0$, $2,3=0$, dann folgt aus (3.) dass $1,1^2=1$ und mithin aus (1.) dass $1,2=0$, so dass in diesem Falle kein Coefficient unbestimmt ist.

Ist $m=5$ so hat man die 15 Gleichungen

$$(1.)\quad 1,1^2+1,2^2+1,3^2+1,4^2+1,5^2 = 1,$$
$$(2.)\quad 1,2^2+1,1^2+2,3^2+2,4^2+2,5^2 = 1,$$
$$(3.)\quad 1,3^2+2,3^2+1,1^2+3,4^2+3,5^2 = 1,$$
$$(4.)\quad 1,4^2+2,4^2+3,4^2+1,1^2+4,5^2 = 1,$$
$$(5.)\quad 1,5^2+2,5^2+3,5^2+4,5^2+1,1^2 = 1,$$
$$(6.)\quad 1,3.2,3+1,4.2,4+1,5.2,5 = 0,$$
$$(7.)\quad -1,2.2,3+1,4.3,4+1,5.3,5 = 0,$$
$$(8.)\quad -1,2.2,4-1,3.3,4+1,5.4,5 = 0,$$
$$(9.)\quad 1,2.2,5+1,3.3,5+1,4.4,5 = 0,$$

$$(10.)\qquad 1,2.1,3+2,4.3,4+2,5.3,5 = 0,$$
$$(11.)\qquad 1,2.1,4-2,3.3,4+2,5.4,5 = 0,$$
$$(12.)\qquad 1,2.1,5-2,3.3,5-2,4.4,5 = 0,$$
$$(13.)\qquad 1,3.1,4+2,3.2,4+3,5.4,5 = 0,$$
$$(14.)\qquad 1,3.1,5+2,3.2,5-3,4.4,5 = 0,$$
$$(15.)\qquad 1,4.1,5+2,4.2,5+3,4.3,5 = 0.$$

Nach der allgemeinen Formel müssten hier 5 Coefficienten unabhängig sein, während in Wahrheit nur 4 unabhängig sind. Nimmt man nämlich die Coefficienten 1,3; 1,4; 2,3; 2,4 als bekannt an, so findet man aus der Differenz der zwei ersten Gleichungen in Verbindung mit der sechsten die Coefficienten 1,5 und 2,5, ferner aus der Differenz von (3.) und (4.) in Verbindung mit (13.) die Werthe von 3,5 und 4,5; dann 3,4 aus (14.) und 1,2 aus (7.), schliesslich 1,1 aus einer der ersten 5 Gleichungen.

Versteht man unter $E\frac{m}{2}$ die grösste in $\frac{m}{2}$ enthaltene ganze Zahl, so kann man die Anzahl der unabhängigen Coefficienten für ein gerades und ungerades m durch die gemeinsame Formel $1+E\frac{m-1}{2}\cdot E\frac{m}{2}$ ausdrücken.

Im April 1867.

Ueber die Kettenbruchentwickelung des *Gauss*schen Quotienten $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$.

(Von Herrn *L. W. Thomé.*)

Gauss giebt in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe nachstehende Entwickelung des Quotienten $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$, indem er durch $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ diejenige Function bezeichnet, welche für die Werthe des Argumentes x innerhalb des um den Nullpunkt der Constructionsebene mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises durch die Potenzreihe

$$1+\sum_1^\infty \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+r-1)}{1.2\dots r.\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+r-1)}x^r$$

definirt ist, und welche gemäss der für die Reihe geltenden linearen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dF}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}F = 0$$

eindeutig und stetig bleibt bis zu einer vom Punkte $x=1$ aus beliebig ins Unendliche gezogenen, sich selbst nicht schneidenden Linie.

Die *Gauss*sche Entwickelung ist diese:

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\ddots\,\cfrac{}{1-\cfrac{a_{n-2}x}{1-a_{n-1}x\frac{f_n}{f_{n-1}}}}}}},$$

wo

$$a_{2m} = \frac{(\beta+m)(\gamma-\alpha+m)}{(\gamma+2m-1)(\gamma+2m)}, \qquad f_{2m} = F(\alpha+m,\beta+m,\gamma+2m,x),$$

$$a_{2m+1} = \frac{(\alpha+m)(\gamma-\beta+m)}{(\gamma+2m)(\gamma+2m+1)}, \qquad f_{2m+1} = F(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m+1,x)$$

ist. Für $n=\infty$ nimmt diese Entwickelung die Form eines unendlichen Kettenbruches an. Von den in vorstehender Entwickelungsform enthaltenen Kettenbrüchen hat der Verfasser im 66. Bande dieses Journals den besonders her-

vortretenden, in welchem $\beta = 0$ gesetzt ist, wodurch man den Kettenbruch einer hypergeometrischen Function selbst, nämlich nach Vertauschung von γ mit $\gamma - 1$ den der Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ erhält, in Bezug auf die Convergenz untersucht. Es hat sich dort ergeben, dass der Näherungswerth dieses Kettenbruches in dem ganzen Gebiete der Ebene ausserhalb der Strecke auf der Abscissenaxe $x = +1 \cdots +\infty$ gegen die erzeugende Function convergirt. Die bei diesem specielleren Kettenbruche angewandte Methode führt aber auch bei dem allgemeineren des Quotienten $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ zum Ziele, und es soll in dieser Abhandlung gezeigt werden, dass für beliebige, reelle oder imaginäre Werthe der Grössen α, β, γ der Näherungswerth dieses Kettenbruches in dem Gebiete ausserhalb der Strecke auf der Abscissenaxe $x = +1 \cdots +\infty$ mit Ausschluss derjenigen Punkte, in welchen der Quotient unendlich wird, gegen die erzeugende Function convergirt.

§. 1.

Die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$\cfrac{\lambda_1}{\mu_1 + \cfrac{\lambda_2}{\mu_2 + \cfrac{\ddots}{\ddots \cfrac{\lambda_{r-1}}{\mu_{r-1} + \cfrac{\lambda_r}{\mu_r + \ddots}}}}}$$

mögen mit Z und N bezeichnet, und derjenige Näherungsbruch, welcher sich aus der Reihe der Brüche $\frac{\lambda_r}{\mu_r}$, $\frac{\lambda_{r-1}\mu_r}{\mu_{r-1}\mu_r + \lambda_r}$, etc. ergiebt, $= \frac{Z_r}{N_r}$ gesetzt werden. Alsdann geht, wie in §. 1 der Abhandlung des Verfassers im 66. Bande dieses Journals ausgeführt ist, die in der Einleitung angegebene Entwickelung des Quotienten $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ in nachstehende, ihr identische über:

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{1}{N_1} + \frac{a_1 x}{N_1 N_2} + \frac{a_1 a_2 x^2}{N_2 N_3} + \cdots$$
$$+ \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-2} x^{n-2}}{N_{n-2} N_{n-1}} + \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x^{n-1} f_n}{N_{n-1}(f_{n-1} N_{n-1} - a_{n-1} x f_n N_{n-2})}.$$

Der $(n-1)$te Näherungsbruch des hypergeometrischen Kettenbruches wird aber



dargestellt durch die Reihe:

$$\frac{1}{N_1}+\frac{a_1 x}{N_1 N_2}+\frac{a_1 a_2 x^2}{N_2 N_3}+\cdots+\frac{a_1 a_2\ldots a_{n-2}x^{n-2}}{N_{n-2}N_{n-1}}.$$

Damit also dieser Näherungsbruch in einem solchen endlichen Theile des Gebietes ausserhalb der Strecke auf der Abscissenaxe $x=+1\ldots+\infty$, in welchem kein Punkt liegt, worin der Quotient $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$ unendlich wird, endlich bleibe, sobald n eine gewisse Zahl überschritten hat, und dann gegen die erzeugende Function convergire, ist nothwendig und hinreichend, dass in diesem Bereiche das Restglied in der Entwickelung des Quotienten, nämlich

$$\frac{a_1 a_2\ldots a_{n-1}x^{n-1}f_n}{N_{n-1}(f_{n-1}N_{n-1}-a_{n-1}xf_n N_{n-2})}$$

mit wachsendem n unendlich klein werde.

Die Ausdrücke der N hat Herr *Heine* (B. 57 dieses Journals) angegeben, und zwar haben N_{2m} und N_{2m+1}, die ganze Functionen von x höchstens m^{ten} Grades sind, folgende Formen:

$$\begin{aligned}N_{2m} &= F(\alpha,\beta,\gamma,x)F(1-m-\alpha,-m-\beta,1-2m-\gamma,x)\\ &\quad -a_0 a_1\ldots a_{2m}x^{2m+1}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)F(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m+1,x),\\ N_{2m+1} &= F(\alpha,\beta,\gamma,x)F(-m-\alpha,-m-\beta,-2m-\gamma,x)\\ &\quad -a_0 a_1\ldots a_{2m+1}x^{2m+2}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)F(\alpha+m+1,\beta+m+1,\gamma+2m+2,x),\end{aligned}$$

wo $a_0=\frac{\beta(\gamma-\alpha)}{(\gamma-1)\gamma}$ ist, und a_1, a_2, ... dieselben Grössen sind, die unter dieser Bezeichnung im Kettenbruche vorkommen. Durch die Relation

$$f_{n-1}N_{n-1}-a_{n-1}xf_n N_{n-2} = f_0,$$

die Herr *Heine* daselbst beweist, reducirt sich vorstehendes Restglied auf folgenden Ausdruck:

$$\frac{a_1 a_2\ldots a_{n-1}x^{n-1}f_n}{N_{n-1}\cdot f_0}.$$

Dieser Ausdruck wird jetzt, ebenso wie es bei dem specielleren Kettenbruche in der oben angeführten Abhandlung des Verfassers geschehen ist, transformirt mittelst der Substitution:

$$x=\frac{4z}{(1+z)^2},\quad z=\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}},$$

wo $\sqrt{1-x}$ den Werth 1 für $x=0$ hat. Der Zusammenhang zwischen x und z ist der, dass einem Punkte x ausserhalb der Strecke auf der Abscissenaxe

$x = +1 \cdots +\infty$ ein Punkt z innerhalb des um den Nullpunkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises entspricht und umgekehrt.

Diese Substitution werde also in die Functionen

$$\begin{aligned} f_{2m} &= F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+2m, x), \qquad N_{2m}\ (\alpha, \beta, \gamma, x) \\ f_{2m+1} &= F(\alpha+m, \beta+m+1, \gamma+2m+1, x), \qquad N_{2m+1}(\alpha, \beta, \gamma, x) \end{aligned}$$

eingeführt.

Nun ist bereits in §. 2 No. II der früheren Abhandlung des Verfassers nachgewiesen worden, dass das Product

$$(1+z)^{-2m} F(\alpha+m, \beta+m, \gamma+2m, 4z(1+z)^{-2}),$$

welches für die Werthe des Argumentes z innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 eine eindeutige und stetige Function von z ist, und seine Ableitungen nach z für die genannten Werthe des Argumentes mit wachsendem m gegen die Function

$$(1-z)^{\frac{2\gamma-2\alpha-2\beta-1}{2}} (1+z)^{\frac{2\alpha+2\beta-1}{2}}$$

bezüglich deren Ableitungen convergiren.

Von den Producten

$$\begin{aligned} &(1+z)^{2m} N_{2m}(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2}), \\ &(1+z)^{2m} N_{2m+1}(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2}) \end{aligned}$$

wird jetzt ebenfalls gezeigt werden, dass jedes von beiden mit wachsendem m sich einer endlichen Function von z als Grenze nähert. Dabei kann man sich wegen der Relation, welche zwischen den Nennern der Näherungsbrüche besteht:

$$N_{2m+2} = N_{2m+1} - a_{2m+1} x N_{2m}$$

auf die Ermittelung von $\lim\limits_{m=\infty} (1+z)^{2m} N_{2m}$ beschränken.

§. 2.

$N_{2m}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist eine ganze Function von x höchstens m^{ten} Grades; daher hat $(1+z)^{2m} N_{2m}(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})$ die Form: $1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{2m} z^{2m}$, wo $c_r = c_{2m-r}$ ist. In dem Ausdrucke

$$\begin{aligned} &(1+z)^{2m} N_{2m}(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2}) \\ = {} & F(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})(1+z)^{2m} F(1-m-\alpha, -m-\beta, 1-2m-\gamma, 4z(1+z)^{-2}) \\ & - a_0 a_1 \ldots a_{2m} (4z)^{2m+1} (1+z)^{-2m-2} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, 4z(1+z)^{-2}) \\ & \qquad \times F(\alpha+m, \beta+m+1, \gamma+2m+1, 4z(1+z)^{-2}) \end{aligned}$$

sind aber alle hypergeometrischen Functionen für die Werthe von z innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 eindeutige und stetige Functionen von z und lassen sich daher für diese Werthe des Argumentes durch Potenzreihen von der Form $1+\sum_1^\infty a_r z^r$ darstellen. Daher ist die ganze Function $2m^{\text{ten}}$ Grades von z

$$(1+z)^{2m} N_{2m}(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})$$

gleich dem bis zur $2m^{\text{ten}}$ Potenz von z gehenden Theile der Potenzreihe, die das Product

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})(1+z)^{2m} F(1-m-\alpha, -m-\beta, 1-2m-\gamma, 4z(1+z)^{-2})$$

darstellt. Dieses Product werde durch das ihm identische

$$F(\alpha,\beta,\gamma,4z(1+z)^{-2})(1+z)^{-2\beta}(1+z)^{2(m+\beta)} F(1-m-\alpha, -m-\beta, 1-2m-\gamma, 4z(1+z)^{-2})$$

ersetzt.

Der Modul des allgemeinen Gliedes der Potenzreihe, welche dem Producte $F(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})(1+z)^{-2\beta}$ gleich ist, bleibt, wenn $\text{Mod}(z) = R < 1$ ist, unterhalb einer positiven Grösse G; daher bleiben die Coefficienten dieser Potenzreihe dem Modul nach unterhalb der entsprechenden Coefficienten der Potenzreihe $G.\sum_0^\infty \left(\frac{z}{R}\right)^r$, wo G eine gewisse positive Grösse >1, $R<1$ ist.

Der Ausdruck

$$(1+z)^{2(m+\beta)} F(1-m-\alpha, -m-\beta, 1-2m-\gamma, 4z(1+z)^{-2}),$$

der zur Abkürzung mit $\varphi_{2m}(z)$ bezeichnet werde, genügt aber der Differentialgleichung:

$$z(1-z^2)\frac{d^2\varphi_{2m}(z)}{dz^2} + \{2\beta-\gamma+1+2(2\alpha-\gamma-1)z+(2\beta-\gamma-1)z^2-2(m+\beta)(1-z^2)\}\frac{d\varphi_{2m}(z)}{dz}$$
$$-2(m+\beta)\{2\alpha-\gamma-1+(2\beta-\gamma)z\}\varphi_{2m}(z) = 0,$$

und man erhält, wenn $\varphi_{2m}(z) = \sum_0^\infty a_r z^r$ gesetzt wird, aus dieser Differentialgleichung folgendes Gesetz der Coefficienten:

Von $r=0$ bis ∞:

$$a_{r+2} = \frac{2(\gamma-2\alpha+1)(m-r-1+\beta)}{(r+2)(2m-r-2+\gamma)} a_{r+1} + \frac{(r-2\beta+\gamma)(2m-r+2\beta)}{(r+2)(2m-r-2+\gamma)} a_r,$$

$$\frac{2(\gamma-2\alpha+1)(m+\beta)}{2m-1+\gamma} = a_1, \qquad 1 = a_0.$$

Untersucht man aber die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_m$, so findet sich Folgendes:

Für r lässt sich ein so grosser Werth ϱ bestimmen, dass, sobald m und r die Bedingung $m \gtreqless r \gtreqless \varrho$ erfüllen,

$$\text{Mod.}\left\{\frac{2(\gamma-2\alpha+1)(m-r-1+\beta)}{(r+2)(2m-r-2+\gamma)}\right\} < \text{Mod.}\left\{\frac{2(\gamma-2\alpha+1)(m-1+\beta)}{(r+2)(m-2+\gamma)}\right\} < \varepsilon$$

wird, wo ε eine beliebig klein angenommene positive Grösse ist, und

$$\text{Mod.}\left\{\frac{(r-2\beta+\gamma)(2m-r+2\beta)}{(r+2)(2m-r-2+\gamma)}\right\} < 1+\varepsilon.$$

Da ferner die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_{\varrho+1}$ bei beliebig grossem m dem Modul nach unterhalb einer positiven Constanten A bleiben, so kann man $\text{Mod.}(a_0) < A$, $\text{Mod.}(a_1) < A(1+\varepsilon), \ldots \text{Mod.}(a_{\varrho+1}) < A(1+\varepsilon)^{\varrho+1}$ setzen. Aus dem Vorhergehenden folgt daher, dass für $m > \varrho$ auch $\text{Mod.}(a_{\varrho+2}) < A(1+\varepsilon)^{\varrho+2}, \ldots$ $\text{Mod.}(a_m) < A(1+\varepsilon)^m$ ist. Bildet man jetzt das Product

$$G\sum_0^\infty \left(\frac{z}{R}\right)^r . A\sum_0^\infty (1+\varepsilon)^r z^r = \sum_0^\infty k_r z^r,$$

und vergleicht die Coefficienten mit denen der entsprechenden Potenzen in dem Ausdrucke

$$(1+z)^{2m} N_{2m}(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2}) = 1+c_1 z+c_2 z^2+\cdots+c_{2m} z^{2m},$$

so sieht man, dass für $m > \varrho$ die Coefficienten $1, c_1, c_2, \ldots c_m$ dem Modul nach kleiner als bezüglich $k_0, k_1, k_2, \ldots k_m$ sind. Da aber $c_{2m-r} = c_r$ ist, während die Grössen k beständig wachsen, so haben alle Coefficienten c_r die angegebene Eigenschaft.

Daraus ergiebt sich, dass für ein fixirtes r $\text{Mod.} \lim\limits_{m=\infty} (c_r) \overline{\overline{<}}\, k_r$ sein muss. Die Reihe $\sum\limits_0^\infty k_r z^r$ convergirt innerhalb des Kreises mit dem kleineren der beiden Radien R und $\frac{1}{1+\varepsilon}$, der $= R_1$ sei; innerhalb desselben Kreises convergirt also jedenfalls auch die Reihe $\sum\limits_{r=0}^{r=\infty} \lim\limits_{m=\infty} (c_r) z^r$.

Nimmt man jetzt für r einen beliebig grossen Werth ϱ_1 an, so lässt sich für m ein so grosser Werth μ bestimmen, dass bei $m \overline{\overline{>}}\, \mu$

$$\text{Mod.}\{c_r - \lim_{m=\infty}(c_r)\} < \varepsilon_1$$
$$r = 0 \ldots \varrho_1$$

ist, wo ε_1 eine beliebig klein angenommene positive Grösse bedeutet. Daher ist für $m \overline{\overline{>}}\, \mu > \varrho$ und $\text{Mod.}(z) < R_1$

$$\text{Mod.}\left\{\sum_0^{2m} c_r z^r - \sum_{r=0}^{r=\infty} \lim_{m=\infty}(c_r) z^r\right\} < \varepsilon_1 \sum_0^{\varrho_1} \text{Mod.}(z^r) + 2\sum_{\varrho_1+1}^{\infty} k_r \text{Mod.}(z^r).$$

Da aber ϱ_1 beliebig gross und ε_1 beliebig klein angenommen werden konnte, so sieht man aus dieser Ungleichung, dass für $\text{Mod.}(z) < R_1$ die Function $\sum\limits_0^{2m} c_r z_r$ mit wachsendem m gegen die Function $\sum\limits_{r=0}^{r=\infty} \lim\limits_{m=\infty} (c_r) z^r$ convergirt. Ebenso con-

vergiren die Ableitungen von $\sum_0^{2m} c_r z^r$ nach z gegen die entsprechenden von $\sum_{r=0}^{r=\infty} \lim_{m=\infty}(c_r)z^r$. Da aber R_1 beliebig nahe an 1 gebracht werden kann, so hat die Function $\sum_0^{2m} c_r z^r$ mit ihren Ableitungen die angegebene Eigenschaft innerhalb des ganzen Kreises mit dem Radius 1.

Um nun die Form der Grenzfunction zu bestimmen, gehe man zu dem Ausdrucke

$$\begin{aligned}(1+z)^{2m} N_{2m}(\alpha,\beta,\gamma,4z(1+z)^{-2}) \\ = F(\alpha,\beta,\gamma,4z(1+z)^{-2})(1+z)^{2m}F(1-m-\alpha,-m-\beta,1-2m-\gamma,4z(1+z)^{-2}) \\ -a_0a_1\ldots a_{2m}(4z)^{2m+1}(1+z)^{-2m-2}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,4z(1+z)^{-2}) \\ \times F(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m+1,4z(1+z)^{-2})\end{aligned}$$

zurück. Die linke Seite dieser Gleichung convergirt, wie bewiesen, mit wachsendem m gegen eine endliche Function von z und zwar für beliebige Werthe der Grössen α, β, γ (wobei γ natürlich nicht den Werth Null oder den einer negativen ganzen Zahl erhält, in welchen Fällen α oder β eben solche und absolut genommen nicht grössere Werthe erhalten müssten, und daher ausser dem schon früher behandelten Kettenbruche von $F(\alpha,1,1,x)$ höchstens endliche Kettenbrüche in der oben angegebenen Entwickelungsform enthalten sein können). Man nehme nun auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung in den einzelnen hypergeometrischen Functionen zunächst die positiven ganzzahligen Werthe von γ aus. Da nach §. 1

$$\begin{aligned}\lim_{m=\infty}\{(1+z)^{-2m-2}F(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m+1,4z(1+z)^{-2})\} \\ = (1-z)^{\frac{2\gamma-2\alpha-2\beta-1}{2}}(1+z)^{\frac{2\alpha+2\beta-3}{2}}\end{aligned}$$

und ferner $\lim_{m=\infty}\{a_0a_1\ldots a_{2m}(4z)^{2m+1}\} = 0$ ist, weil die Reihe $\sum_0^{\infty} a_0a_1\ldots a_r(4z)^{r+1}$ für $\lim_{r=\infty}\text{Mod.}(a_r 4z) = \text{Mod.}(z) < 1$ convergirt; so ist

$$\begin{aligned}\lim_{m=\infty}\{a_0a_1\ldots a_{2m}(4z)^{2m+1}(1+z)^{-2m-2}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,4z(1+z)^{-2}) \\ \times F(\alpha+m,\beta+m+1,\gamma+2m+1,4z(1+z)^{-2})\} = 0.\end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$F(\alpha,\beta,\gamma,4z(1+z)^{-2})(1+z)^{2m}F(1-m-\alpha,-m-\beta,1-2m-\gamma,4z(1+z)^{-2})$$

convergirt daher mit wachsendem m gegen die gesuchte Grenzfunction; ebenso seine Ableitungen nach z gegen die entsprechenden dieser Function. Betrachtet man jetzt ein solches Gebiet in dem Kreise mit dem Radius 1,

in welchem keiner der Punkte liegt, worin $F(\alpha,\beta,\gamma,4z(1+z)^{-2})$ verschwindet, so sieht man aus dem Vorhergehenden, dass in diesem Gebiete der Ausdruck $(1+z)^{2m}F(1-m-\alpha,-m-\beta,1-2m-\gamma,4z(1+z)^{-2})$ und seine Ableitungen ebenfalls gegen endliche Functionen von z convergiren müssen. Dasselbe findet also bei der Function

$$(1+z)^{2(m+\beta)}F(1-m-\alpha,-m-\beta,1-2m-\gamma,4z(1+z)^{-2}) = \varphi_{2m}(z)$$

statt. Bringt man aber die oben angegebene Differentialgleichung von $\varphi_{2m}(z)$ auf die Form

$$\frac{d\varphi_{2m}(z)}{dz}+\frac{2\alpha-\gamma-1+(2\beta-\gamma)z}{1-z^2}\varphi_{2m}(z)+\frac{1}{2(m+\beta)}\chi_{2m}(z) = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$\chi_{2m}(z) = -\frac{z(1-z^2)\dfrac{d^2\varphi_{2m}(z)}{dz^2}+\{2\beta-\gamma+1+2(2\alpha-\gamma-1)z+(2\beta-\gamma-1)z^2\}\dfrac{d\varphi_{2m}(z)}{dz}}{1-z^2}$$

gesetzt ist, so erhält man durch Integration

$$\varphi_{2m}(z) = e^{-\int_0^z\frac{2\alpha-\gamma-1+(2\beta-\gamma)z}{1-z^2}dz}\left\{1-\frac{1}{2(m+\beta)}\int_0^z\chi_{2m}(z)e^{\int_0^z\frac{2\alpha-\gamma-1+(2\beta-\gamma)z}{1-z^2}dz}.dz\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass in dem betrachteten Gebiete

$$\lim_{m=\infty}.\varphi_{2m}(z) = e^{-\int_0^z\frac{2\alpha-\gamma-1+(2\beta-\gamma)z}{1-z^2}dz} = (1-z)^{\frac{2\alpha+2\beta-2\gamma-1}{2}}(1+z)^{\frac{1-2\alpha+2\beta}{2}}$$

ist. Da nun bereits feststeht, dass der Ausdruck

$$F(\alpha,\beta,\gamma,4z(1+z)^{-2})(1+z)^{2m}F(1-m-\alpha,-m-\beta,1-2m-\gamma,4z(1+z)^{-2})$$

überall innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 gegen eine bestimmte Grenzfunction convergirt, so muss diese gleich

$$F(\alpha,\beta,\gamma,4z(1+z)^{-2})(1-z)^{\frac{2\alpha+2\beta-2\gamma-1}{2}}(1+z)^{\frac{1-2\alpha-2\beta}{2}}$$

sein. Damit ist also für alle Werthe von α, β, γ mit Ausnahme der positiven ganzzahligen Werthe von γ bewiesen, dass

$$\sum_{r=0}^{r=\infty}\lim_{m=\infty}.(c_r)z^r = F(\alpha,\beta,\gamma,4z(1+z)^{-2})(1-z)^{\frac{2\alpha+2\beta-2\gamma-1}{2}}(1+z)^{\frac{1-2\alpha-2\beta}{2}}$$

ist. Wegen der Stetigkeit der Coefficienten der Potenzreihen, die beide Seiten darstellen, in Bezug auf die Grössen α, β, γ gilt aber die vorstehende Gleichung für alle Werthe dieser Grössen.

Die Function $(1+z)^{2m} N_{2m}(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})$ und ihre Ableitungen nach z convergiren also mit wachsendem m gegen die Function

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})(1-z)^{\frac{2\alpha+2\beta-2\gamma-1}{2}}(1+z)^{\frac{1-2\alpha-2\beta}{2}}$$

bezüglich deren Ableitungen.

Ebenso hat die Function $(1+z)^{2m} N_{2m+1}(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})$ gemäss der Relation $N_{2m+2} = N_{2m+1} - a_{2m+1} x N_{2m}$ zur Grenzfunction

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})(1-z)^{\frac{2\alpha+2\beta-2\gamma-1}{2}}(1+z)^{\frac{-1-2\alpha-2\beta}{2}}.$$

§. 3.

Kehrt man jetzt, nachdem die Grenzfunctionen, auf die in §. 1 hingewiesen wurde, bestimmt sind, zu den dortigen Betrachtungen zurück und transformirt den Ausdruck $\frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1} x^{n-1} f_n}{N_{n-1} \cdot f_0}$ durch Einführung von $x = 4z(1+z)^{-2}$, so erhält man

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} (4z)^{n-1} \cdot \frac{(1+z)^{-2n+2} f_n(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})}{N_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2}) \cdot f_0(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})}.$$

Die Function $\frac{(1+z)^{-2n+2} f_n}{N_{n-1} \cdot f_0}$ convergirt nach §. 1 und §. 2 mit wachsendem n gegen $\left\{ \frac{(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}(1+z)^{\alpha+\beta}}{F(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})} \right\}^2$.

Dieser Ausdruck bleibt endlich mit Ausnahme derjenigen Punkte, worin $F(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})$ verschwindet. $\lim_{n=\infty} a_1 a_2 \dots a_{n-1} (4z)^{n-1} = 0$, wie in §. 2 gezeigt worden ist, also convergirt der Ausdruck $a_1 a_2 \dots a_{n-1} (4z)^{n-1} \frac{(1+z)^{-2n+2} f_n}{N_{n-1} \cdot f_0}$ innerhalb des Kreises mit dem Radius 1 mit Ausschluss derjenigen Punkte, worin $F(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})$ verschwindet, gegen Null. In diesen Punkten, wo $F(\alpha, \beta, \gamma, 4z(1+z)^{-2})$ oder $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ verschwindet, verschwindet aber $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$ nicht, vorausgesetzt, dass nicht eine der Grössen a_r in dem Kettenbruche verschwindet und dieser daher ein endlicher ist; weil sonst nach der Relation $f_r = f_{r+1} - a_{r+1} x f_{r+2}$ sämmtliche Grössen f_r in demselben Punkte verschwinden müssten, was gemäss dem in §. 1 angegebenen Grenzausdrucke von f_r für $r = \infty$ nicht der Fall ist. Daher wird in diesen Punkten der Quotient $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ unendlich.

Das Resultat ist mithin, wie in der Einleitung ausgesprochen, dieses: der Näherungswerth des hypergeometrischen Kettenbruchs convergirt bei beliebigen Werthen der Grössen α, β, γ in dem ganzen Gebiete ausserhalb der

Strecke auf der Abscissenaxe $x = +1 \dots +\infty$ mit Ausschluss derjenigen Punkte, worin der Quotient $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ unendlich wird, gegen diesen Quotienten.

Ueber das Verhalten der Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ in der Umgebung des Punktes $x = 1$ giebt die Formel von Herrn *Kummer* (Band 15 dieses Journals) Aufschluss, welche diese Function durch die particulären Integrale der linearen Differentialgleichung, die von $(1-x)$ abhängen, ausdrückt:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$
$$= A F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x) + B(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x)$$
$$A = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}, \qquad B = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)},$$

wo

$$\Pi(x) = \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1.2.3 \dots n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} n^x \right\},$$

welche Formel gilt, solange $\gamma-\alpha-\beta$ keine ganze Zahl ist. Wendet man diese Formel auf den Quotienten $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ an, wofern $\gamma-\alpha-\beta$ nicht ganzzahlig ist, so findet man leicht, dass, wenn keine der Grössen α, $\gamma-\beta$, $\beta+1$, $\gamma-\alpha+1$ der Null oder einer negativen ganzen Zahl gleich ist, in welchen Fällen der Kettenbruch ein endlicher wäre, der Quotient den Punkt $x = 1$ zum Verzweigungspunkte hat und ausserdem, wenn die Grössen α, β, γ reell sind, auf der Strecke der Abscissenaxe $x = +1 \dots +\infty$ imaginär wird. In letzterem Falle kann daher die Kettenbruchentwickelung, die auf dieser Strecke aus reellen Elementen besteht, keinen der beiden Zweige darstellen.

Die in §. 1 angegebene Reihe, welche den Kettenbruch identisch ersetzt, lässt sich in den einzelnen Gliedern differentiiren und stellt alsdann die Ableitungen der ursprünglichen Function dar, was auf dieselbe Weise, wie bei dem specielleren Kettenbruche, den der Verfasser im 66. Bande dieses Journals behandelt hat, gezeigt wird.

Es soll jetzt an einigen Beispielen nachgewiesen werden, dass es in der That Quotienten $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ mit unendlich fortschreitendem Kettenbruche giebt, die in Punkten des Gebietes ausserhalb der Strecke auf der Abscissenaxe $x = +1 \dots +\infty$ unendlich werden.

Zu dem angegebenen Zwecke betrachte man folgende aus dem Binomium $(1-x)^\mu = F(-\mu, 1, 1, x)$ entspringende, hypergeometrische Functionen

$$1-(1-x)^\mu = \mu x F(1-\mu, 1, 2, x),$$

$$(1+x)^\mu \left\{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\mu\right\} = 2\mu x F\left(-\frac{\mu-1}{2}, -\frac{\mu-2}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

$$(1+x)^\mu \left\{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\mu\right\} = 2F\left(-\frac{\mu}{2}, -\frac{\mu-1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right).$$

Es werde μ reell und von einer ganzen Zahl verschieden angenommen. Führt man alsdann die Functionen $F(1-\mu, 1, 2, x)$, $F\left(-\frac{\mu-1}{2}, -\frac{\mu-2}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right)$, $F\left(-\frac{\mu}{2}, -\frac{\mu-1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right)$ als Nenner in den Quotienten $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ ein, so erhält man aus diesem unendlich fortschreitende Kettenbrüche. In der ersten Function bleibt für x die Strecke auf der Abscissenaxe $x = +1 \dots +\infty$ ausgeschlossen, in der zweiten und dritten die Strecken $x = -\infty \dots -1$ und $+1 \dots +\infty$. Wird daher $1-(1-x)^\mu = 1-e^{\mu \log u}$, $1 \mp \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\mu = 1 \mp e^{\mu \log v}$ gesetzt, so bleibt für u und v die Strecke $-\infty \dots 0$ ausgeschlossen und die Logarithmen nehmen den Werth Null für u und $v = 1$ an. Damit nun $1-e^{\mu \log u}$ und $1+e^{\mu \log v}$ in dem betrachteten Gebiete von u und v verschwinden, muss $\log u = \frac{2m}{\mu} \pi i$ und $\log v = \frac{2n+1}{\mu} \pi i$ sein, wo m und n näher zu bestimmende ganze Zahlen sind. Da aber, wenn $x = e^{\vartheta i}$ gesetzt und ϑ innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ genommen wird, $\log x$ mit dem Anfangswerthe Null für $x = 1$ gleich ϑi wird, so müssen m, n und μ die Bedingungen $-1 < \frac{2m}{\mu} < 1$ und $-1 < \frac{2n+1}{\mu} < 1$ erfüllen. Sind aber diese Bedingungen erfüllt, und wird $u = e^{\frac{2m}{\mu}\pi i}$, $v = e^{\frac{2n+1}{\mu}\pi i}$ gesetzt, so verschwinden $1-e^{\mu \log u}$ und $1+e^{\mu \log v}$. Wird nun noch für m der Werth Null ausgeschlossen, damit in $1-x = e^{\frac{2m}{\mu}\pi i}$ und $\frac{1-x}{1+x} = e^{\frac{2m}{\mu}\pi i}$ x nicht verschwinde, so sind die aus den Gleichungen $1-x = e^{\frac{2m}{\mu}\pi i}$, $\frac{1-x}{1+x} = e^{\frac{2m}{\mu}\pi i}$, $\frac{1-x}{1+x} = e^{\frac{2n+1}{\mu}\pi i}$ sich ergebenden Werthe von x solche, welche, beziehlich in die angeführten, hypergeometrischen Functionen eingesetzt, diese innerhalb des jeder zugehörigen Gebietes verschwinden machen. Für dieselben Werthe von x kann, wie oben nachgewiesen, der Zähler des Quotienten $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ nicht verschwinden; für diese Werthe wird daher der Quotient unendlich.

Berlin, im Mai 1867.

Ueber die Entwickelung beliebig gegebener Functionen nach den *Bessel*schen Functionen.

(Von Herrn *Carl Neumann* in Tübingen.)

Wie man die von *Cauchy* aufgestellte Formel

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)dz}{z-z_1}$$

mit Vortheil verwenden kann zur Begründung von Entwickelungen nach steigenden oder fallenden *Potenzen*, ist bekannt. (Vgl. die Théorie des fonctions doublement périodiques, par *Briot* et *Bouquet*, pag. 20—34.) Dass man durch dieselbe Methode auch zu Entwickelungen gelangen kann, welche fortschreiten nach den *Kugelfunctionen* erster oder zweiter Art, dürfte gleichfalls bekannt sein. (Vergl. meine kleine Schrift über die Entwickelung einer Function mit imaginärem Argument nach den Kugelfunctionen erster und zweiter Art. Halle. 1862.)

Neu aber wird es sein, dass man jene Formel auch benutzen kann zur Auffindung und näheren Begründung von Entwickelungen, welche fortschreiten nach den *Bessel*schen *Functionen* J^n, oder auch nach *gewissen neugebildeten Functionen* O^n. In Betreff dieser O^n ist zu bemerken, dass sie zu den J^n in ganz ähnlicher Beziehung stehen, wie die Kugelfunctionen zweiter Art zu denen erster Art, d. i. wie die Q^n zu den P^n.

Die *Bessel*sche Function $J^n(z)$ wird bekanntlich definirt durch die *stets convergente Reihe:*

$$J^n(z) = \frac{z^n}{2^n\Pi n}\left(1-\frac{z^2}{2.2n+2}+\frac{z^4}{2.4.2n+2.2n+4}-\cdots\right),$$

wo $\Pi n = 1.2.3\ldots n$ (und demgemäss $\Pi 0 = 1$) ist.

Die von mir eingeführte neue Function $O^n(z)$ ist eine *ganze rationale Function von* $\frac{1}{z}$ *vom* $(n+1)^{ten}$ *Grade, welche verschwindet für* $z=\infty$, also eine Function von folgendem Charakter:

$$O^n(z) = \frac{A}{z^{n+1}}+\frac{B}{z^n}+\frac{C}{z^{n-1}}+\cdots+\frac{G}{z^2}+\frac{H}{z}.$$

Die Constanten $A, B, C, \ldots G, H$ sind alternirend $=0$; so dass die Function

$O^n(z)$, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder ein Aggregat von lauter ungeraden oder ein Aggregat von lauter geraden Potenzen ist.

Versteht man unter ε_n eine Constante, welche für $n=0$ den Werth 1, für $n>0$ den Werth 2 hat, so dient als Definition von $O^n(z)$ die Formel:

$$\varepsilon_n O^n(z) = \frac{2^n \Pi n}{z^{n+1}}\left(1+\frac{z^2}{2.2n-2}+\frac{z^4}{2.4.2n-2.2n-4}+\cdots\right),$$

wo der Ausdruck rechts bei einem gewissen Gliede *abzubrechen ist*, nämlich nur diejenigen Glieder umfassen soll, welche verträglich sind mit dem der Function $O^n(z)$ beigelegtem Charakter. (Das *letzte* Glied innerhalb der Parenthese enthält also die n^{te} Potenz oder die $(n-1)^{te}$ Potenz von z, je nachdem n gerade oder ungerade ist.)

So ist, um einige Beispiele anzuführen:

$$O^0(z) = \frac{1}{z},$$

$$O^2(z) = \frac{1}{z}+\frac{4}{z^3},$$

$$O^4(z) = \frac{1}{z}+\frac{16}{z^3}+\frac{192}{z^5},$$

. . . .

und andererseits:

$$O^1(z) = \frac{1}{z^2},$$

$$O^3(z) = \frac{3}{z^2}+\frac{24}{z^4},$$

$$O^5(z) = \frac{5}{z^2}+\frac{120}{z^4}+\frac{1920}{z^6},$$

. . . .

Ebenso wie $J^n(z)$ repräsentirt wird durch das von *Bessel* angegebene Integral

$$J^n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\omega - n\omega)\,d\omega,$$

ebenso kann auch $O^n(z)$ durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden. Es ist nämlich:

$$O^n(z) = \int_0^\infty \frac{(\omega+\sqrt{\omega^2+z^2})^n+(\omega-\sqrt{\omega^2+z^2})^n}{2z^{n+1}}e^{-\omega}\,d\omega.$$

Die hauptsächlichen Resultate meiner in Betreff der Functionen J und O angestellten Untersuchungen sind folgende.

1. Für jedes beliebige n (ausgenommen $n=0$) ist:

$$2\frac{\partial J^n(z)}{\partial z} = J^{n-1}(z) - J^{n+1}(z),$$

$$2\frac{\partial O^n(z)}{\partial z} = O^{n-1}(z) - O^{n+1}(z).$$

Auf den Fall $n = 0$ sind diese Formeln schon desshalb nicht anwendbar, weil $J^{-1}(z)$ und $O^{-1}(z)$ ohne Definition geblieben sind. Diese Lücke findet ihre Ausfüllung durch die Formeln:

$$\frac{\partial J^0(z)}{\partial z} = -J^1(z),$$

$$\frac{\partial O^0(z)}{\partial z} = -O^1(z).$$

Mit Rücksicht auf die J waren diese Formeln schon von *Bessel* aufgestellt.

2. Versteht man unter $\int$ eine auf der z Ebene in geschlossener Bahn und in *positiver* Richtung herumlaufende Integration, so gelten die Formeln:

$$\int J^m(z) J^n(z) dz = 0,$$

$$\int O^m(z) O^n(z) dz = 0,$$

$$\int J^m(z) O^n(z) dz = k,$$

wo m, n beliebige (gleiche oder verschiedene) Zahlen sind.

Wenn das von der Integrationscurve umgrenzte Gebiet den Punkt 0 *nicht* enthält, so ist jederzeit

$$k = 0.$$

Enthält aber dieses Gebiet den Punkt 0 in sich, so ist

$$k = \frac{2\pi i}{\varepsilon_n}, \quad \text{oder} \quad = 0,$$

jenachdem die Zahlen m, n gleich oder verschieden sind.

Unter dem Punkte 0 ist hier der Anfangspunkt des in der z Ebene festgesetzten Coordinatensystems, und unter ε_n die schon früher angegebene Constante zu verstehen.

3. Sind z und z_1 complexe, der Bedingung $\mathrm{mod.}\, z < \mathrm{mod.}\, z_1$ unterworfene Variable, so lässt sich der Bruch $\frac{1}{z_1 - z}$ mit Benutzung der Functionen J, O in folgende Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{z_1 - z} = \sum_0^\infty \varepsilon_n J^n(z) O^n(z_1).$$

Diese Entwickelung bleibt *convergent und gültig*, so lange die angegebene Bedingung mod. $z <$ mod. z_1 erfüllt ist.

4. Jede Function $f(z)$, welche innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt 0 eindeutig und stetig ist, kann (und nur auf einerlei Art) entwickelt werden in eine nach den $J^n(z)$ fortschreitende Reihe:

$$f(z) = \alpha_0 J^0(z) + \alpha_1 J^1(z) + \alpha_2 J^2(z) + \cdots,$$

welche *convergent und gültig* bleibt für alle Punkte innerhalb des Kreises.

5. Jede Function $f(z)$, welche eindeutig und stetig ist auf der von zwei concentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkt 0 begrenzten ringförmigen Fläche, kann (und nur auf einerlei Art) entwickelt werden in eine nach den $J^n(z)$ und $O^n(z)$ fortschreitende Doppelreihe:

$$\begin{aligned} f(z) = {} & \alpha_0 J^0(z) + \alpha_1 J^1(z) + \alpha_2 J^2(z) + \cdots \\ & + \beta_0 O^0(z) + \beta_1 O^1(z) + \beta_2 O^2(z) + \cdots, \end{aligned}$$

welche *convergent und gültig* bleibt für alle Punkte jener ringförmigen Fläche.

6. Die constanten Coefficienten α und α, β in den Entwickelungen 4. und 5. können unmittelbar berechnet werden durch Anwendung der Integral-Eigenschaften in 2.

7. Die Entwickelungen in 3., 4., 5. erleiden durch (beliebig oft wiederholtes) Differentiiren nach den Variablen z, z_1 keinerlei Beeinträchtigung hinsichtlich ihres Convergenz- und Gültigkeits-Gebietes.

8. Die *eine* particuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + F = 0$$

ist bekanntlich

$$F = J^0(z).$$

Ihre *andere* particuläre Lösung wird nicht etwa durch die Function $O^0(z)$, sondern durch folgende Reihe repräsentirt:

$$F = J^0(z).\log z + 2[J^2(z) - \tfrac{1}{2}J^4(z) + \tfrac{1}{3}J^6(z) - \tfrac{1}{4}J^8(z) + \cdots].$$

Sie besteht also aus zwei Theilen, von welchen der erstere im Punkte 0 logarithmisch unendlich wird, während der andere (dargestellt durch eine stets convergente Reihe) eindeutig und stetig bleibt für sämmtliche Punkte der z Ebene.

9. Die Function $J^n(z)$ genügt bekanntlich der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)F = 0.$$

Eine Differentialgleichung, welcher die Function $O^n(z)$ Genüge leistet, ist folgende:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{3}{z}\frac{\partial F}{\partial z}\left(1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right)F = g_n,$$

wo g_n gleich $\frac{1}{z}$ ist für jedes gerade n, hingegen gleich $\frac{n}{z^2}$ ist für jedes ungerade n.

Tübingen, 28. März 1867.

Die Untersuchungen, deren Resultate ich hier in Kürze mitgetheilt habe, sind inzwischen von mir in ausführlicher Weise dargelegt worden in einer separat erschienenen Schrift: „Theorie der *Bessel*schen Functionen". Leipzig. 1867.

Friedrichroda, 21. August 1867.

Mittheilung über Kettenbrüche.

(Von Herrn *E. Heine* zu Halle.)

(Auszug aus dem Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)

§. 1. Die Untersuchungen, welche ich hier mittheile, beziehen sich auf den Kettenbruch, in welchen sich

$$\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) \frac{dz}{x-z}$$

verwandeln lässt, wenn α und β reelle oder imaginäre Constante bezeichnen, $f(z)$ irgend eine Function von z ist, welche σ einen bestimmten endlichen Werth ertheilt, und wenn die Integration auf einem gegebenen Wege erfolgt. Sind α und β reell, so denken wir uns auch den Weg reell.

Es handelt sich hier also um sehr allgemeine Functionen σ; integrirt man z. B. über eine sogenannte Peripherie um x, so verwandelt sich σ unter den bekannten Bedingungen in $-2\pi i f(x)$.

Schon in früheren Arbeiten habe ich ein besonderes Gewicht auf die Näherungsnenner gelegt, und sie z. B. im 32sten Bande, p. 209 dieses Journals benutzt, um den Kettenbruch selbst zu finden; es liefern nämlich die bekannten recurrirenden Formeln, welche je drei aufeinander folgende Näherungsnenner verbinden, sofort die Partial-Zähler und Nenner des Kettenbruchs.

Im Folgenden gebe ich die Näherungsnenner des Kettenbruchs für σ an, und zwar wird ein solcher Nenner, wenn er vom n^{ten} Grade ist, durch ein $n$faches Integral ausgedrückt; aus demselben findet sich durch je eine Integration der Näherungszähler und der Rest, d. h. die mit dem Näherungsnenner multiplicirte Differenz zwischen σ und dem Näherungsbruche.

Es werden sodann einige Eigenschaften der Näherungsnenner von σ angegeben, und u. a. findet sich eine Beziehung zu einer Reihenentwickelung, die in einem speciellen Falle, welchen ich näher untersuchte, in dem nämlich $f(x)$ gleich 1 dividirt durch die Quadratwurzel aus einer ganzen Function von x ist, eine Analogie mit der Entwickelung in trigonometrische Reihen darbietet. Zugleich zeigt sich, dass in diesem Falle die Näherungsnenner von σ zu jenen ganzen Functionen gehören, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, über welche ich in einer früheren Mittheilung vom

7. Januar 1864 berichtete. Der Rest tritt als eine zweite Lösung derselben Differentialgleichung auf. Unten gebe ich die Resultate an, wenn die erwähnte Quadratwurzel aus einer ganzen Function vom dritten Grade gezogen wird.

§. 2. In der Analysis haben solche Gesetze für Entwickelungen die grösste Bedeutung, nach welchen die Entwickelung nur auf eine Weise erfolgen kann. So stellt man ein Gesetz auf, um eine reelle Zahlgrösse σ auf völlig bestimmte Art in einen Kettenbruch zu verwandeln, dessen Partial-Zähler sämmtlich 1, dessen Partial-Nenner positive ganze Zahlen sind. Um in ähnlicher Weise eine Function von x — sie heisse σ — zu entwickeln, kann man zwei verschiedene Gesetze aufstellen, von denen das eine Kettenbrüche solcher σ liefert, welche sich nach ganzen absteigenden Potenzen von x ordnen lassen, das andre auf Reihen anwendbar ist, welche nach ganzen Potenzen einer Grösse x oder $x-c$ aufsteigen.

Im ersten Falle setzt man

$$\sigma = G_0 + \frac{1}{\sigma_1}; \quad \sigma_1 = G_1 + \frac{1}{\sigma_2}; \quad \text{etc.}$$

wenn G_0, G_1, etc. ganze Functionen von x bezeichnen, und σ_1, σ_2, etc. für $x = \infty$ selbst unendlich werden *). Dieses Gesetz giebt offenbar einen ganz bestimmten Kettenbruch für σ, und G_1, G_2, etc. sind mindestens vom ersten Grade. Man beweist bekanntlich leicht den Satz: Sind irgend welche ganze Functionen G_0, G_1, G_2, etc. $G_{\nu-1}$ gegeben, und man fügt ihnen eine solche Grösse σ_ν hinzu, dass der aus den Partial-Zählern 1 und den Partial-Nennern G_0, G_1, G_2, etc. $G_{\nu-1}$, σ_ν gebildete Kettenbruch gleich σ wird, so ist dies immer die Entwickelung von σ, welche man nach obigem Gesetze erhält, sobald nur für $x = \infty$ auch $\sigma_\nu = \infty$.

Ist gleich das Folgende so gefasst, dass es sich ausschliesslich auf diese Art von Kettenbrüchen bezieht, so kann es doch sofort auch auf solche übertragen werden, welche nach aufsteigenden Potenzen von $x-c$ geordneten Reihen entsprechen. Man erhält solche Kettenbrüche indem man setzt

$$\sigma = k_0 + \frac{(x-c)^{g_0}}{\sigma_1}; \quad \sigma_1 = k_1 + \frac{(x-c)^{g_1}}{\sigma_1}; \quad \text{etc.}$$

*) Des bequemern Ausdrucks wegen soll der Fall eines rationalen σ, also eines abbrechenden Kettenbruchs überall ausgeschlossen werden. Um diesen Fall zu umfassen müsste man die obige Bedingung für σ_1, σ_2, etc. durch die im allgemeinen mit ihr übereinstimmende ersetzen, dass $\frac{1}{\sigma_1}$, $\frac{1}{\sigma_2}$, etc. für $x = \infty$ verschwinden.

und unter k_0, k_1, etc. Constante versteht, von denen nur k_0 Null sein kann, unter g_0, g_1, etc. positive ganze Zahlen, unter σ_1, σ_2, etc. Functionen von x, die sich für $x=c$ in eine von Null verschiedene Constante verwandeln.

Der Coefficient der höchsten Potenz von x in jedem Näherungsnenner ist zwar vollkommen bestimmt, doch für das Folgende ohne Wichtigkeit. Es soll deshalb Näherungsnenner schlechtweg auch das Product des wahren Nenners in eine willkürlich gewählte Constante heissen. Zähler und Rest sind dann der wahre Zähler und Rest mit der gleichen Constante multiplicirt. Die Bestimmung der erwähnten Constante bietet nicht die mindeste Schwierigkeit dar.

§. 3. Die Function, welche in einen Kettenbruch entwickelt werden soll, sei gegeben und wie im §. 1.

$$\sigma = \int_\alpha^\beta f(s)\frac{ds}{x-s},$$

so dass G_0 gleich Null wird. Es mögen die unbekannten Partial-Nenner G_1, G_2, etc. vom Grade g_1, g_2, etc. sein. Zähler, Nenner und Rest des ν^{ten} Näherungsbruches heissen Z_ν, N_ν, R_ν, denen zuweilen noch das Argument, also hier x, hinzugefügt wird. Die Zählung ist so zu verstehen, dass

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{G_1}$$

gesetzt wird. Z, N und R sind durch die bekannte Gleichung

$$(1.)\qquad N_\nu.\sigma - Z_\nu = R_\nu$$

verbunden. Der Grad von N_ν sei n, so dass

$$n = g_1+g_2+\cdots+g_\nu$$

also n nur dann ν ist, wenn der Kettenbruch durchaus regelmässig wird, d. h. wenn alle Partial-Nenner vom ersten Grade sind; in allen übrigen Fällen hat man $n>\nu$.

Man weiss, dass die nach fallenden Potenzen von x geordnete Function R_ν mit der $-(n+g_{\nu+1})^{\text{ten}}$ Potenz von x beginnt, und dass dieser Umstand ein System von linearen Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten von N_ν liefert. Durch ihre Auflösung finde ich folgendes Resultat:

Sind x_1, x_2, etc. x_n Veränderliche, nach welchen von α bis β integrirt wird, setzt man ferner

$$\psi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

und bezeichnet die Discriminante von $\psi(x)$, also das Quadrat der Producte der Differenzen aus je zwei von den Grössen x_1, x_2, etc. x_n durch Δ, so wird der ν^{te} Näherungsnenner durch das nfache, der Näherungszähler und Rest aber durch das einfache Integral ausgedrückt

$$(2.)\qquad N_\nu = \int_\alpha^\beta \psi(x) f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \Delta\, dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

$$Z_\nu = \int_\alpha^\beta \frac{N_\nu(x) - N_\nu(z)}{x-z} f(z)\, dz,$$

$$R_\nu = \int_\alpha^\beta N_\nu(z) f(z) \frac{dz}{x-z}.$$

§. 4. Es könnte so scheinen, als ob diese Formeln noch nicht zur Bestimmung der N bei gegebenem f ausreichen, indem die Anwendung der Formel (2.) verlangt, dass man den Grad des Nenners N_ν im Voraus kennt. *Es lässt sich aber beweisen, dass immer und nur dann ein Nenner n^{ten} Grades existirt, wenn der Coefficient der höchsten Potenz von x in (2.), d. h. wenn*

$$(3.)\qquad \int_\alpha^\beta f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \Delta\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

nicht verschwindet. Man wird daher aus (2.) dennoch alle Nenner N_1, N_2, etc. erhalten, indem man für n successive sämmtliche positive ganze Zahlen setzt, für welche (3.) nicht verschwindet.

Der Gang des Beweises ist folgender: Da man den Kettenbruch und speciell $g_{\nu+1}$, den Grad des $\nu+1^{\text{ten}}$ Partial-Nenners, noch nicht kennt, so kann man nur sicher sein, dass jeder Nenner N vom n^{ten} Grade die Eigenschaft besitzt, im Producte $N.\sigma$ die negativen Potenzen bis zur $-n^{\text{ten}}$ incl. fortfallen zu lassen; die Lücke, welche dadurch entsteht, dass man über die zunächst folgenden Potenzen im Ungewissen bleibt, lässt sich jedoch ausfüllen, wenn man als zweite Eigenschaft ins Auge fasst, dass N und Z keinen Theiler gemein haben. Diese beiden Eigenschaften sind, wie sich leicht zeigen lässt, bestimmend, d. h. jede ganze Function n^{ten} Grades N, welche die Eigenschaften besitzt, *erstens*, dass im Producte $N.\sigma$ die negativen Potenzen bis zur $-n^{\text{ten}}$ incl. fortfallen, *zweitens*, dass die ganze Function Z, welche die nicht negativen Potenzen im Producte $N.\sigma$ enthält, mit N keinen Theiler gemein hat, ist ein und daher der Näherungsnenner n^{ten} Grades von σ.

Dies vorausgesetzt stelle ich der Reihe nach folgende drei Punkte fest: 1) Existirt ein Nenner N vom n^{ten} Grade, so ist eine ganze Function n^{ten} Grades, also dieser Nenner, durch die erste Bedingung allein schon vollständig

(d. h. bis auf einen constanten Factor) bestimmt. 2) Ist umgekehrt eine ganze Function als Function n^{ten} Grades durch die erste Bedingung schon vollständig bestimmt, so genügt sie von selbst der zweiten, ist also ein Nenner n^{ten} Grades. 3) Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass durch die erste Eigenschaft allein eine ganze Function n^{ten} Grades N vollständig bestimmt sei, besteht darin, dass (3.) nicht verschwindet.

Um den ersten Punkt festzustellen bezeichne N oder $N(x)$ den Nenner n^{ten} Grades, dessen Existenz vorausgesetzt wird, der also beiden Bedingungen genügt, und daher die einzige ganze Function n^{ten} Grades ist, die beiden genügt; ferner sei $N^1(x)$ eine davon verschiedene Function n^{ten} Grades, wenn es solche giebt, die der ersten Bedingung allein genügt. Es mögen Z und Z^1 den Buchstaben N und N^1 entsprechen. Dann wird für jeden von Null verschiedenen Werth der willkürlichen Constante λ auch $\lambda N+N^1$ mit $\lambda Z+Z^1$ einen Theiler, also auch einen Theiler ersten Grades $x-\alpha$ gemein haben. Da $N(\alpha)$ nach der Voraussetzung nicht mit $Z(\alpha)$ zugleich verschwindet, so müssen verschiedenen λ auch verschiedene α entsprechen. Es folgt nämlich aus den zwei Gleichungen

$$\lambda N(\alpha)+N^1(\alpha)=0, \qquad \lambda Z(\alpha)+Z^1(\alpha)=0,$$

von denen wenigstens eine nicht Null als Factor von λ enthält, dass jedem α ein λ, verschiedenen α verschiedene λ entsprechen (höchstens einer Anzahl von je n verschiedenen α können gleiche λ entsprechen). Unendlich vielen verschiedenen λ entsprechen also unendlich viele verschiedene α, und man hat demnach für unendlich viele, daher für alle x

$$N(x)Z^1(x)-N^1(x)Z(x) = 0,$$

was wegen des gleichen Grades von N und N^1 nicht möglich ist.

Um auch die Umkehrung (ad 2) zu beweisen nehme man an, es sei

$$N = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

durch die erste Bedingung allein vollständig bestimmt. Diese ist gleichbedeutend mit der Erfüllung eines Systems von n linearen homogenen Gleichungen, deren Unbekannte der Reihe nach a_0, a_1, etc. a_n sind. Hätte nun N mit Z den Theiler δ gemein, so würde

$$\frac{N}{\delta} = b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m \qquad (m<n),$$

wie aus Division von (1.) durch δ erhellt, einem Systeme von noch mehr, also sicher von ebenso vielen Gleichungen genügen, dessen Unbekannte b_0,

$b_1, \ldots b_m$ sind, während die $m+1$ Vertikalreihen mit den ersten $m+1$ des früheren übereinstimmen. Es würde also dem ersten System ausser a_0, a_1, etc. a_n zunächst noch ein System von n Werthen genügen, dessen erste Unbekannte b_0, b_1, etc. b_m, dessen übrige sämmtlich 0 sind. Diese mit einem willkürlichen Factor multiplicirt und dann den a hinzugefügt geben ein neues System von Werthen a_0^1, a_1^1, etc. a_n^1, in welchem $a_n^1 = a_n$ also nicht Null ist, während nicht alle a^1 gleich den entsprechenden a sind, so dass N gegen die Voraussetzung durch die erste Bedingung nicht vollständig als Function n^{ten} Grades bestimmt wäre.

Durch die erste Bedingung, also durch das vorerwähnte System linearer Gleichungen sind aber die Coefficienten einer Function n^{ten} Grades nur und immer bestimmt, wenn eine gewisse Determinante, nämlich der Ausdruck (3.) nicht verschwindet. Es ist demnach auch der dritte Punkt erledigt.

§. 5. Aus den vorhergehenden Entwickelungen folgen einige Eigenschaften der Nenner N, die sich wesentlich bestimmter aussprechen lassen, wenn, wie es von jetzt an immer geschehen soll, angenommen wird, dass $f(x)$ zwischen den reell gedachten Grenzen α und β von x reell und von demselben Zeichen ist.

In diesem Falle kann (3.) für keinen Werth von n verschwinden. *Es giebt also Nenner N von jedem Grade, und N_ν ist genau vom ν^{ten}. Der Kettenbruch für σ wird durchaus regelmässig, indem jeder Partialnenner vom ersten Grade ist. Der Rest R_ν beginnt genau mit der $-(\nu+1)^{\text{ten}}$ Potenz von x.*

Man kann ferner zeigen, dass $N_\nu(x)$ keinen Factor $L(x)$ besitzt, der zwischen $x=\alpha$ und $x=\beta$ dasselbe Zeichen behält. Setzt man

$$i_\mu = \int_\alpha^\beta x^\mu N_\nu(x) f(x)\, dx,$$

so lassen sich nämlich die ν linearen Gleichungen, welche den ν^{ten} Nenner bestimmen, durch ν Gleichungen $i_\mu = 0$ für alle ganze μ von $\mu = 0$ bis $\mu = \nu - 1$ ersetzen. Nach dem vorigen Satze sind diese ν Gleichungen vollkommen bestimmend für N_ν, und man kann hinzufügen, dass in Folge desselben i_ν sicher nicht verschwindet. Würde nun N_ν in $L(x).M(x)$ zerfallen, wo M demnach vom niedrigern als dem ν^{ten} Grade, vom λ^{ten} wäre, so müsste $M(x)$ der λ^{te} Näherungsnenner des gleichfalls regelmässigen Kettenbruchs für

$$\Sigma = \int \frac{f(z)L(z)}{x-z}\, dz$$

sein, indem ja

$$\int_\alpha^\beta x^\mu M(x).f(x)L(x)\,dx$$

i_μ ist, also für $\mu = 0$ bis $\mu = \nu - 1$, also sicher bis $\mu = \lambda - 1$ verschwindet. Es dürfte aber, da auch Σ einen regelmässigen Kettenbruch giebt, i_λ nicht verschwinden. Daher ist L eine Constante.

Fügt man hinzu, dass, wie sofort aus (2.) folgt, alle reellen Wurzeln von $N = 0$ zwischen α und β liegen müssen, so hat man den Satz: *Alle Wurzeln von $N_\nu(x) = 0$ sind ungleich und reell. Sie liegen zwischen α und β.*

§. 6. Bisher ist es mir nicht gelungen, die vielfachen Integrale (2.), durch welche die Nenner N ausgedrückt werden, durch directe Methoden, z. B. durch Einführung neuer Veränderlichen, auf wesentlich einfachere zu reduciren, während man doch weiss, dass eine Reihe von Fällen existirt, in denen die Integration sogar vollständig ausgeführt werden kann. So z. B. kennt man aus meinen früheren Arbeiten den Ausdruck für die Nenner in Form einfacher endlicher Reihen im Falle

$$f(x) = x^a(1-x)^b, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1,$$

in welchem σ sich in eine hypergeometrische Reihe verwandelt, deren erstes Element 1 ist. Für

$$f(x) = 1, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 1$$

wird

$$N_\nu = \int_{-1}^1 \psi(x)\,\Delta\,dx_1 dx_2 \dots dx_\nu = cP^\nu(x),$$

wenn P die Kugelfunction und c eine Constante bezeichnet, deren Werth durch die Gleichung

$$c.[1.(1.3).(1.3.5)\dots(1.3.5\dots\overline{2\nu-1})]^2 = 2^\nu[\Pi 1.\Pi 2\dots\Pi\nu]^2$$

gegeben ist. Aus dem vorigen Paragraphen weiss man, dass die Wurzeln dieser Nenner verschieden und reell sind und zwischen 0 und 1, resp. zwischen -1 und $+1$ liegen. Dieses Resultat ist für die Kugelfunctionen schon lange bekannt.

§. 7. Entwickelt man eine Function $\Phi(x)$ nach Functionen, die $M_\nu(x)$ heissen mögen, so ist die Bestimmung der Coefficienten besonders bequem, wenn es eine Function $f(x)$ giebt, welche für jedes ganze μ und ν

$$\int_\alpha^\beta M_\mu(x)M_\nu(x).f(x)\,dx$$

zu Null macht, sobald μ von ν verschieden ist. Derartige Ausdrücke M sind,

wie aus §. 5 folgt, die Nenner N und man hat den Satz: *Lässt eine Function $\Phi(x)$ sich in eine nach den Nennern N von σ fortschreitende Reihe entwickeln*

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu N_\nu(x),$$

so werden die Constanten A durch die Gleichung

$$A_\nu = c\int_\alpha^\beta \Phi(x) N_\nu(x) f(x)\,dx$$

bestimmt, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{1}{c} = \int_\alpha^\beta (N_\nu(x))^2 f(x)\,dx$$

setzt.

Der Zusammenhang solcher ganzen Functionen mit den Kettenbrüchen wird noch ganz besonders durch folgenden Satz erläutert: *Hat man ganze Functionen $N_\nu(x)$ vom ν^{ten} Grade, wenn ν der Reihe nach alle ganzen Zahlen von 0 bis ∞ vorstellt, und es verschwindet für jedes von ν verschiedene ganze μ*

$$\int_\alpha^\beta N_\mu(x) N_\nu(x) f(x)\,dx,$$

so sind die N_ν die Nenner in dem Kettenbruche für σ.

So ist bekanntlich

$$(a.)\qquad \int_0^\pi \cos\mu u . \cos\nu u\,du = 0.$$

Macht man hier $\cos u = x$, so dass also $\cos\nu u$ eine bekannte ganze Function ν^{ten} Grades von x ist, die $N_\nu(x)$ heissen mag, so wird

$$(b.)\qquad \int_{-1}^1 N_\mu(x) N_\nu(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

und man erfährt hieraus, dass diese Function $N_\nu(x)$ der ν^{te} Näherungsnenner ist von

$$\sigma = \int_{-1}^1 \frac{1}{x-z} \cdot \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Es war bisher ein Satz nicht bekannt, der auch für die elliptischen Functionen zur Coefficientenbestimmung bei Entwickelung von $\varphi(\operatorname{am} u)$ ebenso dienen kann, wie (a) oder (b) bei Entwickelung von $\varphi(u)$ nach Cosinus oder Sinus der Vielfachen von u. Aus unseren Untersuchungen geht aber hervor, *dass, $x = \sin\operatorname{am} u$ gesetzt, die Näherungsnenner $N_\nu(x)$ von*

$$(4.)\qquad \sigma = \int_{-1}^1 \frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$$

dieselbe Rolle bei Entwickelung von $\varphi(\operatorname{am} u)$ spielen, wie die $\cos \nu u$ bei der von $\varphi(u)$, indem man die beiden (gleichbedeutenden) Formeln hat

$$(a^*.) \quad \int_{-K}^{K} N_\mu(\sin\operatorname{am} u)\, N_\nu(\sin\operatorname{am} u)\, du = 0,$$

$$(b^*.) \quad \int_{-1}^{1} N_\mu(x)\, N_\nu(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = 0.$$

Aehnliches erhält man für alle Abelschen Functionen.

§. 8. Schliesslich sollen die Nenner N, welche aus dem besondern Werthe (4.) von σ entstehen, und deren Bedeutung hier nachgewiesen ist, näher untersucht werden. Damit aber die Untersuchungen, die hier der Kürze halber auf elliptische Functionen beschränkt bleiben, sich unmittelbar auf alle *Abel*schen Functionen leichter übertragen lassen, wird statt der Form (4.) von σ die andere

$$(5.) \quad \sigma = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{(x-z)\sqrt{\psi(z)}}, \qquad \psi(z) = (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$$

gewählt; auch sollen, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, α, β, γ reell und so beschaffen sein, dass $\alpha < \beta < \gamma$. Ferner werden folgende Bezeichnungen eingeführt

$$\omega_\nu = \int_\alpha^\beta \frac{z^\nu\, dz}{\sqrt{\psi(z)}}, \qquad q = \frac{\omega_1}{\omega},$$

$$\psi(z) = z^3 + C_0 z^2 + C_1 z + C_2.$$

Es ist bekannt, dass sämmtliche ω lineare homogene Functionen von ω_0 und ω_1 sind ($\omega_\nu = a\omega_0 + b\omega_1$); da nun Δ in (2.) eine homogene Function von x_1, x_2, etc. ist, so wird N eine solche von ω_0, ω_1, ω_2, etc. Z. B. findet man

$$N_1 = \omega_0 x - \omega_1$$

$$N_2 = (\omega_0\omega_2 - \omega_1^2)x^2 + (\omega_1\omega_2 - \omega_0\omega_3)x + \omega_1\omega_3 - \omega_2^2.$$

Dividirt man jedes N durch eine geeignete Potenz von ω_0, ohne jedoch für das so entstehende N eine andere Bezeichnung einzuführen, da uns hier die constanten Factoren von N gleichgültig sind, so sieht man ein, *dass N_ν eine ganze Function nicht nur von x sondern auch von q ist, und dass in derselben keine andere Irrationalität vorkommt,* wenn α, β, γ als rational gerechnet werden. So erhält man, wenn man in dem Beispiele zur Abkürzung der Formel $C_0 = 0$ macht,

$$N_1 = x - q,$$

$$N_2 = x^2(C_1 + 3q^2) - \frac{2x}{5}(C_2 + 2C_1 q) + \frac{5C_1^2 + 27C_2 q^2 + 18C_1 q}{15}.$$

Die Functionen N treten als particulare Lösungen einer linearen Differentialgleichung auf. Dividirt man, um dies zu beweisen, (1.) durch N_ν, differentiirt hierauf nach x und multiplicirt die so entstehende Gleichung mit $N_\nu^2 . \sqrt{\psi(x)}$, so erhält man

$$N^2\left[x-q-\sqrt{\psi}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{Z.\sqrt{\psi}}{N}\right)\right] = N^2\sqrt{\psi}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{R.\sqrt{\psi}}{N}\right)$$

und erkennt hieraus, dass die rechte Seite von der Form $a(x-\delta)$ und dass a nicht Null ist. Ferner können die Constanten a, δ keine andere Irrationalität als q enthalten. Hieraus folgt

$$R.\sqrt{\psi} = aN\int\frac{x-\delta}{N^2}\,\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}.$$

Da R nach (1.) keine Integrale dritter Gattung enthalten kann, so muss, unter Berücksichtigung des Umstandes (§. 5), dass die Wurzeln von $N=0$ ungleich und weder α noch β sind, für jede Wurzel x von $N=0$

$$2(x-\delta)\,\psi(x)\frac{d^2N}{dx^2}+[(x-\delta)\,\psi'(x)-2\psi(x)]\,\frac{dN}{dx}$$

verschwinden. Man hat also den Satz: *Der Nenner N_ν ist eine ganze Function ν^{ten} Grades, welche für jedes unbestimmte x der Gleichung*

$$(6.)\quad 2(x-\delta)\,\psi(x)\,y''+[(x-\delta)\,\psi'(x)-2\psi(x)]\,y'+[a+a_1x-\nu(2\nu-1)x^2]\,y = 0$$

genügt; eine zweite für $x=\infty$ verschwindende Lösung dieser Gleichung ist $R_\nu\sqrt{\psi(x)}$. Es bedeuten hier δ, a, a_1 bestimmte Constante, die, ebenso wie die Coefficienten von N, keine Irrationalität ausser q enthalten.

Meine schon früher mitgetheilten Untersuchungen hatten ergeben, dass bei festgehaltenem α, β, γ, δ im allgemeinen $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ Gleichungen von der Form (6.) existiren, deren jede ein Integral besitzt, welches ganz und vom Grade ν ist. Die betreffenden a und a_1 in (6.) werden durch Gleichungen höheren Grades definirt, welche im vorliegenden Falle die Eigenschaft besitzen, dass eine zusammengehörige Gruppe a und a_1 nur die Irrationalität q enthält.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, welche Bedingungen die Grössen δ, a und a_1 erfüllen müssen — es sind α, β, γ gegeben — damit ein Integral einer Differentialgleichung von der Form (6.) der Nenner N_ν von σ sei. Man weiss, dass jede ganze Function, welche (6.) genügt, jedenfalls vom ν^{ten} Grade ist, ferner dass, bei willkürlich gewähltem δ, doch a und a_1 immer, und zwar auf mehrfache Weise (im allgemeinen) so gewählt werden

können, dass ein Integral von (6.) ganz — daher vom ν^{ten} Grade — wird. Unsre Frage geht also dahin, wie δ gewählt werden müsse, damit ein Integral von (6.) grade N_ν sei.

Man kann die Untersuchung auf zwei verschiedene Arten führen. Es war oben gefunden, dass N_ν und $R_\nu.\sqrt{\psi}$ zwei particuläre Lösungen von (6.) sind, wenn man δ, a und a_1 gehörig bestimmt hat; der Werth von R_ν ist durch (2.) aus N_ν bestimmt. Es lässt sich nun zeigen: Wenn eine ganze Function $y = M(x)$ der Gleichung (6.) genügt und es ist

$$y = Q(x) = \sqrt{\psi(x)}\int_\alpha^\beta \frac{M(z)}{x-z}\,\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}$$

eine zweite Lösung, so muss $M(x) = N_\nu(x)$, d. h. so muss M der Nenner N_ν von σ und daher $Q(x) = R_\nu(x)\sqrt{\psi(x)}$ sein. Denn die zweite Lösung Q, welche nicht vom Grade ν ist, muss, wie aus (6.) hervorgeht, den Grad $-\nu+\frac{1}{2}$ besitzen, so dass, i_μ gleich

$$\int_\alpha^\beta x^\mu M(x)\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$$

gesetzt, die ν Gleichungen entstehen $i_\mu = 0$ von $\mu = 0$ bis $\mu = \nu-1$, also die ν Gleichungen, welche nach §. 5 die bestimmenden für $N_\nu(x)$ sind. Die allgemeinen Untersuchungen im 60. Bande dieses Journals S. 261 auf den vorliegenden Fall angewandt zeigen, dass Q nur und immer ein Integral von (6.) ist, wenn $i_0 = i_1 = 0$ wird, und geben daher das Resultat: *Nur und immer wenn δ, a, a_1 so bestimmt sind, dass die eine Lösung $M(x)$ von* (6.) *eine ganze Function von x wird, und dass ausserdem*

$$\int_\alpha^\beta M(x)\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = \int_\alpha^\beta xM(x)\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = 0,$$

ist $M(x)$ der ν^{te} Nenner $N_\nu(x)$ von σ. Zugleich ist dann

$$R_\nu(x) = \int_\alpha^\beta \frac{M(z)}{x-z}\,\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}$$

der Rest, und $R_\nu(x)\sqrt{\psi(x)}$ eine zweite Lösung von (6.). Die Grössen a, a_1 und δ sind durch diese Bedingungen eindeutig als rationale Functionen von q bestimmt.

Wie bekannt giebt die Bedingung, dass M ganz sein soll, zwei Gleichungen zwischen a, a_1, δ; die Bedingungen $i_0 = i_1 = 0$ liefern zwei lineare Gleichungen zwischen den Coefficienten von M oder zwei Gleichungen zwischen a, a_1, δ und führen in die Coefficienten dieser Gleichungen die einzige

Irrationalität q ein. Aus den vier Gleichungen zwischen a, a_1 und δ erhält man je zwei für a, a_1 und δ, und durch Aufsuchen des grössten gemeinsamen Theilers werden a, a_1 und δ eindeutig als rationale Functionen der Coefficienten bestimmt; denn es giebt nur eine Function, die allen Bedingungen zugleich genügt.

Bei der zweiten Art die Untersuchung zu führen, geht man davon aus, dass nur die Gleichungen $i_\mu = 0$ von $\mu = 0$ bis $\mu = \nu - 1$ erfüllt zu sein brauchen, wenn M mit N_ν übereinstimmen soll. Aus (6.) findet man leicht recurrirende lineare homogene Gleichungen, die einzeln nicht illusorisch werden, um von $\mu = 2$ bis $\mu = \nu - 1$ die Grösse i_μ durch die vorhergehenden auszudrücken und dann noch eine Gleichung, also im ganzen $\nu - 1$ homogene lineare Gleichungen zwischen i_0, i_1, etc., $i_{\nu-1}$. Ist $i_0 = i_1 = 0$, so folgt aus denselben mit Nothwendigkeit, dass wirklich auch die übrigen i_μ bis $\mu = \nu - 1$ incl. verschwinden. Zählt man die Zahl der Unbekannten ab, so könnte man sogar glauben, dass die Bedingung $i_0 = 0$ schon hinreichend sei, um die übrigen i zu Null zu machen, ohne dass es nöthig wäre, noch die zweite $i_1 = 0$ hinzuzufügen. Es würden dann die $\nu - 1$ homogenen Gleichungen zwichen den ν Grössen i_0, i_1, etc. $i_{\nu-1}$ vollkommen unabhängig sein. Allgemein kann ich nicht entscheiden, ob dies der Fall sei; für besondere Werthe von ν fand ich, dass die Gleichungen nicht unabhängig sind, und die Bedingung $i_0 = 0$ nicht von selbst das Verschwinden von i_1 nach sich zieht. Verzichtet man aber auf Resultate, die in dieser Art gewonnen sind, und nimmt als möglich an, dass $i_0 = 0$ schon $i_1 = 0$ nach sich zieht, so würde man statt vier nur drei Gleichungen zwischen a, a_1, δ, also nur je eine für jede von diesen drei Grössen erhalten. Diese Gleichungen dürfen nur eine Werthengruppe geben; es müssen dieselben also entweder vom ersten Grade sein oder doch nur gleiche Wurzeln enthalten.

Weiteren Untersuchungen muss die Entscheidung über die noch schwebende Frage vorbehalten bleiben, ob es Fälle giebt, in welchen die Forderung auf S. 325, dass auch i_1 noch neben i_0 verschwinde, eine überflüssige dadurch wird, dass sie von selbst erfüllt ist.

Ueber einige Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ins Besondere über das Rouge et Noire und den Vortheil der Bank bei diesem Spiele. Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Herrn *L. Oettinger* zu Freiburg im Breisgau.)

Das Rouge et Noire (Trente et un auch Trente et quarante genannt) ist ein Spiel, welches nur zwei Wechselfälle für Gewinn und Verlust hat, und dessen Gang in Folgendem besteht.

Ein Pack von sechs vollständigen Kartenspielen (Groupe oder Sixain genannt), von denen jedes 52 Blätter (13 von jeder der vier Farben) enthält, wird vor Beginn des Spiels wohl gemischt. Im Spiele zählt jede Karte nach den auf ihr verzeichneten Augen 1, 2, 3, ... 10 ohne Unterschied der Farben. Die Bilder jeder Farbe zählen 10, so dass in den Blättern jeder Farbe die Zahlen 1, 2, 3, ... 9 einmal und die Zahl 10 viermal vorkommt.

Sind die Einsätze gemacht, so wird zuerst eine Reihe von Karten aufgeschlagen und hierauf eine zweite Reihe. In jeder Reihe wird das einzeln umgeschlagene Blatt nach seinem Werthe gezählt und damit so lange fortgefahren, bis die zu der Reihe gehörenden Blätter eine der Summen 31, 32, ... bis höchstens 40 liefern.

Die erste oder obere Kartenreihe gilt für die *schwarze*, die zweite oder untere Reihe für die *rothe* Farbe. Diejenige Reihe, deren Summe die niedrigste ist, also 31 Augen zählt oder dieser Zahl am nächsten kommt, gewinnt; diejenige, welche die höhere Summe zeigt, verliert.

Dies ist die eine Chance von Gewinn und Verlust, die den Namen Rouge et Noire führt. Im Falle des Gewinns wird dem Spieler die einfache Summe zu seinem Einsatze ausgezahlt.

Die zweite Chance ist das Spiel auf die *Farbe* (Couleur) und *Nichtfarbe* oder *Gegenfarbe* (Contrecouleur oder inverse). Sie besteht in Folgendem:

Die erste aufgeschlagene Karte (also die erste Karte der oberen Reihe) bestimmt die *Farbe* (roth oder schwarz). Setzt ein Spieler auf die Farbe und ist die zuerst umgeschlagene Karte *schwarz*, so hängt sein Gewinn davon ab, dass die erste Kartenreihe (welche für schwarz gilt) gewinnt, also die nie-

drigste Summe zeigt. Ist die erste Karte *roth,* so hängt der Gewinn des Spielers davon ab, dass die zweite, für roth geltende, Kartenreihe gewinnt, oder die niedrigste Summe zeigt. Tritt das Gegentheil ein, so verliert die Farbe und die Gegenfarbe gewinnt. Beide Chancen werden in jedem einzelnen Spiele entschieden.

Ist das erste Spiel vollendet, so werden die aufgeschlagenen Karten entfernt. Von den noch übrigen Karten werden auf gleiche Weise zwei weitere Kartenreihen umgeschlagen und das Spiel so lange fortgesetzt, bis alle Blätter der sechs Kartenspiele erschöpft sind, worauf das Spiel von neuem beginnt.

Jedes einzelne Spiel wird in allen Fällen entschieden, worin die Summen der beiden Kartenreihen unter einander verschieden sind. Zeigen beide Kartenreihen die nämliche Summe, was man refait (oder après) nennt, so bleibt, wenn die Summe 32, 33, . . . 40 beträgt, das Spiel unentschieden, und es gewinnt weder der Spieler noch die Bank. Erscheint dagegen in beiden Kartenreihen gleichzeitig die Summe 31, so gewinnt die Bank die *Hälfte* aller Einsätze. Hierin besteht der Vortheil der Bank.

Es ist klar, dass nur 10 Summen in einer Kartenreihe eintreten können, wenn man dieselbe abschliesst, sobald eine bestimmte Summe erreicht oder überschritten ist. Da im vorliegenden Falle 31 die entscheidende Summe ist, so bilden die Zahlen 31 und 40 die Grenzen der bei diesem Spiele möglichen Fälle. Jeder einzelne von den 10 möglichen Fällen der ersten Kartenreihe kann sich mit jedem der 10 möglichen Fälle der zweiten verbinden. Es sind daher 100 Fälle möglich, von denen 90 das Spiel ebensowohl zu Gunsten der Spieler als der Bank und einer nur zum Vortheil der Bank entscheiden können, während 9 das Spiel unentschieden lassen. Wäre das Eintreffen jedes einzelnen Falles gleich wahrscheinlich, so besässe jeder die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{100}$, und der Vortheil der Bank wäre ein halbes Procent. Die Wahrscheinlichkeiten sind aber verschieden und dieselben zu ermitteln, ist die Aufgabe, mit welcher ich mich beschäftigen werde.

Die Summen, welche durch beide Kartenreihen zusammen erzeugt werden können, liegen zwischen 62 und 80, umfassen also nur 19 Fälle. Die beiden äussersten können nur auf eine Art, die beiden ihnen zunächst liegenden auf zwei Arten u. s. w., die mittelste Summe 71 kann auf 10 Arten erzeugt werden. Da die Summe aller Augen in einem Kartenspiel $4.85 = 340$ ist, so beträgt dieselbe in sechs Kartenspielen 2040. Daher liegt die Zahl der

möglichen Spiele, die mit 6 ganzen Kartenspielen gemacht werden können, zwischen $\frac{2040}{80}$ und $\frac{2040}{64}$, d. h. zwischen 25 und 32.

Vor allem tritt bei diesem Spiele die Frage nach der Grösse des Vortheils der Bank auf. Sie hängt von der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit ab, dass die Summe 31 nach einander in beiden Kartenreihen erscheine. Hieran schliesst sich die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten, dass die übrigen Summen 32 bis 40 durch das allmälige Umschlagen der 312 Blätter von sechs Kartenspielen erzeugt werden.

Die Beantwortung dieser Fragen bietet dadurch Interesse, dass ihre Lösung eine Reihe besonderer Probleme erfordert, deren Entwicklung nicht ohne Schwierigkeit ist.

Nach Feststellung der Grundzüge der Lösung dieser Fragen sah ich mich nach der vorhandenen Literatur um und fand einen kleinen Aufsatz über dieses Spiel in der Encyclopédie méthod. p. d'Alembert etc. (Mathém. T. III, p. 287 ff.), der aber ohne Bedeutung ist. Dagegen hat zuerst *Poisson* die hierhergehörigen Fragen im 16. Bd. von *Gergonne*'s Annales d. Mathém. p. 173—208 (Mém. d. l'avantage du banquier au jeu d. trente et quarante) mit dem ihm eigenen Scharfsinn einer Untersuchung unterworfen, jedoch nur allgemeine Auflösungsmethoden und schliesslich Zahlenresultate ohne entwickelte Darstellung der hiezu nöthigen Formeln angegeben, wovon ein Auszug im 1. Bd. v. *Baumgartner*'s Zeitschrift für Physik u. Mathem. p. 228—253 erschienen ist.

Nicht nur die Auflösung des vorliegenden Problems, sondern auch die Auswerthung der Formeln bietet grosse Schwierigkeit. *Poisson* hat, wie es scheint, in seiner Abhandlung besondern Nachdruck auf die Erleichterung des schwierigen Calculs gelegt, und wurde dadurch zu nicht ganz genauen Resultaten geführt, worüber das Nähere später folgen wird.

§. 2.

Die vorliegende Aufgabe steht mit einer anderen in naher Verwandtschaft. Beide lassen, unter Beibehaltung der *Poisson*schen Bezeichnung, folgende Darstellung zu:

Es seien in einer Urne x_1 Kugeln der ersten Art, d. h. mit der Zahl 1 bezeichnet, x_2 Kugeln der zweiten Art, d. h. mit der Zahl 2 bezeichnet u. s. w., endlich x_i Kugeln der i^{ten} Art, d. h. mit der Zahl i bezeichnet, enthalten; p Kugeln werden gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

dass a_1 Kugeln der ersten, a_2 Kugeln der zweiten u. s. w., a_i Kugeln der i^{ten} Art erscheinen und zusammen die Summe n erzeugen? und zwar

a) wenn die gezogene Kugel zurückbehalten, also nicht in die Urne zurückgeworfen,

b) wenn sie nach jeder Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird.

a) Wird eine bestimmte Reihenfolge im Erscheinen der Kugeln der verschiedenen Arten vorausgesetzt, so ist die fragliche Wahrscheinlichkeit, (dieses Journal Band 26, pag. 228 u. ff.), wenn s die Summe der x und p die Summe der a bedeutet,

$$(1.)\qquad w = \frac{x_1(x_1-1)\ldots(x_1-a_1+1).x_2(x_2-1)\ldots(x_2-a_2+1)\ldots x_i(x_i-1)\ldots(x_i-a_i+1)}{s(s-1)(s-2)\ldots(s-p+1)}$$

Ist aber die Ordnung beliebig, in welcher die Kugeln der einzelnen Arten nach einander erscheinen können, so vergrössert sich die Zahl der günstigen Fälle in dem Verhältniss, wie p zu ziehende Kugeln aus den verschiedenen Arten sich aneinander reihen können, und man erhält

$$(2.)\quad \begin{cases} w = \dfrac{p.p-1\ldots1.x_1.x_1-1\ldots x_1-a_1+1.x_2.x_2-1\ldots x_2-a_2+1\ldots x_i.x_i-1\ldots x_i-a_i+1}{s.s-1\ldots s-p+1.1.2\ldots a_1.1.2\ldots a_2\ldots1.2\ldots a_i} \\ \quad = \dfrac{(x_1)_{a_1}(x_2)_{a_2}\ldots(x_i)_{a_i}}{(s)_p} \end{cases}$$

unter den Bedingungen

$$(3.)\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3\cdots+x_i = s, \\ a_1+a_2+a_3\cdots+a_i = p, \\ 1a_1+2a_2+3a_3\cdots+ia_i = n. \end{cases}$$

Hierin ist die abgekürzte Bezeichnung

$$(s)_p = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-p+1)}{1.2.3\ldots p}$$

eingeführt, die auch weiterhin beibehalten werden soll.

Der in (2.) gegebene Ausdruck rechtfertigt sich auch folgendermassen. Da die Ordnung, in welcher die Kugeln in p Ziehungen erscheinen können, gleichgültig ist, so kommen die dem Unternehmen günstigen, aber unter sich verschiedenen Fälle in Betracht. Ihre Anzahl ist $(x_1)_{a_1}.(x_2)_{a_2}.(x_3)_{a_3}\ldots(x_i)_{a_i}$. Die Anzahl aller möglichen Fälle ist $(s)_p$. Der Quotient beider ist der Ausdruck (2.).

b) Die gleichen Schlüsse, wie unter der bisherigen Hypothese, gelten auch hier, nur mit dem Unterschiede, dass Potenzen an die Stelle der Facul-

täten treten, weil durch Rückgabe der gezogenen Kugel in die Urne die Kugelanzahl immer vollständig bleibt und jede Kugel jeder Art gleich viel mal wieder erscheinen kann.

Die Wahrscheinlichkeit, wenn die Kugeln der verschiedenen Arten in bestimmter Reihenfolge erscheinen sollen, ist daher

$$(4.) \quad w = \frac{x_1^{a_1}.x_2^{a_2}.x_3^{a_3}\ldots x_i^{a_i}}{s^p}.$$

Ist die Ordnung, in welcher die Kugelarten nach einander erscheinen sollen, gleichgültig, so wird

$$(5.) \quad w = \frac{p.p-1\ldots 1.x_1^{a_1}.x_2^{a_2}\ldots x_i^{a_i}}{s^p.1.2\ldots a_1.1.2\ldots a_2\ldots 1.2\ldots a_i}$$

unter den in (3.) angegebenen Bedingungen.

Bei dem Rouge et Noire findet die Gleichung (2.) Anwendung. Sie steht mit (5.) in engem Zusammenhang, in sofern letztere den Grenzwerth für erstere bildet. Nimmt man nämlich die Zahl der Kugeln jeder Art ins Unendliche wachsend an, so geht (2.) in (5.) über, weil dann die Kugelanzahl jeder Art nach jeder Ziehung auch bei nicht erfolgter Rückgabe als vollständig betrachtet werden kann.

Da das Rouge et Noire mit 6 vollständigen Kartenspielen gespielt wird, so kann jede mit den Zahlen 1, 2, ... 9 bezeichnete Karte 24 mal, die Zahl 10 aber 96 mal vorkommen. Bei der Anwendung beider Gleichungen hat man daher $x_1 = x_2 = \cdots = x_9 = 24$, $x_{10} = 96$, $s = 24.13 = 312$ zu setzen. Jede der Summen 31, 32, ... 40 führt eine Entscheidung des Spiels herbei. Daher wird frühestens mit dem Umschlag der 4ten Karte und spätestens mit dem der 28sten Karte in jeder Kartenreihe eine der genannten Summen erschienen und das Spiel beendigt sein; p kann also die Werthe 4, 5, 6, ... bis 28 in (2.) und bis 31 in (5.) durchlaufen.

Die dritte Bedingungsgleichung (3.) hat folgende Bedeutung. Man soll den Zahlen a diejenigen Werthe beilegen, welche mit ihren Stellenzahlen multiplicirt, die Summe n erzeugen, für deren Eintreffen die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen ist. Jedes a kann dann in (2.) einen der Werthe 0, 1, 2, ... 24 erhalten. Sind alle der dritten Gleichung (3.) genügenden Werthe der a für ein besimmtes p gefunden, so werden sie in (2.) als Exponenten der Facultäten der x eingeführt und hiedurch die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmt. Dasselbe Verfahren gilt auch für (5.) mit dem Unterschiede, dass dort Potenzen statt Facultäten auftreten und die Werthe der a und p sich anders modificiren.

§. 3.

Bei dem Rouge et Noire kommt vorzugsweise nach §. 1 das Eintreffen der Summe 31 in Frage, was in 4 oder mehr Kartenumschlägen geschehen kann. Setzt man $p=4$, den einfachsten Fall, so ergeben sich nach §. 2 folgende 18 Auflösungen, die zur Verdeutlichung des angegebenen Verfahrens hier stehen sollen:

$$(1.)\left\{\begin{array}{lll} a_1 a_{10} a_{10} a_{10} & a_3 a_9 a_9 a_{10} & a_4 a_9 a_9 a_9 \\ a_2 a_9\, a_{10} a_{10} & a_4 a_8 a_9 a_{10} & a_5 a_8 a_9 a_9 \\ a_3 a_8\, a_{10} a_{10} & a_5 a_7 a_9 a_{10} & a_6 a_7 a_9 a_9 \\ a_4 a_7\, a_{10} a_{10} & a_6 a_6 a_9 a_{10} & a_6 a_8 a_8 a_9 \\ a_5 a_6\, a_{10} a_{10} & a_5 a_8 a_8 a_{10} & a_7 a_7 a_8 a_9 \\ & a_6 a_7 a_8 a_{10} & a_7 a_8 a_8 a_8 \\ & a_7 a_7 a_7 a_{10} & \end{array}\right.$$

Aehnlich verhält es sich für höhere Werthe von p. Kommt in irgend einer Lösung eine der Grössen $a_1 \ldots . a_9$ und zwar αmal vor, eine andere βmal u. s. w., a_{10} aber λmal, so entspricht dieser Lösung nach Formel (2.) §. 2 ein Glied

$$\frac{(24)_\alpha (24)_\beta \ldots (96)_\lambda}{(312)_p}.$$

So setzt sich für $p=4$ die Wahrscheinlichkeit w, die mit w_4 bezeichnet werde, aus 18 Gliedern zusammen, welche sich jedoch, weil $x_1=x_2=\cdots=x_9=24$ ist, auf 7 zusammenziehen.

Während im Rouge et Noire die Zahlen 1, 2, ... 9 je 24 mal, die Zahl 10 aber 4 mal so oft also 96 mal vorkommt, kann man, ohne die Rechnung wesentlich zu ändern, die allgemeinere Annahme machen: die Zahlen 1, 2, ... 9 kämen je q mal, die Zahl 10 aber käme rq mal vor. Setzt man unter Einführung dieser Verallgemeinerung die in (1.) begonnene Untersuchung zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens der Summe 31 für 5, 6, 7 ... Karten-Umschläge fort, so ergeben sich auf dem angezeigten Wege 92, 221, 354 auflösende Fälle, die sich aber bedeutend reduciren, und man erhält, wenn die Werthe der Wahrscheinlichkeiten mit w_4, w_5, ... bezeichnet werden, für w_4, w_5 folgende Resultate *):

---

*) Der Herr Verfasser hat seine Rechnung in ähnlicher Weise auf w_6 und w_7 ausgedehnt, da aber die sich ergebenden Formeln aus 16 und 27 Gliedern bestehen und daher einen unverhältnissmässigen Raum einnehmen, so begnüge ich mich die specielleren Zahlenresultate weiter unten abzudrucken. *B.*

$$(2.)\quad \begin{cases} w_4 = \dfrac{1}{(q(9+r))_4}[q(rq)_3+4.q^2(rq)_2+(3q(q)_2+3.q^3+(q)_3)rq+4q^2.(q)_2+2q(q)_3], \\ w_5 = \dfrac{1}{(q(9+r))_5}[(5q(q)_2+5q^3)(rq)_2+(17(q)_2q^2+11q^4+3(q)_3q)rq \\ \qquad +5q^5+21(q)_2q^3+10(q)_3q^2+11(q)_2(q)_2q+2(q)_4q+3(q)_3(q)_2]. \end{cases}$$

Setzt man nun $q=24$, $r=4$, so ergeben sich für die Wahrscheinlichkeiten, dass die Summe 31 in 4, 5, 6 und 7 Karten-Umschlägen bei dem Rouge et Noire erscheine, folgende Werthe:

$$(3.)\quad \begin{cases} w_4 = 0{,}05358344, \\ w_5 = 0{,}05214118, \\ w_6 = 0{,}02856175, \\ w_7 = 0{,}01032207. \end{cases}$$

Neigt dieses Spiel dem Ende zu, und nimmt man an, sämmtliche Karten seien bis auf 13 umgeschlagen, worin noch 4 Zehner und die übrigen Zahlen je einmal vorhanden sind, so ist $q=1$ und $r=4$ in (2.) zu setzen, und man erhält für das Eintreffen der Summe 31 in 4 bis 7 Umschlägen:

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{40}{(13)_4} = 0{,}0559440559, \\ \dfrac{79}{(13)_5} = 0{,}0613830613, \\ \dfrac{46}{(13)_6} = 0{,}0268065268, \\ \dfrac{6}{(13)_7} = 0{,}0034965034. \end{cases}$$

Einfacher bestimmen sich die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der Summe 31 nach (5.) §. 2, wenn die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird. Man hat zu dem Ende Potenzen und die zugehörigen Vorzahlen einzuführen. Die q fallen aus dem Zähler und Nenner weg, und man erhält bei 4 bis 7 Ziehungen

$$(5.)\quad \begin{cases} w_4 = \dfrac{1}{(9+r)^4}[4r^3+48r^2+112.r+56], \\ w_5 = \dfrac{1}{(9+r)^5}[450r^2+2400r+2430], \\ w_6 = \dfrac{1}{(9+r)^6}[1800r^2+19170r+32292], \\ w_7 = \dfrac{1}{(9+r)^7}[4410r^2+89124r+233331]. \end{cases}$$

Hierin kann r jede ganze Zahl bedeuten. Für $r=4$ erhält man folgende Werthe

$$(6.)\quad \begin{cases} w_4 = 0{,}0534995304\ldots, \\ w_5 = 0.0517919809\ldots, \\ w_6 = 0{,}02854309\ldots, \\ w_7 = 0{,}01052435\ldots. \end{cases}$$

Diese Werthe stehen mit den in (3.) erhaltenen in einem Zusammenhang, von welchem später die Rede sein wird, den aber *Poisson* unerwähnt gelassen hat.

§. 4.

Werden aus einer Urne Kugeln ohne Rückgabe der gezogenen Kugel gezogen, so bilden die entstehenden Gruppen Verbindungen, und in bestimmten Fällen mit beschränkten Wiederholungen; dagegen Versetzungen mit unbeschränkten Wiederholungen, wenn die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird.

Mit Rücksicht auf diese Bemerkung stellen sich die in §. 2 angegebenen Fragen unter folgender Form dar.

a) Wie gross ist die Zahl der Gruppen, welche die Summe n bilden, wenn unter den genannten Voraussetzungen ohne Rückgabe der gezogenen Kugel p Ziehungen gemacht werden?

b) Wie gross ist sie, wenn die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird?

Die Beantwortung der Frage a) fällt mit der Bestimmung der Zahl der Gruppen zusammen, welche die Summe n bei beschränkten Wiederholungen zur p^{ten} Classe bilden; die der Frage b) mit der Bestimmung der Zahl der Gruppen, welche die Summe n mit unbeschränkten Wiederholungen zur p^{ten} Classe bilden.

Wird die so gefundene Gruppenzahl durch die Zahl aller möglichen zugehörigen Fälle getheilt, so ergiebt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Beantwortung dieser Fragen, namentlich der ersten, fordert einige vorbereitende Sätze. Sie schliesst sich an eine Reihe von Problemen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, die im 26. Bd. dieses Journals §. 14, pag. 311 u. ff. behandelt sind und jenen zur Vervollständigung dienen.

Die beiden Darstellungen

$$(1.)\quad (1+a_1 z)(1+a_2 z)(1+a_3 z)\ldots(1+a_m z) = 1+V_1 z+V_2 z^2+\cdots+V_m z^m,$$

$$(2.)\quad (1+z)^m = 1+U_1 z+U_2 z^2+\cdots+U_m z^m = 1+mz+(m)_2 z^2+\cdots+(m)_m z^m,$$

stehen in folgendem Zusammenhang

$$(3.)\quad V_r = C(a_1, a_2, \dots a_m)^r = a_1 a_2 \dots a_r + a_1 a_2 \dots a_{r-1} a_{r+1} + \dots + a_{m-r+1} a_{m-r+2} \dots a_m,$$

$$(4.)\quad U_r = C[a_1, a_2, \dots a_m]^r = (m)_r = \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r}.$$

Die Vorzahl V_r giebt die Gruppen der Verbindungen aus m Elementen zur r^{ten} Classe an; die Vorzahl U_r bestimmt ihre Anzahl, was durch eckige Klammern angezeigt werden soll. Der Uebergang von (1.) auf (2.) geschieht, wenn für jedes einzelne Element die Einheit gesetzt wird. Der Exponent von z zeigt in beiden Darstellungen die Classe an.

In jedem Gliede von (1.) erzeugen die vorkommenden Elemente mit ihren Stellenzahlen verschiedene Summen, deren Grenzen sich für die r^{te} Classe oder die Vorzahl von z^r in folgender Weise

$$(5.)\quad \frac{r(r+1)}{1.2} \quad \text{und} \quad rm - \frac{(r-1)r}{1.2} = \frac{r(2m-r+1)}{2}$$

feststellen; r gilt für alle Werthe von 1 bis m.

Soll nun eine Scheidung der in (1.) vorkommenden Gruppen nach den verschiedenen, einer bestimmten Classe zugehörigen Summen vorgenommen werden, so hat man eine zweite Grösse x so einzuführen, dass ihr Exponent mit der Stellenzahl des zugehörigen Elements übereinstimmt. Verfährt man nun nach der in (1.) und (2.) befolgten Weise, so erhält man folgende zusammengehörige Darstellungen

$$(6.)\quad \left\{\begin{aligned} &(1+a_1 xz)(1+a_2 x^2 z)(1+a_3 x^3 z)\dots(1+a_m x^m z)\\ &= 1+(V_1^1 x + V_2^1 x^2 + V_3^1 x^3 + \dots + V_m^1 x^m)z\\ &\quad +(V_3^2 x^3 + V_4^2 x^4 + V_5^2 x^5 + \dots + V_{2m-1}^2 x^{2m-1})z^2\\ &\quad +(V_6^3 x^6 + V_7^3 x^7 + V_8^3 x^8 + \dots + V_{3m-3}^3 x^{3m-3})z^3\\ &\quad\ \vdots\\ &\quad + V^m_{\frac{m(m+1)}{1.2}} x^{\frac{m(m+1)}{1.2}} z^m, \end{aligned}\right.$$

$$(7.)\quad \left\{\begin{aligned} &(1+xz)(1+x^2 z)(1+x^3 z)\dots(1+x^m z)\\ &= 1+(U_1^1 x + U_2^1 x^2 + U_3^1 x^3 + \dots + U_m^1 x^m)z\\ &\quad +(U_3^2 x^3 + U_4^2 x^4 + U_5^2 x^5 + \dots + U_{2m-1}^2 x^{2m-1})z^2\\ &\quad +(U_6^3 x^6 + U_7^3 x^7 + U_8^3 x^8 + \dots + U_{3m-3}^3 x^{3m-3})z^3\\ &\quad + \dots\dots\dots\dots, \end{aligned}\right.$$

worin die Vorzahlen derselben Glieder in ähnlichem Zusammenhang wie in

(3.) und (4.) stehen, so dass

$$(8.)\quad V_n^r = C(sn; a_1, a_2, \dots a_m)^r,$$

$$(9.)\quad U_n^r = C[sn; a_1, a_2, \dots a_m]^r,$$

wo V_n^r die Gruppen der Verbindungen zur Summe n in der r^{ten} Classe aus den Elementen a_1, a_2, ... a_m und U_n^r die zugehörige Gruppenanzahl bezeichnet, was wie oben durch runde und eckige Klammern angedeutet wird.

Die Darstellung des auch in anderer Beziehung wichtigen Productes (7.) ist in mehrfacher Weise zurücklaufend, und man muss bei zurücklaufender Bildung derselben die Gruppenanzahlen aller früheren Elemente, Classen und Summen kennen, um die späteren bilden zu können.

Die Mühe der Ausführung wird durch folgende Sätze bedeutend erleichtert.

(10.) Die Vorzahlen der Potenzen von x, welche einer und derselben Potenz von z (Classe) zugehören und von dem ersten und letzten Gliede gleichweit abstehen, sind einander gleich, was aus der Natur der Gebilde folgt.

(11.) Die ganzen Ausdrücke in x, welche in zwei Potenzen von z multiplicirt sind, deren Exponenten sich zu m ergänzen, (z^r und z^{m-r}) sind dieselben, dies folgt aus der Vergleichung von (2.) und (7.).

(12.) Die Summe sämmtlicher Vorzahlen von x, welche einer bestimmten Classe (z^r) zugehören, wird durch $(m)_r = \frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2\dots r}$ bestimmt, was auf die nämliche Weise erhellt.

Diese Sätze bringen die Arbeit der Entwicklung auf den vierten Theil zurück. Der Satz (12.) bildet ein Correctiv gegen Fehler. Bei alledem wird die entwickelte Darstellung von (7.), die im Folgenden nöthig wird, nicht ohne bedeutende Rechnung mit Hülfe der zurücklaufenden Methode erlangt.

Man kann sich aber auch einer unabhängigen Bildungsweise bedienen, welche diese Vorarbeiten unnöthig macht und die Gruppenzahlen der Verbindungen zu den verschiedenen Summen einer und derselben (r^{ten}) Classe, also die einer bestimmten Potenz von z (z^r) zugehörigen Vorzahlen direct für sich auffinden lehrt, wozu man das Product (7.) auf folgende Weise darstellen kann:

$$(13.)\quad (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\dots(1+x^mz) = P = 1+v_1z+v_2z^2+v_3z^3\dots v_mz^m.$$

Hierin bezeichnen die v Functionen von x mit den zugehörigen Gruppenzahlen. Die Bestimmung der Grössen v_1, v_2 ... in der Entwicklung (13.) geschieht bekanntlich dadurch, dass man xz für z setzt. Dann ergiebt sich:

$$(14.)\quad \begin{cases} (1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\dots(1+x^{m+1}z) = \dfrac{1+x^{m+1}z}{1+xz}P \\ \qquad = 1+v_1xz+v_2x^2z^2+v_3x^3z^3\dots v_mx^mz^m. \end{cases}$$

Hieraus folgt zwischen je zwei auf einander folgenden Functionen v_{r-1} und v_r die Relation

$$(15.)\quad v_r = v_{r-1}\frac{x^r-x^{m+1}}{1-x^r},$$

und daraus ergeben sich für $v_1, v_2, \dots$ die Ausdrücke

$$(16.)\quad \begin{cases} v_1 = \dfrac{x-x^{m+1}}{1-x}, \\ v_2 = \dfrac{(x-x^{m+1})(x^2-x^{m+1})}{(1-x)(1-x^2)}, \\ v_3 = \dfrac{(x-x^{m+1})(x^2-x^{m+1})(x^3-x^{m+1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ v_r = \dfrac{(x-x^{m+1})(x^2-x^{m+1})\dots(x^r-x^{m+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}. \end{cases}$$

Die entwickelte Darstellung derselben bestimmt die in dem Ausdruck $C[sn;a_1,a_2,\dots a_m]^r$ angezeigte Gruppenzahl und führt nach (5.) auf eine endliche Gliederanzahl. Die Anzahl der Elemente, woraus die Summen gebildet werden sollen, ist auf m beschränkt. Sollen alle möglichen Elemente bei Erzeugung der verschiedenen Summen einer Classe mitwirken, so hat man $m=\infty$ zu setzen, unter der Annahme, dass $x<1$, fällt dann x^{m+1} aus den Formeln weg und (16.) geht über in

$$(17.)\quad v_r = \frac{x^{\frac{r(r+1)}{1.2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}.$$

Die Vorzahl von x^s in der entwickelten Darstellung von (17.) bestimmt dann die durch $C[sn;a_1,a_2,a_3,\dots]^r$ angedeutete Gruppenzahl, wobei alle möglichen Elemente zur Erzeugung der Summe mitwirken können. Aus (17.) erhält man:

$$v_1 = \frac{x}{1-x} = x+x^2+x^3+x^4+\cdots,$$

$$v_2 = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} = x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+\cdots,$$

mit folgendem Bildungsgesetz für die Vorzahlen

$$(18.)\quad \begin{cases} C[s(2n+3);a_1,a_2,\dots]^2 = n+1, \\ C[s(2n+4);a_1,a_2,\dots]^2 = n+1; \end{cases}$$

$$v_3 = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+\cdots,$$

mit folgendem Bildungsgesetze der Vorzahlen

$$(19.)\quad \begin{cases} C[s(6n);a_1,a_2,\ldots]^3=(3n-3)n+1, & C[s(6n+3);a_1,a_2,\ldots]^3=3n^2,\\ C[s(6n+1);a_1,a_2,\ldots]^3=(3n-2)n, & C[s(6n+4);a_1,a_2,\ldots]^3=(3n+1)n,\\ C[s(6n+2);a_1,a_2,\ldots]^3=(3n-1)n, & C[s(6n+5);a_1,a_2,\ldots]^3=(3n+2)n,\end{cases}$$

von welchen sechs Gleichungen sich die fünf letzten in folgende

$$C[s(6n+p);\ a_1,\ a_2,\ \ldots]^3\ =\ [3(n-1)+p]n$$

für $p=1,\ 2,\ \ldots\ 5$ zusammenfassen lassen.

Ebenso giebt v_4 entwickelt die Reihe

$$v_4=\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}=x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+\cdots$$

Das Bildungsgesetz der Vorzahlen dieser Reihe wird durch zwölf Gleichungen gegeben, deren Aufstellung indessen um so weniger nothwendig ist, als dieselben sich bereits in der in *Eulers* Introductio im 16. Kapitel gegebenen Tafel finden.

Mit diesen Prämissen ist auch die Gruppenanzahl der Verbindungen mit Wiederholungen zu irgend einer Summe n in der r^{ten} Classe durch folgende Relationen bestimmt:

$$(20.)\quad \begin{cases} C'[sn;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_m]^r\ =\ C\Big[s\Big(n+\frac{(r-1)r}{1.2}\Big);\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{m+r-1}\Big],\\ C'[sn;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]^r\ =\ C\Big[s\Big(n+\frac{(r-1)r}{1.2}\Big);\ a_1,\ a_2,\ \ldots\Big]^r.\end{cases}$$

§. 5.

Bei Erzeugung der Summen wirkt nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen jedes der vorkommenden Elemente nur einmal mit. Die Beantwortung des in den §. 2 und §. 4 aufgestellten Problems setzt indessen voraus, dass die unter sich verschiedenen aber gleichbezeichneten Elemente oder Kugeln *wiederholt*, jedoch in *beschränkter* Anzahl zu Erzeugung der Summen mitwirken. Dieses Moment muss in den Calcul aufgenommen werden. Es geschieht nach den in §. 4 aufgestellten Sätzen und drückt sich in folgenden zwei zusammengehörigen Darstellungen aus

$$(1.)\quad \begin{cases} (1+a_hx^hz)(1+b_hx^hz)(1+c_hx^hz)\ldots(1+k_hx^hz)\\ =\ 1+(a_h+b_h+c_h+\cdots+k_h)x^hz\\ \quad +(a_hb_h+a_hc_h+\cdots+i_hk_h)x^{2h}z^2\\ \quad +\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \quad +C(s(rh):a_h,\ b_h,\ c_h,\ \ldots,\ k_h)^rx^{rh}.z^r\\ \quad +\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{cases}$$

$$(2.)\qquad (1+x^h s)^k = 1+(k)_1 x^h s+(k)_2 x^{2h} s^2+\cdots+(k)_r x^{rh} s^r+\cdots.$$

Gleichung (1.) zeigt, wie die gleich bezeichneten Kugeln oder Elemente zu je einem, zu je zweien u. s. w. also nach den verschiedenen Classen und zu den verschiedenen Summen zusammen treten. Gleichung (2.) zählt die hiedurch entstehenden Summengruppen.

Soll demnach ein Element oder eine Kugel, welche die Zahl h führt, ein-, zweimal u. s. w. und höchstens k mal wiederholt, bei Erzeugung der fraglichen Summen mitwirken, so ist zur Bestimmung der bezüglichen Gruppenanzahlen der Ausdruck $(1+x^h s)^k$ in den Calcul einzuführen.

Durch Anwendung des Gesagten auf das in den §§. 2 und 4 unter a) aufgestellte Problem hat man folgendes Product

$$(3.)\qquad P = (1+xs)^{n_1}.(1+x^2 s)^{n_2}.(1+x^3 s)^{n_3}\ldots(1+x^m s)^{n_m}$$

in eine Reihe, geordnet nach den Potenzen von s zu entwickeln und die Vorzahlen von x^a zu bestimmen, welche denjenigen Potenzen von s zugehören, durch welche eine Lösung des Problems möglich ist. Hierdurch ist die dem Ereigniss günstige Anzahl der Fälle gefunden, und man hat dann zur Bestimmung der fraglichen Wahrscheinlichkeit mit der Zahl aller möglichen Fälle zu dividiren.

Dieses Product, worin die *Euler*sche Bezeichnungsweise beibehalten ist, findet sich bei *Poisson* pag. 185 in der Form

$$U = (1+ut)^{x_1}(1+ut^2)^{x_2}\ldots(1+ut^i)^{x_i}$$

unter einem bestimmten Integral. Hier hat es eine ganz verschiedene Bedeutung und dient zu anderem Zweck. Es löst die vorliegende Frage ganz allgemein und beschränkt sich bei der Anwendung auf das Rouge et Noire auf 10 Factoren, da jede von den ersten 9 Zahlen 24 mal, die Zahl 10 aber 96 mal wiederholt bei Erzeugung der Summen 31, 32, ... mitwirken kann. Nimmt man nun, im Sinne der oben eingeführten Verallgemeinerung an, dass die ersten h Zahlen q mal und die $(h+1)^{te}$ mq mal wiederholt zur Summenbildung mitwirken sollen, so fliesst aus (3.) folgende Darstellung

$$(4.)\qquad P = [(1+xs)(1+x^2 s)(1+x^3 s)\ldots(1+x^h s)(1+x^{h+1} s)^m]^q,$$

oder, wenn der Kürze wegen für die ersten h Factoren

$$(5.)\qquad (1+xs)(1+x^2 s)\ldots(1+x^h s) = 1+v_1 s+v_2 s^2+v^3 s^3+\cdots+v_h s^h$$

geschrieben wird, worin die v Functionen von x sind,

$$(6.)\qquad \begin{cases} P = [(1+v_1 s+v_2 s^2+\cdots+v_h s^h)(1+m x^{h+1} s+(m)_2 x^{2h+2} s^2+\cdots+(m)_m x^{mh+m} s^m)]^q \\ \quad = [1+b_1 s+b_2 s^2+b_3 s^3+\cdots+b_{h+m} z^{h+m}]^q \\ \quad = 1+M_1 s+M_2 s^2+M_3 s^3+M_4 s^4+\cdots \end{cases}$$

Die Bildung der v unterliegt den in §. 4 angegebenen Gesetzen, die der b folgendem

$$(7.)\qquad b_r = v_r + m v_{r-1} x^{h+1} + (m)_2 v_{r-2} x^{2h+2} + \cdots + (m)_p v_{r-p} x^{ph+p} \ldots,$$

die der M folgendem

$$(8.)\qquad M_s = q P'(sk)^1 + (q)_2 P'(sk)^2 + (q)_3 P'(sk)^3 \ldots (q)_k P'(sk)^s.$$

$P'(sk)^r$ zeigt die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe k in der r^{ten} Classe aus den Elementen b_1, b_2, b_3, ... b_{h+m} an, die als Functionen von x so unter einander zu verbinden sind, dass die Vorzahl von x^s (Zahl der günstigen Fälle) bestimmt wird. Bei der Anwendung auf das Rouge et Noire wird, wie bemerkt, $h = 9$, $m = 4$, $q = 24$. Zur Bestimmung der fraglichen Wahrscheinlichkeiten hat man folgende Werthe nöthig:

$$(9.)\qquad \begin{cases} v_1 = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^9, \\ v_2 = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + 4x^{11} + 3x^{12} + \cdots + x^{17}, \\ v_3 = x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 7x^{13} + 8x^{14} + 8x^{15} \\ \qquad + 8x^{16} + 7x^{17} + 7x^{18} + \cdots + x^{24}, \\ v_4 = x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 8x^{16} + 9x^{17} + 11x^{18} + 11x^{19} \\ \qquad + 12x^{20} + 11x^{21} + 11x^{22} + \cdots + x^{30}, \\ v_5 = x^5 v_4, \end{cases}$$

$$v_6 = x^{15} v_3,$$
$$v_7 = x^{25} v_2,$$
$$v_8 = x^{35} v_1,$$
$$v_9 = x^{45}.$$

Hieraus leiten sich die Werthe der b in folgender Weise ab

$$(10.)\qquad \begin{cases} b_1 = v_1 + 4x^{10}, \\ b_2 = v_2 + 4v_1 x^{10} + 6x^{20}, \\ b_3 = v_3 + 4v_2 x^{10} + 6v_1 x^{20} + 4x^{30}, \end{cases}$$

u. s. w., woraus sich ergiebt

$$(11.)\qquad \begin{cases} b_1 = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^9 + 4x^{10}, \\ b_1 = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + 8x^{11} + 7x^{12} + 7x^{13} + 6x^{14} \\ \qquad + 6x^{15} + 5x^{16} + 5x^{17} + 4x^{18} + 4x^{19} + 6x^{20}, \end{cases}$$

u. s. w. Die Berechnung der b habe ich bis b_7 fortgesetzt, b_8 und die höheren b wirken bei Erzeugung der Summe 31, auf deren Ermittelung es hauptsächlich bei dem Rouge et Noire ankommt, nicht mehr mit. Die Vorzahlen

aller Glieder der b, welche niedrigere Potenzen von x als die 31te enthalten, müssen bekannt sein, weil sonst die fraglichen Wahrscheinlichkeiten nach (8.) nicht bestimmt werden können. Da die Summe 31 in 4, 5, 6, ... Kartenumschlägen erzeugt werden kann, so hat man die Vorzahlen von x^{31} in (6.), welche den Potenzen z^4, z^5, ... zugehören, anzugeben, hierbei in (8.) allmälig $k=4$, 5, 6, ... zu schreiben und die nöthigen Substitutionen zu machen. Man erhält dann folgende Werthe für die fraglichen Wahrscheinlichkeiten

$$(12.)\quad \begin{cases} w_4 = \frac{1}{(13q)_4}[40q+736(q)_2+2130(q)_3+1528(q)_4], \\ w_5 = \frac{1}{(13q)_5}[79q+3544(q)_2+20631(q)_3+36120(q)_4+19230(q)_5], \\ w_6 = \frac{1}{(13q)_6}[46q+6456(q)_2+73707(q)_3+248364(q)_4 \\ \qquad\qquad +318330(q)_5+137772(q)_6], \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Auch die weiteren Wahrscheinlichkeiten w_7, w_8, ... w_{13} sind von mir vollständig ausgerechnet worden. Diese Formeln waren nöthig, um das Endergebniss bis auf 7 Decimalen richtig zu erhalten, doch wird ihr Abdruck der zu grossen Länge wegen unterlassen. Der Werth von q kann willkürlich angenommen werden, er bezeichnet die Zahl der Kugelarten oder Kartenfarben und giebt das Mittel, den Gang des Rouge et Noire von Anfang bis zu Ende durch alle Kartenfarben bis zur letzten zu untersuchen. Setzt man in (12.) $q=24$, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit, in den ersten 4 und mehr Kartenumschlägen die Summe 31 erscheinen zu sehen,

$$(13.)\quad \begin{cases} w_{31} = 0{,}05358344 + 0{,}000578482 \\ \quad + 0{,}05214118 + 0{,}000098736 \\ \quad + 0{,}02856175 + 0{,}000013972 \\ \quad + 0{,}01032207 + 0{,}000001657 \\ \quad + 0{,}002756334 + 0{,}000000165 \\ \quad = 0{,}14805778. \end{cases}$$

Diese Werthbestimmung findet sich in *Poissons* Abhandlung nicht.

§. 6.

Eine dritte Methode zur Bestimmung der fraglichen Wahrscheinlichkeit ergiebt sich dadurch, dass man das Product (4.) in §. 5. in zwei Theile theilt, die ersten h Factoren als Polynomium, den letzten als Binomium behandelt,

und nach den Potenzen von z entwickelt. Man erhält

$$(1.)\quad\begin{cases} P = [(1+xz)(1+x^2z)\dots(1+x^hz)]^q(1+x^{h+1}z)^{mq} \\ \quad = (1+Q_1z+Q_2z^2+Q_3z^3\dots)(1+mq.z+(mq)_2z^2+(mq)_3z^3+\cdots) \\ \quad = 1+(Q_1+mq.x^{h+1})z \\ \qquad +(Q_2+mq.Q_1x^{h+1}+(mq)_2x^{2h+2})z^2 \\ \qquad + \dots\dots\dots\dots \\ \qquad +(Q_r+mq\,Q_{r-1}x^{h+1}+(mq)_2Q_{r-2}x^{2h+2}\dots(mq)_rx^{rh+r})z^r \\ \qquad + \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Bildung der Q unterliegt folgendem Gesetze

$$(2.)\qquad Q_k = qP'(sk)^1+(q)_2P'(sk)^2+(q)_3P'(sk)^3\dots(q)_kP'(sk)^k,$$

wo jetzt $P'(k)^r$ die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe k in der r^{ten} Classe, aber nicht aus den Elementen b wie im vorigen Paragraphen, sondern aus den Elementen $v_1, v_2, \dots v_h$ bedeutet. Die Werthe der v für $h=9$ sind in (9.) §. 5. angegeben.

Die so eben angegebene Methode ist in der Beziehung allgemeiner als die in §. 5 mitgetheilte, dass auch der Werth von m (die Anzahl der Wiederholungen des Vorkommens der Zahl $h+1$) willkürlich angenommen werden kann. Die Exponenten von z deuten die Classen oder die Zahl der Umschläge an.

Bei Bestimmung der Vorzahl von x^n für eine bestimmte Potenz von z hat man die Vorzahlen der x, welche die genannte Potenz erzeugen, also x^n, $x^{n-h-1}.x^{h+1}$, $x^{n-2h-2}.x^{2h+2}$, ... zu beachten. Die Anwendung auf das Rouge et Noire verlangt daher die Kenntniss und Einführung der Vorzahlen von x^{31}, x^{21}, x^{11}, x^1 aus Gleichung (9.) des §. 5 in Gleichung (2.) dieses Paragraphen. Setzt man nun $h=9$, so erhält man zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der Summe 31 in 4, 5, ... Kartenumschlägen

$$(3.)\quad\begin{cases} w_4 = \dfrac{1}{((9+m)q)_4}[16(q)_2+66(q)_3+56(q)_4+(3q+24(q)_2+28(q)_3)mq \\ \qquad\qquad +(4q+8(q)_2)(mq)_2+q(mq)_3], \\ w_5 = \dfrac{1}{((9+m)q)_5}[5q+340(q)_2+2277(q)_3+4320(q)_4+2430(q)_5 \\ \qquad\qquad +(11q+222(q)_2+660(q)_3+480(q)_4)mq \\ \qquad\qquad +(5q+40(q)_2+45(q)_3)(mq)_2], \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzt man $q=24$, $m=4$, so erhält man die nämlichen Werthe, wie sie in (3.) §. 3 und (13.) §. 5 gefunden wurden, wodurch sich die Richtigkeit der entwickelten Ausdrücke bestätigt.

§. 7.

Das zweite, mit dem vorigen verwandte und unter b) in den §§. 2 und 4 aufgestellte Problem beantwortet sich durch die entwickelte Darstellung des Polynomiums

$$(1.)\quad \begin{cases} P = (a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_mx^m)^q \\ \quad = N_qx^q+N_{q+1}x^{q+1}+N_{q+2}x^{q+2}+\cdots+N_nx^n+\cdots \end{cases}$$

Man hat hierin die Vorzahl von x^n zu bestimmen, wodurch die Anzahl der günstigen Gruppen gefunden ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$(2.)\quad w_n = \frac{N_n}{s^q} = \frac{P'[sn;\, a_1, a_2, a_3, \dots a_m]^q}{s^q},$$

für $s=a_1+a_2+a_3\dots a_m$. Es bezeichnet $P'[sn;\, a_1, a_2, \dots a_m]^q$ die Anzahl derjenigen Gruppen, welche sich unter den Versetzungen mit unbeschränkten Wiederholungen aus den Elementen a_1, a_2, ... a_m zur q^{ten} Classe finden und die Summe n liefern. Diese Bestimmung der Wahrscheinlichkeit gilt für die Voraussetzung, dass aus einer Urne, welche die genannten Kugelarten enthält, q Kugeln gezogen werden und die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird.

Die Auswerthung des Ausdrucks $P'[sn;\, a_1, a_2, \dots a_m]^q$ kann nach dem Inhalt der §§. 2 oder 4 geschehen. Damit ist aber die Sache nicht gefördert. Einfacher stellt sich das Problem, wenn man die ersten Kugelarten von der letzten trennt und jene unter sich gleich setzt. Dann stellt sich die Aufgabe unter folgender Form dar.

(3.) In einer Urne befinden sich a Kugeln mit der Zahl 1, eben so viele mit der Zahl 2, 3, ... h und ma Kugeln mit der Zahl $(h+1)$ bezeichnet; q Kugeln werden einzeln gezogen, unter Rückgabe der gezogenen Kugel in die Urne. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahlen der gezogenen Kugeln die Summe n erzeugen?

Die Zahl der günstigen Fälle bestimmt sich nach (1.) durch die Vorzahl von x^n in der entwickelten Darstellung von

$$(4.)\quad \begin{cases} P = (ax+ax^2+\cdots+ax^h+max^{h+1})^q \\ \quad = a^q(x+x^2+x^3+\cdots+x^h+mx^{h+1})^q = a^q(M_qx^q+M_{q+1}x^{q+1}\dots). \end{cases}$$

Die fragliche Wahrscheinlichkeit ist, da $ah+ma$ Kugeln in der Urne vor-

handen sind:

$$(5.)\qquad w_n = \frac{a^q . M_n}{(a(h+m))^q} = \frac{M_n}{(h+m)^q}.$$

Da a sich weghebt, so ist es nicht weiter zu berücksichtigen und man erhält folgende zwei Formen aus (4.)

$$(6.)\qquad P = \left(\frac{x-x^{h+1}}{1-x} + mx^{h+1}\right)^q = \frac{x^q}{(1-x)^q}(1+(m-1)x^h - mx^{h+1})^q,$$

$$(7.)\qquad P = \frac{x^q}{(1-x)^q}[1-(x^h - m(x^h - x^{h+1}))]^q,$$

in deren entwickelter Darstellung die Vorzahl von x^n zu bestimmen ist. Zu dem Ende hat man

$$(8.)\qquad \frac{x^q}{(1-x)^q} = x^q + (q)_{q-1}x^{q+1} + (q+1)_{q-1}x^{q+2} + \cdots + (n-1)_{q-1}x^n + \cdots$$

In (6.) entwickle man $(1+(m-1)x^h - mx^{h+1})^q$ als Binomium und multiplicire diese Entwickelung mit (8.), so erhält man für die Vorzahl von x^n folgenden Ausdruck

$$(9.)\qquad \left\{\begin{aligned} M_n = (n-1)_{q-1} &+ q[(m-1)(n-h-1)_{q-1} - m(n-h-2)_{q-1}] \\ &+ (q)_2[(m-1)^2(n-2h-1)_{q-1} - 2(m-1)m(n-2h-2)_{q-1} \\ &\qquad + m^2(n-2h-3)_{q-1}] \\ &+ (q)_3[(m-1)^3(n-3h-1)_{q-1} - 3(m-1)^2 m(n-3h-2)_{q-1} \\ &\qquad + 3(m-1)m^2(n-3h-3)_{q-1} - m^3(n-3h-4)_{q-1}] \\ &\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}\right.$$

Eine bequemere Darstellung leitet sich aus (7.) ab. Wird $[1-(x^h - m(x^h - x^{h+1}))]^q$ als Binomium entwickelt und mit (8.) multiplicirt, so bestimmt sich die Vorzahl von x^n durch die Gleichung

$$(10.)\qquad \left\{\begin{aligned} M_n = (n-1)_{q-1} &- q\left[(n-h-1)_{q-1} - m\left|\begin{array}{l} \ \ (n-h-1)_{q-1} \\ -(n-h-2)_{q-1} \end{array}\right|\right] \\ &+ (q)_2\left[(n-2h-1)_{q-1} - 2m\left|\begin{array}{l} \ \ (n-2h-1)_{q-1} \\ -(n-2h-2)_{q-1} \end{array}\right| + m^2\left|\begin{array}{l} \ \ (n-2h-1)_{q-1} \\ -2(n-2h-2)_{q-1} \\ +\ (n-2h-3)_{q-1} \end{array}\right|\right] \\ &- (q)_3\left[(n-3h-1)_{q-1} - 3m\left|\begin{array}{l} \ \ (n-3h-1)_{q-1} \\ -(n-3h-2)_{q-1} \end{array}\right|\right. \\ &\qquad\qquad \left. + 3m^2\left|\begin{array}{l} \ \ (n-3h-1)_{q-1} \\ -2(n-3h-2)_{q-1} \\ +\ (n-3h-3)_{q-1} \end{array}\right| - m^3\left|\begin{array}{l} \ \ (n-3h-1)_{q-1} \\ -3(n-3h-2)_{q-1} \\ +3(n-3h-3)_{q-1} \\ -\ (n-3h-4)_{q-1} \end{array}\right|\right] \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Durch Benutzung der Gleichung

(11.) $(p+k)_{q-1}-k(p+k-1)_{q-1}+(k)_2(p+k-2)_{q-1}+\cdots+(-1)^k(p)_{q-1}=(p)_{q-k-1}$

lässt sich, wenn man für p die niedrigste Basis in den zusammengehörigen Fakultäten und für k die entsprechenden Werthe 1, 2, ... setzt, die Darstellung (10.) in folgende umformen:

$$(12.)\quad\begin{cases} M_n=(n-1)_{q-1}-q[(n-h-1)_{q-1}-m(n-h-2)_{q-2}] \\ \qquad+(q)_2[(n-2h-1)_{q-1}-2m(n-2h-2)_{q-2}+m^2(n-2h-3)_{q-3}] \\ \qquad-(q)_3[(n-3h-1)_{q-1}-3m(n-3h-2)_{q-2}+3m^2(n-3h-3)_{q-3} \\ \qquad\qquad-m^3(n-3h-4)_{q-4}] \\ \qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Sollen die Gruppenzahlen der Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe n in der q^{ten} Classe unter den gegebenen Bedingungen bestimmt werden, so hat man (9.) oder (12.) mit a^q zu multipliciren.

Setzt man $h=9$, $m=4$ und für q allmälig die Werthe 4, 5, 6, ..., so erhält man aus (12.) und (5.) für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe 31 in 4 und mehr Ziehungen erscheinen werde, wenn die gezogene Kugel jedesmal in die Urne zurückgeworfen wird:

$$(13.)\quad\begin{cases} w_{31} = 0{,}05349952+0{,}0006465756 \\ \qquad+0{,}05179198+0{,}000119278 \\ \qquad+0{,}02854309+0{,}0000187340 \\ \qquad+0{,}01052435+0{,}0000025439 \\ \qquad+0{,}00291452+0{,}00000030179 \\ \qquad\qquad+0{,}0000000314 \\ \quad=0{,}14806092. \end{cases}$$

die vier ersten Werthe wurden schon in (6.) §. 3 auf andere Weise gefunden.

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen desselben Ereignisses bei dem Rouge et Noire ist nach (13.) §. 5 um ein Unbedeutendes kleiner, was sich leicht aus der Natur der Sache erklärt, da dort eine beschränkte Zahl der Kartenfarben mitwirkt. Sie wird um so grösser werden, je mehr sich die Zahl der mitwirkenden Farben steigert, und würde mit der hier erhaltenen zusammenfallen, wenn die Zahl der Farben unendlich gross wäre. Hiernach charakterisirt sich der so eben in (13.) gefundene Werth als Grenzwerth für die bei dem Rouge et Noire möglichen Wahrscheinlichkeitswerthe für das Eintreffen desselben Ereignisses.

Zu bemerken ist, dass die Werthe der drei ersten Summanden in (13.) §. 5 etwas grösser, dagegen die der späteren alle kleiner, als die hier angegebenen sind, und dass der genannte Ueberschuss durch die spätern Ziehungen bedingt ist.

Da a^q nach (5.) aus dem Calcul wegfällt und a die Zahl der mitwirkenden Kugelarten bezeichnet, so ergiebt sich hieraus folgender bemerkenswerthe Satz.

(14.) Sind in einer Urne h mit den Zahlen $1, 2, \ldots h$ und m weitere mit $h+1$ bezeichnete Kugeln enthalten, zieht man aus derselben je eine Kugel, welche unmittelbar darauf in die Urne zurückgeworfen wird, und soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass die gezogenen Kugeln in einer beliebigen Anzahl von Ziehungen die Summe n liefern, so bleibt die Wahrscheinlichkeit unverändert, wenn für jede in der Urne vorhandene Kugel ein und dieselbe Anzahl von Kugeln der nämlichen Art gesetzt wird. Der Satz, dass die Wahrscheinlichkeit bei der vorliegenden Klasse von Problemen lediglich von dem Verhältniss der Anzahlen abhängt, in welchen die verschiedenen Kugelarten vorhanden sind, gilt natürlich allgemein.

§. 8.

Eine dritte noch bequemere Methode ergiebt sich auf folgende Art.

Nach dem Inhalt des vorigen Paragraphen wird die fragliche Wahrscheinlichkeit gefunden, wenn die Vorzahl von x^n in der entwickelten Darstellung der verschiedenen Potenzen von

$$(1.)\qquad R = x+x^2+x^3+\cdots x^h+mx^{h+1} = \frac{x+(m-1)x^{h+1}-mx^{h+2}}{1-x}$$

bestimmt und dann durch die zugehörige Potenz von $(h+m)$ getheilt wird. Die Beantwortung der vorliegenden Frage erfordert daher die Entwicklung der Ausdrücke

$$\left(\frac{R}{h+m}\right)^1,\quad \left(\frac{R}{h+m}\right)^2,\quad \left(\frac{R}{h+m}\right)^3,\quad \ldots,$$

die Ermittelung der Vorzahl von x^n in jedem einzelnen und ihre Summirung. Die Operationen können dahin zusammengefasst werden, dass die Reihe

$$(2.)\qquad 1+\frac{R}{h+m}+\left(\frac{R}{h+m}\right)^2+\left(\frac{R}{h+m}\right)^3+\left(\frac{R}{h+m}\right)^4+\cdots = \frac{1}{1-\dfrac{R}{h+m}}$$

gebildet, summirt, nach Potenzen von x entwickelt und die Vorzahl von x^n bestimmt wird. Unter Einführung der Bezeichnung

$$r = \frac{1}{h+m}$$

ergiebt sich für die rechte Seite von (2.):

$$\frac{1}{1-rR} = \frac{1}{1-r\dfrac{x+(m-1)x^{h+1}-mx^{h+2}}{1-x}}$$

$$= \frac{1-x}{1-(1+r)x-r[(m-1)x^{h+1}-mx^{h+2}]}.$$

Schreibt man ferner $1+r = 1+\dfrac{1}{h+m} = \dfrac{h+m+1}{h+m} = \nu$, so hat man schliesslich

$$(3.)\qquad \frac{1}{1-rR} = \frac{1-x}{1-\nu x-r[(m-1)x^{h+1}-mx^{h+2}]}$$

in eine Reihe zu entwickeln und daraus die Vorzahl von x^n zu bestimmen, wodurch die gesuchte Wahrscheinlichkeit gefunden ist.

Nun ist

$$\frac{1}{1-rR} = \frac{1-x}{1-\nu x} + \frac{(1-x)r[(m-1)x^{h+1}-mx^{h+2}]}{(1-\nu x)^2}$$
$$+\frac{(1-x)r^2[(m-1)x^{h+1}-mx^{h+2}]^2}{(1-\nu x)^3} + \frac{(1-x)r^3[(m-1)x^{h+1}-mx^{h+2}]^3}{(1-\nu x)^4}$$

. . . .

Die Nenner führen auf Reihen, welche in der Form

$$\frac{1}{(1-\nu x)^p} = 1+(p)_{p-1}\nu x+(p+1)_{p-1}\nu^2x^2+(p+2)_{p-1}\nu^3x^3\ldots$$
$$\ldots(n+p-1)_{p-1}\nu^nx^n+\cdots$$

enthalten sind. Wird nun hierin $p = 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt und werden die entstehenden Reihen nach einander mit $1-x$, $(1-x)r[(m-1)x^{h+1}-mx^{h+2}]$ $(1-x)r^2[(m-1)x^{h+1}-mx^{h+2}]^2$, ... multiplicirt und die Vorzahl von x^n in jedem Ausdruck bestimmt, das Resultat gehörig geordnet, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit die Summe n in den entsprechenden Ziehungen erscheinen zu sehen, folgenden Ausdruck

$$(4.)\left\{\begin{array}{l}
w_n = r.\nu^{n-1}+r[(m-1)(n-h)\nu^{n-h-1}-(2m-1)(n-h-1)\nu^{n-h-2} \\
\qquad\qquad +m(n-h-2)\nu^{n-h-3}] \\
\quad +r^2[(m-1)^2(n-2h)_2\nu^{n-2h-2}-(3m-1)(m-1)(n-2h-1)_2\nu^{n-2h-3} \\
\qquad +(3m-2)m(n-2h-2)_2\nu^{n-2h-4}-m^2(n-2h-3)_2\nu^{n-2h+5}] \\
\quad +r^3[(m-1)^3(n-3h)_3\nu^{n-3h-3}-(4m-1)(m-1)^2(n-3h-1)_3\nu^{n-3h-4} \\
\qquad +3(2m-1)(m-1)m(n-3h-2)_3\nu^{n-3h-5}-(4m-3)m^2(n-3h-3)_3\nu^{n-3h-6} \\
\qquad\qquad +m^3(n-3h-4)_3\nu^{n-3h-7}] \\
\quad +r^4[(m-1)^4(n-4h)_4\nu^{n-4h-4}-(5m-1)(m-1)^3(n-4h-1)_4\nu^{n-4h-5} \\
\qquad +2(5m-2)(m-1)^2m(n-4h-2)_4\nu^{n-4h-6}-2(5m-3)(m-1)m^2(n-4h-3)_4\nu^{n-4h-7} \\
\qquad +(5m-4)m^3(n-4h-4)_4\nu^{n-4h-8}-m^4(n-4h-5)_4\nu^{n-4h-9}] \\
\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

Setzt man hierin $n = 31$, $m = 4$, $h = 9$, $v = \frac{4}{13}$ und $r = \frac{1}{13}$, so bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit durch 4 Glieder und man erhält

$$(5.)\qquad w_{31} = 0{,}1480609$$

wie in (13.) §. 7. Die Werthe von n, h und m können willkürlich gewählt werden. Auf gleiche Weise lässt sich w_{32}, w_{33}, ... bestimmen. Die auf zwei verschiedene Arten hier bestimmte Wahrscheinlichkeit hat *Poisson* pag. 198 zu $w_{31} = 0{,}148062$ angegeben, also mit einer Abweichung in der sechsten Decimale.

§. 9.

Wegen weiterer Folgerungen wird es nöthig, den Zusammenhang, worin die Wahrscheinlichkeiten der unter a) und b) in dem §. 2 und §. 4 genannten Probleme stehen, kurz nachzuweisen. Darauf, dass die Wahrscheinlichkeiten für b) die Grenzwerthe für a) bilden, wurde schon in §. 7 hingewiesen. Dies folgt einfach, wenn in (12.) §. 5 die Zahl der Kartenfarben also q unendlich gross gesetzt wird. Dann gehen die Facultäten in Potenzen über, alle Glieder mit Ausnahme der letzten verschwinden, und man erhält genau die bereits in (6.) §. 3 gefundenen und in den einzelnen Summanden der rechten Seite von (13.) §. 7 wiederum eingeführten Werthe von w_4, w_5, ...

Der Zusammenhang, in welchem die Werthe jeder einzelnen als Summand in dem Endergebniss enthaltenen Wahrscheinlichkeit unter den beiden Hypothesen stehen, lässt sich aus der Vergleichung der Gebilde in (2.) und (5.) des §. 2 erkennen. Sie zerfallen in folgende $\frac{q^r}{s(s-1)\dots(s-r+1)}$, $\frac{q(q-1)\dots(q-r+1)}{s(s-1)\dots(s-r+1)}$ und $\frac{q^r}{s^r}$, wovon die letzte Form in (5.) vorkommt. Die Vorzahlen der drei Gebilde sind in beiden Gleichungen dieselben und können daher bei der Vergleichung unberücksichtigt bleiben. Nun ist

$$(1.)\qquad \frac{q^r}{s(s-1)\dots(s-r+1)} > \frac{q^r}{s^r},$$

$$(2.)\qquad \frac{q(q-1)\dots(q-r+1)}{s(s-1)\dots(s-r+1)} < \frac{q^r}{s^r},$$

letzteres um so mehr, da $\frac{q-x}{s-x} = \frac{q}{s} - \frac{(s-q)x}{s(s-x)}$, also, wenn $q < s$, jeder Factor in (2.) mit Ausnahme des ersten kleiner als $\frac{q}{s}$ ist. Bei beständig wachsenden Werthen von q und s hat man

$$(3.)\qquad \text{Lim.}\frac{q^r}{s(s-1)\dots(s-r+1)} = \frac{q^r}{s^r}.$$

$$(4.)\qquad \text{Lim.}\frac{q(q-1)\dots(q-r+1)}{s(s-1)\dots(s-r+1)} = \frac{q^r}{s^r}.$$

Diesen Grenzwerthen nähert man sich um so schneller, je kleiner r ist. Aus den in (1.) bis (4.) liegenden Gesetzen, welche sich auch in den Zahlenwerthen (3.), (4.), (5.) §. 3 erkennen lassen, entnimmt man Folgendes:

(5.) Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten, eine bestimmte Summe (n) zu erhalten, sind im *Fallen* begriffen, wenn die Kugelarten oder Kartenfarben wachsen, so lange die Ziehungszahlen *klein* sind, im vorliegenden Problem bei 4 und 5 Ziehungen. Bei 6 Ziehungen tritt zuerst ein Wachsen, dann ein Fallen ein.

(6.) Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten wachsen beständig, wenn die Kartenfarben wachsen, sobald die Ziehungszahlen eine gewisse Grenze überschritten haben, im vorliegenden Problem für 7 und mehr Ziehungen. Hierüber ist ausser (3.), (4.), (5.) §. 3 auch (13.) §. 7 zu vergleichen.

Da die Zahl der Ziehungen oder Kartenumschläge mit dem Wachsen der Kartenfarben immer grösser wird, und die Zahl der wachsenden Werthe sich beständig mehrt, so folgt weiter:

(7.) Die Summen der Wahrscheinlichkeiten, welche das Eintreffen einer bestimmten Summe (n) bedingen, werden im *Wachsen* begriffen sein, wenn die Zahl der Kartenfarben oder Kugelarten und Ziehungen zunehmen. unter der Voraussetzung, dass die gezogene Kugel nicht in die Urne zurückgeworfen wird, oder das umgeschlagene Blatt nicht zurückgenommen wird (Problem a)).

(8.) Die Wahrscheinlichkeitssummen in (7.) nähern sich bei beständiger Zunahme der Kugelarten oder Kartenfarben denjenigen, welche entstehen, wenn die gezogene Kugel zurückgeworfen, oder die umgeschlagene Karte wieder aufgenommen wird (Problem b)), und die Werthe der letzteren (Problem b)) bilden die Grenzwerthe für die der ersteren (Problem a)). Bei unendlich vielen Kugelarten oder Kartenfarben sind die Wahrscheinlichkeitssummen in beiden Problemen gleich.

Das Gesagte bestätigt sich durch folgende Zusammenstellung, worin die Wahrscheinlichkeiten, die Summe 31 zu erhalten, durch w_1, w_2, w_3, w_4, w_{23}, w_{24}, w_∞ bezeichnet sind, wenn im Rouge et Noire die Blätter von 1, 2, 3, 4, 23, 24 oder unendlich vielen Farben in Betracht kommen.

$$(9.)\quad \begin{cases} w_1 = 0{,}14763015\ldots & w_{23} = 0{,}14805752\ldots \\ w_2 = 0{,}14788182\ldots & w_{24} = 0{,}14805778\ldots \\ w_3 = 0{,}14797901\ldots & w_\infty = 0{,}14806092\ldots \\ w_4 = 0{,}14801266\ldots & \end{cases}$$

Die letzte (w_∞) ist der Grenzwerth für die früheren. Man erhält sie, wenn $q = 1, 2, 3, \ldots$ in (12.) §. 5 gesetzt wird. Diese Sätze finden auch in anderen hierher gehörigen Fällen ihre volle Bestätigung.

§. 10.

Der Vortheil der Bank beruht in den zwei vorliegenden Problemen a) und b) §§. 2 und 4 auf dem wiederholten Eintreffen einer bestimmten Summe (n) in zwei aufeinander folgenden Ziehungsreihen. Da in dem Probleme a) die erzeugenden Elemente mit den Ziehungen sich vermindern, in b) aber die gleichen bleiben, so ist die Wahrscheinlichkeit für den Wiedereintritt der Summe n bei dem Problem a)

$$(1.)\quad w_r = w_n . w_n',$$

bei dem Problem b)

$$(2.)\quad w_r = (w_n)^2.$$

In beiden Fällen beträgt der Vortheil die Hälfte aller Einsätze a und ist somit

$$(3.)\quad v = w_r . \tfrac{1}{2}a.$$

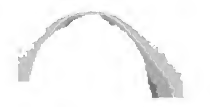
Die Wahrscheinlichkeit für den Wiedereintritt der Summe 31 in dem Problem b) und der zugehörige Vortheil ist nach (13.) §. 7

$$(4.)\quad \begin{cases} w_r = 0{,}14806092^2 = 0{,}021922036, \\ v \;= w_r . \tfrac{1}{2}a = 0{,}010961018 . a. \end{cases}$$

Dieser Vortheil beträgt daher etwas mehr als 1 Procent aller Einsätze und dies ist zugleich nach §. 9 der Grenzwerth für den Vortheil der Bank bei dem Rouge et Noire.

Der Vortheil der Bank bei dem Rouge et Noire bestimmt sich nach §. 2 in folgender Weise. Ist die Summe n in der ersten Kartenreihe erschienen, so muss sie auch in der zweiten bei verminderter Kartenanzahl unter den gleichen Bedingungen in $t = z_1 + z_2 + \cdots + z_k$ Ziehungen erscheinen. Man hat daher den dort erhaltenen Ausdruck mit dem correspondirenden

$$(5.)\quad w_n' = \frac{(x_1 - a_1)_{z_1} (x_2 - a_2)_{z_2} \ldots (x_i - a_i)_{z_k}}{(s-p)_t}$$



zu multipliciren und erhält

$$(6.)\quad \begin{cases} w_r = \dfrac{(x_1)_{a_1}\cdot(x_2)_{a_2}\ldots(x_i)_{a_i}}{(s)_p} \times \dfrac{(x_1-a_1)_{z_1}(x_2-a_2)_{z_2}\ldots(x_i-a_i)_{z_k}}{(s-p)_t} \\ \quad = \dfrac{(x_1)_{a_1+z_1}\cdot(x_2)_{a_2+z_2}\ldots(x_i)_{a_i+z_k}}{(s)_{p+t}} \end{cases}$$

unter folgenden zusammengehörigen Bedingungen

$$(7.)\quad \begin{cases} s = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_i, \\ p = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_i, \\ n = 1a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ia_i, \end{cases}$$

$$(8.)\quad \begin{cases} t = z_1+z_2+z_3+\cdots+z_k, \\ n = 1z_1+2z_2+3z_3+\cdots+kz_k. \end{cases}$$

Man hat hiernach mit jedem aus (7.) hervorgehenden auflösenden Falle alle aus (8.) hervorgehenden in Verbindung zu bringen und die entstehenden Zahlenwerthe zu summiren.

Die zweite Auflösung ergiebt sich aus den §§. 5 und 6, indem man die Factoren des dort angegebenen Products, welche in der ersten Ziehungsreihe eine Auflösung geben, ausscheidet und dann die auflösenden Fälle des so verkürzten Products für die zweite Ziehungsreihe bestimmt. Dies deutet sich auf folgende Weise an

$$(9.)\qquad w_r = \frac{1}{(312)_{q+t}}[(1+xz)(1+x^2z)\ldots(1+x^9z)(1+x^{10}z)^4]^{q+t},$$

wo q und t veränderlich ist und jedes die Werthe 4, 5, 6, ... für sich durchläuft. Hat q einen bestimmten Werth erhalten, so tritt t hinzu und durchläuft für sich alle zulässigen Werthe.

Beide Auflösungsarten sind sehr mühevoll und mögen die Geduld und Kraft zur Ausführung erschöpfen. Diese Arbeit ist nicht nöthig, da die Frage durch die Gleichungen in (12.) §. 5 gelöst ist. Durch die daraus fliessenden und in (9.) §. 9 angegebenen Resultate lässt sich der Gang des Spiels vom Umschlag der ersten Kartenreihe bis zu den letzten Blättern verfolgen, wenn, wie geschah, statt q allmälig die Werthe 24, 23, ... 4, 3, 2, 1 gesetzt werden.

Ist nämlich die Summe 31 durch Umschlag der ersten Kartenreihe (4, 5, ... 13 ... Blätter), deren Wahrscheinlichkeit $w_{31} = 0{,}1480577\ldots$ beträgt, erschienen, so ist die Wahrscheinlichkeit für den Wiedereintritt dieser Summe in der um so viele Blätter verkürzten zweiten Kartenreihe $w'_{31}=0{,}1480575$.

Beide Werthe differiren in der siebenten Stelle. Da nun die Wahrscheinlichkeiten mit dem Ausscheiden der gezogenen Karten nach §. 9 fallen, so werden die Wahrscheinlichkeitswerthe für die möglichen Zwischenfälle innerhalb der Grenzen der genannten Wahrscheinlichkeiten liegen. Daher bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der Summe 31 in den zwei ersten Kartenreihen und hieraus der zugehörige Vortheil der Bank zu

$$(10.)\quad \begin{cases} w_r = 0{,}1480577\ldots \times 0{,}1480575 = 0{,}02192105, \\ v \;= 0{,}0109605.a, \end{cases}$$

also um ein Unbedeutendes kleiner als der Grenzwerth (4.).

Der Vortheil wird sich annähernd lange auf dieser Höhe erhalten, denn wenn die Karten bis auf 52 (Blätter eines vollständigen Spiels) umgeschlagen sind, so wird er sich auf höchstens $v = 0{,}01095138.a$ stellen.

Um genaue Resultate für den Schluss des Spieles zu erhalten, habe ich nach §. 2 die Wahrscheinlichkeit für den Wiedereintritt der Summe 31 unter der Voraussetzung berechnet, dass noch 13 Blätter und 11 Blätter derselben Farbe (im letzten Falle darunter zwei Zehner, in welchem Falle der Wiedereintritt von 31 noch möglich ist) vorhanden sind, und folgende Resultate für diese Fälle gefunden

$$(11.)\quad w_r = 0{,}020390720\ldots,\quad v = 0{,}01019536.a,$$

$$(12.)\quad w_r = 0{,}018326118\ldots.\quad v = 0{,}00916305.a.$$

Hiernach liegt der Vortheil der Bank bei dem Rouge et Noire zwischen 1,096 und 0,916 Procent aller Einsätze, der gegen Ende des Spiels in besonderen Fällen noch geringer werden kann, denn es sind noch manche Combinationen denkbar, worin bei einer noch geringeren Kartenanzahl (z. B. 8) der Wiedereintritt der Summe 31 möglich ist. Die Wahrscheinlichkeit aber für das Auftreten solch specieller Fälle ist so gering, dass dieselben nicht weiter in Betracht gezogen zu werden brauchen.

§. 11.

Die Sätze des vorigen Paragraphen ruhen auf der Voraussetzung, dass das Spiel einen regelmässigen Verlauf nimmt, was ganz mit den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und namentlich mit dem Satze übereinstimmt, dass das Eintreffen der Ereignisse bei häufiger Wiederholung in directem Verhältnisse zu den ihr Eintreffen bedingenden Ursachen steht; wobei jedoch mancherlei sich dem Calcul entziehende Abweichungen nicht ausgeschlossen

sind, welche die Gültigkeit des allgemeinen Gesetzes nicht stören (dieses Journal Bd. 30, pag. 251 u. f.).

Poisson behauptet pag. 191 seiner Abhandlung, dass die Wahrscheinlichkeit für den Wiedereintritt der Summe 31 zu Anfange des Spiels die gleiche sei wie im zehnten oder jedem anderen Male. Dies stimmt mit den hier erhaltenen Resultaten nicht überein, und dürfte sich auch nicht rechtfertigen lassen, da mit jedem neuen Male sich die erzeugenden Elemente ändern, und die Wahrscheinlichkeit für den Wiedereintritt nur dann die gleiche bleibt, wenn die Zahl der Karten bei jeder Ziehung die gleiche bleibt, oder als unendlich gross angenommen wird. Er giebt wohl zu, dass sich die Wahrscheinlichkeiten im Laufe des Spiels ändern, aber nur für die den Gang des Spieles und die erschienenen Karten kennenden Spieler, aber nicht für die damit unbekannten Personen. Diese Unterscheidung ist nicht zutreffend, denn die Karten-Umschläge bedingen die Aenderung in gleicher Weise für den Spieler, wie für den unbetheiligten Zuschauer.

Poisson bestimmt die Wahrscheinlichkeit für den Wiedereintritt der Summe 31 für das Problem b) zu

$$(1.) \qquad w_r = 0{,}148062^2 = 0{,}02192235,$$

etwas höher als in (4.) §. 10, und die bei dem Rouge et Noire (Problem a)) zu

$$(2.) \qquad w_r = \frac{s+1}{s} w_{31}^2 = \tfrac{313}{312} 0{,}148062^2 = 0{,}0219926$$

für $s = 312$, und nach Abzug des von ihm vernachlässigten Gliedes zu

$$(3.) \qquad w_r = 0;021967,$$

den Vortheil der Bank also zu

$$(4.) \qquad v = 0{,}0109835 . a$$

und somit nach (3.) und (4.) *grösser*, als der hierfür mögliche Grenzwerth ist. Wenn auch die hieraus sich ergebende Differenz erst in der fünften Stelle auftritt, so charakterisirt sie sich doch entweder als Folge eines unrichtigen Rechnungsresultats, oder einer unrichtigen Annahme. Derselbe Fehler wiederholt sich bei *Poisson* pag. 205.

§. 12.

Es ist noch übrig, die weiter hierher gehörigen Fragen zu beantworten. Da die Werthbestimmung der Wahrscheinlichkeiten für beide Probleme a) und b) sehr mühevoll ist, so lohnt es sich, Methoden anzugeben, wie die fraglichen Werthe von einander durch Addition und Subtraction abgeleitet werden können.

Betrachtet man zuerst das Problem b), wenn die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird, und nimmt an, dass die Wahrscheinlichkeiten für 10 auf einander folgende Summen (etwa 21, 22, ... 30) gefunden seien, so wird die Wahrscheinlichkeit für die nächst höhere Summe 31 dadurch bestimmt werden, dass in der vorhergehenden Ziehung eine der genannten Summen erscheint, und zu ihr in der letzten Ziehung die diese Summe erzeugende Zahl (10 zu 21, 9 zu 22 u. s. w.) tritt. Der Zutritt der Zahl 10 wird durch $w = \frac{4}{13}$, derjenige der übrigen 9 Zahlen durch $w = \frac{1}{13}$ bedingt. Hiernach ist:

$$w_{31} = \tfrac{1}{13}(4.w_{21} + w_{22} + w_{23} + \cdots + w_{30}).$$

Das Nämliche gilt bei jeder anderen Summe und jeder beliebigen Anzahl der erzeugenden Elemente oder Kugeln. Sind daher in einer Urne mehrere Kugelarten enthalten, von denen die ersten h Arten die Zahlen 1, 2, 3, ... h und die letzte die Zahl $(h+1)$ aber $m$mal tragen, so hat man im Allgemeinen

$$(1.)\qquad w_{n+h+1} = \frac{1}{h+m}(mw_n + w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots + w_{n+h})$$

und hieraus

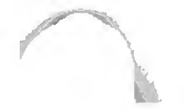
$$(2.)\qquad w_n = \frac{1}{m}[(h+m)w_{n+h+1} - (w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots + w_{n+h})]$$

für jedes m, h und n. Da sich die Wahrscheinlichkeiten der ersten 10 Summen leicht aus den Gleichungen der §§. 7 und 8 ableiten lassen, so kann man aus (1.) allmälig die der höheren Summen finden und erhält:

(3.)

$w_{20} = 0{,}2129024$	$w_{31} = 0.1480609$
$w_{21} = 0{,}1398469$	$w_{32} = 0.1492944$
$w_{22} = 0{,}1424546$	$w_{33} = 0.1503863$
$w_{23} = 0.1449054$	$w_{34} = 0.1513327$
$w_{24} = 0{,}1471802$	$w_{35} = 0.1521320$
$w_{25} = 0{,}1492599$	$w_{36} = 0.1527832$
$w_{26} = 0{,}1511244$	$w_{37} = 0.1532875$
$w_{27} = 0{,}1527563$	$w_{38} = 0{,}1536463$
$w_{28} = 0{,}1541344$	$w_{39} = 0.1538636$
$w_{29} = 0{,}1552407$	$w_{40} = 0.1567827$
$w_{30} = 0{,}1683471$	$w_{41} = 0{,}1512117$

u. s. w. Diese Wahrscheinlichkeiten zeigen ein bemerkenswerthes Maximum für w_{20}, w_{30}, w_{40}; und dann ein rasches, jedoch immer kleiner werdendes Fallen, worauf ein beständiges Steigen eintritt. Am stärksten ist das Maximum



bei $w_{40} = 0{,}3806406$; bei höheren Summen w_{42}, w_{43}, ... scheinen sich die Wahrscheinlichkeiten mehr der Gleichheit zu nähern.

Anders verhalten sich die Werthe der Wahrscheinlichkeiten, wenn man von einer bestimmten Summe (31 bei dem Rouge et Noire) ausgeht. Die zum Spiele gehörigen Summen bilden dann einen Cyclus (31, 32, ... 40), ausser welchen keine andere erscheinen kann. Es ist dann zu berücksichtigen, dass in jeder höheren, zum Spielcyclus gehörigen Summe (32, 33, ... 40) Fälle vorkommen, die schon in denen der niederen enthalten sind und daher ausgeschieden werden müssen. So sind in der Summe 32 alle Fälle mitgezählt, die durch Zutritt der Zahl 1 zu der Summe 31 die von 32 erzeugen. Dasselbe gilt von 33 und jeder höheren Summe bis 40. Bezeichnet man die einem solchen Cyclus zugehörigen Wahrscheinlichkeiten durch u_{31}, u_{32}, ..., so ergeben sich für ihre Werthermittelung folgende Bestimmungen

$$(4.)\quad \begin{cases} u_{31} = w_{31}, \\ u_{32} = w_{32} - \frac{1}{13} w_{31}, \\ u_{33} = w_{33} - \frac{1}{13}(w_{32} + w_{31}) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

u. s. w. und allgemein unter den bei (1.) angegebenen Voraussetzungen

$$(5.)\quad u_{n+p} = w_{n+p} - \frac{1}{h+m}(w_{n+p-1} + w_{n+p-2} \cdots + w_n),$$

wo n die Basis angiebt, und p die Werthe 0, 1, 2, ... h durchlaufen kann.

Eine zweite Methode für die Bildung der u beruht auf dem in (1.) angegebenen Verfahren. Sie besteht darin, dass die in der vorletzten Ziehung auftretenden Summen mit den in der letzten Ziehung erscheinenden Zahlen die fraglichen Summen erzeugen; sie schliesst die Basis und die über ihr liegenden höheren Summen von der Mitwirkung aus. Hiernach ist

$$(6.)\quad \begin{cases} u_{31} = w_{31}, \\ u_{32} = \frac{1}{13}(4 . w_{22} + w_{23} + \cdots + w_{30}), \\ u_{33} = \frac{1}{13}(4 . w_{23} + w_{24} + \cdots + w_{30}), \\ \vdots \qquad \vdots \\ u_{40} = \frac{4}{13} w_{30} \end{cases}$$

und allgemein

$$(7.)\quad u_{n+p} = \frac{1}{h+m}(m\, w_{n+p-h-1} + w_{n+p-h} + \cdots + w_{n-1})$$

für jedes h, m und n; p kann die Werthe 0, 1, 2, ... h durchlaufen. Beide Methoden bilden gegenseitig eine Controle. Zur Bildung der niederen Summen

ist die erste, für die der höheren die zweite Methode bequemer. Man erhält folgende Werthe

$$(8.)\quad \begin{cases} u_{31} = 0{,}1480609 & u_{36} = 0{,}0949981 \\ u_{32} = 0{,}1379051 & u_{37} = 0{,}0837498 \\ u_{33} = 0{,}1275128 & u_{38} = 0{,}0723173 \\ u_{34} = 0{,}1168910 & u_{39} = 0{,}0607157 \\ u_{35} = 0{,}1060494 & u_{40} = 0{,}0517991. \end{cases}$$

Ihre Summe ist $0{,}999999 = 1$, wie dies sein muss, da nothwendig einer dieser Fälle in jedem Spiele eintritt.

Poisson giebt pag. 200 nur die in (4.) angeführte Methode an. Dort findet sich jedoch ein Versehen, wie sich aus einer Vergleichung leicht ergiebt. Auch in der Werthangabe für u_{40} und w_{40} findet sich eine kleine Differenz. Für das wiederholte Eintreffen der Summen 31 bis 40 ergeben sich folgende Werthe:

$$(9.)\quad \begin{cases} u_{31}^2 = 0.02192203 & u_{36}^2 = 0{,}00902464 \\ u_{32}^2 = 0{,}01917815 & u_{37}^2 = 0{,}00701403 \\ u_{33}^2 = 0{,}01615951 & u_{38}^2 = 0{,}00522979 \\ u_{34}^2 = 0{,}01366350 & u_{39}^2 = 0{,}00368640 \\ u_{35}^2 = 0{,}01124657 & u_{40}^2 = 0{,}00268315. \end{cases}$$

In diesen Fällen bleibt das Spiel unentschieden. Aus der Vergleichung der bisher erhaltenen Resultate ergiebt sich Folgendes. Werden 1000 Spiele gemacht, so gewinnt durchschnittlich in 890 Fällen entweder die Bank oder die Spieler, in 22 Fällen (also ungefähr in 50 Spielen einmal) gewinnt die Bank die Hälfte aller Einsätze; in 88 Fällen bleibt das Spiel unentschieden.

Wäre die Summe 30 statt 31 als entscheidende Zahl bei dem Spiele gewählt worden, so ergäbe sich für die Wahrscheinlichkeit des Wiedereintritts der Summe 30 und den zugehörigen Vortheil

$$(10.)\quad \begin{cases} w_{30}^2 = 0{,}1683471^2 = 0{,}02834072 \\ v \;= 0{,}01417036\,.\,a, \end{cases}$$

und der Vortheil der Bank würde sich auf 1,417 Procent, also viel höher stellen, und die Werthe der u würden folgende:

$$(11.)\quad \begin{cases} u_{30} = 0{,}1683471 & u_{35} = 0{,}0930996 \\ u_{31} = 0{,}1351111 & u_{36} = 0{,}0820484 \\ u_{32} = 0{,}1249554 & u_{37} = 0{,}0708001 \\ u_{33} = 0{,}1145631 & u_{38} = 0{,}0593676 \\ u_{34} = 0{,}1039410 & u_{39} = 0{,}0477659, \end{cases}$$

womit (8.) zu vergleichen ist. Die in diesem Paragraphen angegebenen Werthe bilden die Grenzwerthe für die des Rouge et Noire, von denen gezeigt wurde, dass sie ihnen ganz nahe liegen.

§. 13.

Auf gleiche Weise, jedoch mühevoller, bestimmen sich die Werthe der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einem Cyclus zugehörigen Summen (31, 32, ... 40) für das Problem a), wenn die gezogene Kugel nicht in die Urne zurückgeworfen wird.

Wird verlangt, dass ein bestimmtes Element erst in der letzten Ziehung mitwirke, so ist die Folge, dass es in den vorhergehenden nicht zur Erzeugung der fraglichen Summe mitwirken darf. Daher muss die in der Urne enthaltene Kugelart um dieses Element verkürzt angenommen werden.

Bezeichnet man nun die Anzahl der günstigen Fälle, welche durch das Zusammenwirken der vollständigen Elemente eine Summe erzeugen, durch A; durch B die Zahl derer, welche aus der Summenbildung bei ausgesondertem Elemente hervorgehen; durch C die Zahl derer, welche einem bestimmten Cyclus zugehören, so hat man nach Analogie der im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Gleichungen folgende Bestimmungen:

$$(1.)\quad A_{n+h+1} = a(mB_n + B_{n+1} + B_{n+2} + \cdots + B_{n+h}),$$

$$(2.)\quad C_{n+p} = A_{n+p} - a(B_{n+p-1} + B_{n+p-2} + \cdots + B_n)$$

$$(3.)\quad C_{n+p} = a(mB_{n+p-h-1} + B_{n+p-h-2} + \cdots + B_{n-1}).$$

a bezeichnet die Zahl der Kugelarten oder Kartenfarben; 1, 2, ... h die auf den Kugeln oder Karten vorkommenden Zahlen, m das wiederholte Vorkommen der höchsten Zahl $(h+1)$, n die Basissumme, p kann die Werthe 0, 1, 2, ... h durchlaufen. Bei dem Rouge et Noire ist $a = 24$, $m = 4$, $h = 9$, $n = 31$ zu setzen. Sind die Werthe der A und C in (1.), (2.), (3.) gefunden, so hat man mit der Zahl aller möglichen Fälle zu theilen, um die fraglichen Wahrscheinlichkeiten zu erhalten. Die A bezeichnen die Vorzahlen von x^{31}, x^{32}, ..., die den Potenzen z^4, z^5 ... in der entwickelten Darstellung von

$$(4.)\quad P = [(1+xz)(1+x^2z)\ldots(1+x^9z)(1+x^{10}z)^4]^{24}$$

(4.) §. 5 zugehören.

Die Werthe der B können auch aus den Gliedern des vollständigen statt des abgekürzten Polynomiums auf folgende Weise

$$(5.)\quad B_n = \frac{P}{1+x^kz} = P(1 - x^kz + x^{2k}z^2 - x^{3k}z^3 + \cdots)$$

abgeleitet werden. Hierin bedeutet k die auszuscheidende Zahl, also eine der

Zahlen 1, 2, 3, ... 10. Die Vorzahl von x^n ist dann aus den Gliedern der begleitenden Reihe zu bestimmen.

Die Durchführung dieser sehr mühevollen Arbeit ist jedoch nicht nöthig, da man weiss, dass die hieraus sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten sich den Grenzwerthen des §. 12 mehr und mehr nähern und ihnen bei sechs vollständigen Kartenspielen ganz nahe kommen.

§. 14.

Der Umstand, dass in den Problemen a) und b) ein bestimmtes Element, öfter wiederholt als die übrigen, bei Erzeugung der Summe (n) mitwirkt, macht die Auflösung verwickelt. Einfacher ist es, wenn alle Elemente oder Zahlen gleich oft mitwirken sollen. In diesem Falle hat man in den mitgetheilten Gleichungen $m=1$ oder, was bequemer ist, $m=0$ und dann für h im Anwendungsfalle den entsprechenden Werth der mitwirkenden Elemente einzusetzen.

Für das Problem a), wenn die Kugel nach der Ziehung nicht in die Urne geworfen wird, ist das Polynomium

$$(1.)\quad P=[(1+xz)(1+x^2z)\dots(1+x^hz)]^q=1+Q_1z+Q_2z^2+Q_3z^3+\cdots$$

zu entwickeln und die Vorzahl von x^n für die zugehörigen Potenzen von z nach (2.) §. 6 zu bestimmen.

Für das Problem b), wenn die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird, ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, die Summe n in q Ziehungen zu erhalten, in diesem Fall aus (9.) oder (12.) §. 7

$$(2.)\quad w_n=\frac{1}{h^q}[(n-1)_{q-1}-q(n-h-1)_{q-1}+(q)_2(n-2h-1)_{q-1}-\cdots].$$

Aus (4.) §. 8 erhält man für die Wahrscheinlichkeit, die Summe n in allen möglichen Ziehungen erscheinen zu sehen, wenn man $r=\frac{1}{h}$ und $\nu=\frac{h+1}{h}$ setzt und reducirt, folgende Bestimmung

$$(3.)\quad \left\{\begin{aligned} w_n=&\frac{1}{h}\left(\frac{h+1}{h}\right)^{n-1}-\frac{n}{h^2}\left(\frac{h+1}{h}\right)^{n-h-2}+\frac{n(n-2h-1)}{1.2.h^3}\left(\frac{h+1}{h}\right)^{n-2h-3}\\ &-\frac{n(n-3h-1)(n-3h-2)}{1.2.3.h^4}\left(\frac{h+1}{h}\right)^{n-3h-4}\\ &\vdots \end{aligned}\right.$$

oder

$$(4.)\quad \left\{\begin{aligned} w_n=&\frac{1}{h}\left(\frac{h+1}{h}\right)^{n-h-2}\left[\left(\frac{h+1}{h}\right)^{h+1}-\frac{n}{h}\right]\\ &+\frac{1}{h^3}\left(\frac{h+1}{h}\right)^{n-3h-4}\left[\frac{n(n-2h-1)}{1.2}\left(\frac{h+1}{h}\right)^{h+1}-\frac{n(n-3h-1)(n-3h-2)}{1.2.3.h}\right]\\ &\vdots \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen des §. 12 gehen in folgende über:

$$(5.)\quad w_{n+h} = \frac{1}{h}(w_n + w_{n+1} + \cdots + w_{n+h-1}),$$

$$(6.)\quad w_n = h.w_{n+h} - (w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots + w_{n+h-1}),$$

$$(7.)\quad u_{n+p} = w_{n+p} - \frac{1}{h}(w_{n+p-1} + w_{n+p-2} + \cdots + w_n),$$

$$(8.)\quad u_{n+p} = \frac{1}{h}(w_{n+p-h} + w_{n+p-h+1} + \cdots + w_{n-1}),$$

in (7.) und (8.) kann p die Werthe 0, 1, 2, ... $h-1$ durchlaufen.

Würde das Rouge et Noire unter der Voraussetzung gespielt, dass in jeder Farbe nur die Zahlen 1, 2, ... 10 enthalten, die Bilder also ausgeschlossen sind, so ist $h=10$ in den vorstehenden Gleichungen zu setzen. Das Spiel würde einen anderen Gang nehmen, und die Grenzwerthe der dabei vorkommenden Wahrscheinlichkeiten würden sich in folgender Weise feststellen

$$(9.)\quad \begin{cases} w_{30} = 0{,}181410912 & w_{36} = 0{,}181933149 \\ w_{31} = 0{,}181264689 & w_{37} = 0{,}181862862 \\ w_{32} = 0{,}181633059 & w_{38} = 0{,}181793873 \\ w_{33} = 0{,}181856200 & w_{39} = 0{,}181749564 \\ w_{34} = 0{,}181960755 & w_{40} = 0{,}181744112 \\ w_{35} = 0{,}181976087 & \end{cases}$$

$$(10.)\quad \begin{cases} u_{31} = 0{,}181264689 & u_{36} = 0{,}091064070 \\ u_{32} = 0{,}163506591 & u_{37} = 0{,}072800468 \\ u_{33} = 0{,}145566425 & u_{38} = 0{,}054545193 \\ u_{34} = 0{,}127485360 & u_{39} = 0{,}036321497 \\ u_{35} = 0{,}109304616 & u_{40} = 0{,}018141091. \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeiten in (9.) zeigen auch ein Maximum wie die in (3.) §. 12 angegebenen, jedoch in anderer Lage und geringerer Intensität und nähern sich mehr der Gleichheit. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten in (10.) ist 1, wie dies sein muss.

Der Grenzwerth für den Wiedereintritt der Summe 31 und der hiezugehörige Vortheil der Bank würde sich nach (9.) auf

$$(11.)\quad \begin{cases} (w_{31})^2 = 0{,}181264689^2 = 0{,}03285688 \\ v \;\; = 0{,}0164284.a \end{cases}$$

stellen, also mehr als $1\frac{1}{2}$ Procent betragen.

Freiburg i. B., im Juni 1865.

Ueber simultane binäre cubische Formen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Die Theorie der simultanen binären cubischen Formen ist von Herrn *Salmon* (Introd. Lessons) studirt worden aus der Annahme einer kanonischen Form, in welcher beide Formen als Aggregate von drei Cuben erscheinen. Indessen lässt dieselbe eine andere Behandlung zu. Es giebt nämlich *zwei lineare Covarianten* solcher Formen, und indem man sie als Variable einführt, gelangt man zu einer merkwürdigen *typischen Form, in welcher die beiden Functionen die Differentialquotienten einer Function vierter Ordnung sind.* Die Coefficienten dieser Form sind von einander unabhängig, und können als fundamentale Invarianten benutzt werden. Alle übrigen Invarianten drücken sich dann rational durch diese aus, bis auf einen Factor, welcher eine Wurzel aus der cubischen Invariante der biquadratischen Form ist. Diese Resultate und ihre Ableitung bilden den Inhalt der folgenden Notiz.

Die gegebenen binären Formen seien:

$$(1.)\quad \begin{cases} u = ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3, \\ v = \alpha x^3+3\beta x^2y+3\gamma xy^2+\delta y^3. \end{cases}$$

Die Determinante von $u+\lambda v$ bezeichne ich durch

$$(2.)\quad \begin{cases} D(\lambda) = 2\begin{vmatrix} (a+\lambda\alpha)x+(b+\lambda\beta)y & (b+\lambda\beta)x+(c+\lambda\gamma)y \\ (b+\lambda\beta)x+(c+\lambda\gamma)y & (c+\lambda\gamma)x+(d+\lambda\delta)y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a+\lambda\alpha & b+\lambda\beta & y^2 \\ b+\lambda\beta & c+\lambda\gamma & -xy \\ c+\lambda\gamma & d+\lambda\delta & x^2 \end{vmatrix} \\ \quad = A+2\lambda B+\lambda^2 C. \end{cases}$$

Dabei sind A, B, C quadratische Covarianten; A enthält nur die Coefficienten von u, C nur die von v, B beide linear. Die Differentialquotienten einer Form n^{ter} Ordnung bezeichne ich durch

$$\varphi_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \varphi_2 = \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \varphi_{11} = \frac{1}{n.n-1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad \text{etc.}$$

In diesem Sinne bilde ich die lineare Covariante:

$$(3.)\quad P = D_{11}(\lambda)(u_{22}+\varrho v_{22})-2D_{12}(\lambda)(u_{12}+\varrho v_{12})+D_{22}(\lambda)(u_{11}+\varrho v_{11}),$$

welche für $\varrho=\lambda$ in die bekannte verschwindende lineare Covariante von $u+\lambda v$ übergeht. Der Ausdruck P hat also den Factor $(\varrho-\lambda)$, und in der That, nimmt man die Function D in der zweiten Form (2.), so findet man

$$(4.)\quad P=2\begin{vmatrix} a+\lambda\alpha & b+\lambda\beta & (ax+by)+\varrho(\alpha x+\beta y) \\ b+\lambda\beta & c+\lambda\gamma & (bx+cy)+\varrho(\beta x+\gamma y) \\ c+\lambda\gamma & d+\lambda\delta & (cx+dy)+\varrho(\gamma x+\delta y) \end{vmatrix}=2(\varrho-\lambda)(p-\lambda q),$$

und die linearen Covarianten p und q haben die Definition:

$$(5.)\quad p=\begin{vmatrix} a & b & \alpha x+\beta y \\ b & c & \beta x+\gamma y \\ c & d & \gamma x+\delta y \end{vmatrix},\qquad q=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & ax+by \\ \beta & \gamma & bx+cy \\ \gamma & \delta & cx+dy \end{vmatrix}.$$

Indem man aber in (4.) links für P den Ausdruck (3.), und für D darin den Ausdruck (2.) setzt, erhält man die folgenden Gleichungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} 0=A_{11}u_{22}-2A_{12}u_{12}+A_{22}u_{11}, & 2p=A_{11}v_{22}-2A_{12}v_{12}+A_{22}v_{11}, \\ -p=B_{11}u_{22}-2B_{12}u_{12}+B_{22}u_{11}, & -q=B_{11}v_{22}-2B_{12}v_{12}+B_{22}v_{11}, \\ 2q=C_{11}u_{22}-2C_{12}u_{12}+C_{22}u_{11}, & 0=C_{11}v_{22}-2C_{12}v_{12}+C_{22}v_{11}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun durch $2K$ die Determinante dieser Gleichungen:

$$(7.)\quad 2K=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{22} \\ B_{11} & B_{12} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & C_{22} \end{vmatrix},$$

und durch A, B, Γ die drei Formen zweiten Grades:

$$(8.)\quad \mathrm{A}=\begin{vmatrix} y^2 & B_{11} & C_{11} \\ -xy & B_{12} & C_{12} \\ x^2 & B_{22} & C_{22} \end{vmatrix},\quad \mathrm{B}=-\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} A_{11} & y^2 & C_{11} \\ A_{12} & -xy & C_{12} \\ A_{22} & x^2 & C_{22} \end{vmatrix},\quad \Gamma=\begin{vmatrix} A_{11} & B_{11} & y^2 \\ A_{12} & B_{12} & -xy \\ A_{22} & B_{22} & x^2 \end{vmatrix},$$

welche zugleich die Functionaldeterminanten von A, B und C sind. Dann ist

$$(9.)\quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial K}{\partial A_{11}}=\mathrm{A}_{22}, & \dfrac{\partial K}{\partial A_{12}}=-\mathrm{A}_{12}, & 2\dfrac{\partial K}{\partial A_{22}}=\mathrm{A}_{11}, \\ 2\dfrac{\partial K}{\partial B_{11}}=-2\mathrm{B}_{22}, & \dfrac{\partial K}{\partial B_{12}}=2\mathrm{B}_{12}, & 2\dfrac{\partial K}{\partial B_{22}}=-2\mathrm{B}_{11}, \\ 2\dfrac{\partial K}{\partial C_{11}}=\Gamma_{22}, & \dfrac{\partial K}{\partial C_{12}}=-\Gamma_{12}, & 2\dfrac{\partial K}{\partial C_{22}}=\Gamma_{11}, \end{cases}$$

und die Auflösung der Gleichung (6.) nimmt die Form an:

$$(10.)\quad \begin{cases} Ku_{11}=\mathrm{B}_{11}p+\Gamma_{11}q, & Kv_{11}=\mathrm{A}_{11}p+\mathrm{B}_{11}q, \\ Ku_{12}=\mathrm{B}_{12}p+\Gamma_{12}q, & Kv_{12}=\mathrm{A}_{12}p+\mathrm{B}_{12}q, \\ Ku_{22}=\mathrm{B}_{22}p+\Gamma_{22}q, & Kv_{22}=\mathrm{A}_{22}p+\mathrm{B}_{22}q. \end{cases}$$

Multiplicirt man in diesen beiden Systemen die erste Reihe mit x^2, die zweite mit $2xy$, die dritte mit y^2, und addirt, so hat man:

$$(11.)\qquad K.u = \mathrm{B}p + \Gamma q, \qquad K.v = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q.$$

Bemerken wir nun, dass, wenn u', v' etc. die Functionen u, v mit den Variabeln x', y' geschrieben bedeuten, man den aus u, u' oder v, v' gebildeten Functionaldeterminanten die Form geben kann:

$$(12.)\quad \begin{cases} u_1u_2'-u_2u_1' = (xy'-yx')\begin{vmatrix} a & b & 2yy' \\ b & c & -(xy'+yx') \\ c & d & 2xx' \end{vmatrix} = (xy'-yx')(A_1x'+A_2y'), \\ v_1v_2'-v_2v_1' = (xy'-yx')\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 2yy' \\ \beta & \gamma & -(xy'+yx') \\ \gamma & \delta & 2xx' \end{vmatrix} = (xy'-yx')(C_1x'+C_2y'). \end{cases}$$

Aus den Ausdrücken

$$u_1',\quad u_2',\quad v_1',\quad v_2'$$

entstehen, indem man x'^2, $x'y'$, y'^2 durch A_{22}, $-A_{12}$, A_{22} ersetzt, nach (6.) die Grössen:

$$0,\quad 0,\quad 2p_1,\quad 2p_2;$$

indem man x'^2, $x'y'$, y'^2 durch B_{22}, $-B_{12}$, B_{11} ersetzt:

$$-p_1,\quad -p_2,\quad -q_1,\quad -q_2;$$

endlich, indem man dieselben Grössen durch C_{22}, $-C_{12}$, C_{11} ersetzt, die Ausdrücke:

$$2q_1,\quad 2q_2,\quad 0,\quad 0.$$

Daher folgen aus (12.) die vier Gleichungen:

$$(13.)\quad \begin{cases} u_1p_2-u_2p_1 = A_1B_2-B_1A_2 = \Gamma, \\ u_1q_2-u_2q_1 = -\tfrac{1}{2}(A_1C_2-C_1A_2) = -\mathrm{B}, \\ v_1p_2-v_2p_1 = \tfrac{1}{2}(A_1C_2-C_1A_2) = \mathrm{B}, \\ v_1q_2-v_2q_1 = -(B_1C_2-C_1B_2) = -\mathrm{A}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$\mathrm{B}p+\Gamma q = u(p_2q_1-q_2p_1), \qquad \mathrm{A}p+\mathrm{B}q = v(p_2q_1-q_2p_1),$$

und daher aus Vergleichung mit (11.):

$$(14.)\qquad p_2q_1-q_2p_1 = K,$$

was man auch leicht direct nachweist. Es folgt aber ferner für die Functionaldeterminante von $u+\lambda v$ und $p+\varrho q$ aus (13.) der Ausdruck:

$$(u_1+\lambda v_1)(p_2+\varrho q_2)-(u_2+\lambda v_2)(p\ +\varrho q_1) = \Gamma+(\lambda-\varrho)\mathrm{B}-\lambda\varrho\mathrm{A}.$$

Bildet man jetzt die *Hesse*sche Determinante dieser quadratischen Form, so findet man

$$(15.)\quad \begin{cases} D_{11}(\lambda)(p_2+\varrho q_2)^2-2D_{12}(\lambda)(p_2+\varrho q_2)(p_1+\varrho q_1)+D_{22}(\lambda)(p_1+\varrho q_1)^2 \\ \quad = 2\begin{vmatrix} \Gamma_{11}+(\lambda-\varrho)\mathrm{B}_{11}-\lambda\varrho\,\mathrm{A}_{11} & \Gamma_{12}+(\lambda-\varrho)\mathrm{B}_{12}-\lambda\varrho\,\mathrm{A}_{12} \\ \Gamma_{12}+(\lambda-\varrho)\mathrm{B}_{12}-\lambda\varrho\,\mathrm{A}_{12} & \Gamma_{22}+(\lambda-\varrho)\mathrm{B}_{12}-\lambda\varrho\,\mathrm{A}_{12} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

woraus, wenn man $\varrho=-\frac{p}{q}$ setzt und mit q^2 multiplicirt, die Gleichung folgt:

$$(16.)\quad K^2D(\lambda)=2\begin{vmatrix} (\mathrm{B}_{11}p+\Gamma_{11}q)+\lambda(\mathrm{A}_{11}p+\mathrm{B}_{11}q) & (\mathrm{B}_{12}p+\Gamma_{12}q)+\lambda(\mathrm{A}_{12}p+\mathrm{B}_{12}q) \\ (\mathrm{B}_{12}p+\Gamma_{12}q)+\lambda(\mathrm{A}_{12}p+\mathrm{B}_{12}q) & (\mathrm{B}_{22}p+\Gamma_{22}q)+\lambda(\mathrm{A}_{22}p+\mathrm{B}_{22}q) \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung enthält die typischen Darstellungen der Formen A, B, C. Führt man die in dieser Gleichung auftretenden Invarianten ein:

$$(17.)\quad \begin{cases} M_{aa}=2(\mathrm{A}_{11}\mathrm{A}_{22}-\mathrm{A}_{12}^2), & M_{bc}=(\mathrm{B}_{11}\Gamma_{22}-2\mathrm{B}_{12}\Gamma_{12}+\mathrm{B}_{22}\Gamma_{11}), \\ M_{bb}=2(\mathrm{B}_{11}\mathrm{B}_{22}-\mathrm{B}_{12}^2), & M_{ca}=(\Gamma_{11}\mathrm{A}_{22}-2\Gamma_{12}\mathrm{A}_{12}+\Gamma_{22}\mathrm{A}_{11}), \\ M_{cc}=2(\Gamma_{11}\Gamma_{22}-\Gamma_{12}^2), & M_{ab}=(\mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{22}-2\mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{12}+\mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{11}), \end{cases}$$

so zerfällt die Gleichung (16.) in die folgenden Gleichungen für A, B, C:

$$(18.)\quad \begin{cases} K^2A = M_{bb}p^2+2M_{bc}pq+M_{cc}q^2, \\ K^2B = M_{ab}p^2+(M_{ac}+M_{bb})pq+M_{bc}q^2, \\ K^2C = M_{aa}p^2+2M_{ab}pq+M_{bb}q^2. \end{cases}$$

Inzwischen erhält man aus den Formeln

$$\begin{aligned} A &= A_{11}x^2+2A_{12}xy+A_{22}y^2, \\ B &= B_{11}x^2+2B_{12}xy+B_{22}y^2, \\ C &= C_{11}x^2+2C_{12}xy+C_{22}y^2 \end{aligned}$$

durch Auflösung mit Rücksicht auf die Gleichungen (9.):

$$\begin{aligned} 2Kx^2 &= A\mathrm{A}_{22}-2B\mathrm{B}_{22}+C\Gamma_{22}, \\ -2Kxy &= A\mathrm{A}_{12}-2B\mathrm{B}_{12}+C\Gamma_{12}, \\ 2Ky^2 &= A\mathrm{A}_{11}-2B\mathrm{B}_{11}+C\Gamma_{11}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit A_{11}, $-2\mathrm{A}_{12}$, A_{22}, oder mit B_{11}, $-2\mathrm{B}_{12}$, B_{22}, oder endlich mit Γ_{11}, $-2\Gamma_{12}$, Γ_{22} und addirt jedesmal, so kommt mit Anwendung der Grösse (16.):

$$(18^a.)\quad \begin{cases} 2K\mathrm{A} = M_{aa}A-2M_{ab}B+M_{ac}C, \\ 2K\mathrm{B} = M_{ab}A-2M_{bb}B+M_{bc}C, \\ 2K\Gamma = M_{ac}A-2M_{bc}B+M_{cc}C, \end{cases}$$

und man erhält daher, wenn man die Werthe von A, B, C aus (18.) einführt, für A, B, Γ die Formen:

$$(19.)\quad \begin{cases} 2K^3\mathrm{A} = (M_{aa}M_{bb}-2M_{ab}^2+M_{aa}M_{ac})p^2+2(M_{aa}M_{bc}-M_{bb}M_{ab})pq \\ \qquad\qquad +(M_{aa}M_{cc}-2M_{ab}M_{bc}+M_{bb}M_{ac})q^2, \\ 2K^3\mathrm{B} = (M_{aa}M_{bc}-M_{ab}M_{bb})p^2+2(2M_{ab}M_{bc}-M_{bb}M_{ac}-M_{bb}^2)pq \\ \qquad\qquad +(M_{ab}M_{cc}-M_{bb}M_{bc})q^2, \\ 2K^3\Gamma = (M_{aa}M_{cc}-2M_{ab}M_{bc}+M_{bb}M_{ac})p^2+2(M_{ab}M_{cc}-M_{bb}M_{bc})pq \\ \qquad\qquad +(M_{ac}M_{cc}-2M_{bc}^2+M_{cc}M_{bb})q^2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich, indem man auf die Eigenschaften der Invarianten M näher eingeht.

Die Invarianten M sind die Elemente der Determinante, welche bei der Multiplication der Determinanten

$$(20.)\quad \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} \\ \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} & \mathrm{B}_{22} \\ \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{22} & -2\mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{11} \\ \mathrm{B}_{22} & -2\mathrm{B}_{12} & \mathrm{B}_{11} \\ \Gamma_{22} & -2\Gamma_{12} & \Gamma_{11} \end{vmatrix} = 2K^4 = \begin{vmatrix} M_{aa} & M_{ab} & M_{ac} \\ M_{ab} & M_{bb} & M_{bc} \\ M_{ac} & M_{bc} & M_{cc} \end{vmatrix}$$

entstehen. Die Unterdeterminanten der M kann man daher aus den Unterdeterminanten der beiden Factoren links zusammensetzen. Da nun die Elemente dieser beiden bis auf Zahlenfactoren die Unterdeterminanten von K sind, so werden ihre Unterdeterminanten gleich K multiplicirt mit Elementen von K; und zwar erhält man sehr leicht folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{B}_{12}\Gamma_{22}-\mathrm{B}_{22}\Gamma_{12} = -\frac{K}{2}A_{22}, & \Gamma_{12}\mathrm{A}_{22}-\Gamma_{22}\mathrm{A}_{12} = KB_{22}, & \mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{22}-\mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{12} = -\frac{K}{2}C_{22}, \\ \mathrm{B}_{22}\Gamma_{11}-\mathrm{B}_{11}\Gamma_{22} = KA_{12}, & \Gamma_{22}\mathrm{A}_{11}-\Gamma_{11}\mathrm{A}_{22} = -2KB_{12}, & \mathrm{A}_{22}\mathrm{B}_{11}-\mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{22} = KC_{12}, \\ \mathrm{B}_{11}\Gamma_{12}-\mathrm{B}_{12}\Gamma_{11} = -\frac{K}{2}A_{11}, & \Gamma_{11}\mathrm{A}_{12}-\Gamma_{12}\mathrm{A}_{11} = KB_{11}, & \mathrm{A}_{11}\mathrm{B}_{12}-\mathrm{A}_{12}\mathrm{B}_{11} = -\frac{K}{2}C_{11}. \end{array}$$

Man hat daher für die Unterdeterminanten der M die Ausdrücke:

$$(21.)\quad \begin{cases} M_{bb}M_{cc}-M_{bc}^2 = \frac{K^2}{2}N_{aa}, & M_{ab}M_{ac}-M_{aa}M_{bc} = -K^2N_{bc}, \\ M_{cc}M_{aa}-M_{ca}^2 = 2K^2N_{bb}, & M_{bc}M_{ba}-M_{bb}M_{ca} = \frac{K^2}{2}N_{ca}, \\ M_{aa}M_{bb}-M_{ab}^2 = \frac{K^2}{2}N_{cc}, & M_{ca}M_{cb}-M_{cc}M_{ab} = -K^2N_{ab}, \end{cases}$$

wo die N folgende den M analog gebildete Invarianten bezeichnen:

$$(22.)\quad \begin{cases} N_{aa} = 2(A_{11}A_{22}-A_{12}^2), & N_{bc} = B_{11}C_{22}-2B_{12}C_{12}+B_{22}C_{11}, \\ N_{bb} = 2(B_{11}B_{22}-B_{12}^2), & N_{ca} = C_{11}A_{22}-2C_{12}A_{12}+C_{22}A_{11}, \\ N_{cc} = 2(C_{11}C_{22}-C_{12}^2), & N_{ab} = A_{11}B_{22}-2A_{12}B_{12}+A_{22}B_{11}. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man nun den Ausdrücken (19.) die Gestalt geben:

$$(23.)\quad \begin{cases} 2K^3\mathrm{A} = K^2\{N_{cc}p^2+2N_{bc}pq+(2N_{bb}-N_{ac})q^2\} \\ \qquad\qquad +(M_{ac}-M_{bb})\{M_{aa}p^2+2M_{ab}pq+M_{ac}q^2\}, \\ 2K^3\mathrm{B} = K^2\{N_{cb}p^2+2N_{ac}pq+N_{ab}q^2\} \\ \qquad\qquad +(M_{ac}-M_{bb})\{M_{ab}p^2+2M_{bb}pq+M_{bc}q^2\}, \\ 2K^3\Gamma = K^2\{(2N_{bb}-N_{ac})q^2+2N_{ab}pq+N_{aa}q^2\} \\ \qquad\qquad +(M_{ac}-M_{bb})\{M_{ac}q^2+2M_{bc}pq+M_{cc}q^2\}. \end{cases}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (13.):

$$u_{11}p_2q_2-u_{12}(p_1q_2+p_2q_1)+u_{22}p_1q_1 = \Gamma_1q_2-\Gamma_2q_1 = -(\mathrm{B}_1p_2-\mathrm{B}_2p_1),$$
$$v_{11}p_2q_2-v_{12}(p_1q_2+p_2q_1)+v_{22}p_1q_1 = \mathrm{B}_1q_2-\mathrm{B}_2q_1 = -(\mathrm{A}_1p_2-\mathrm{A}_2p_1).$$

Wendet man dies auf die in (23.) gegebenen Formen von A, B, Γ an, so findet sich, dass der Coefficient von $2pq$ in A mit dem von p^2 in B, der von q^2 in A mit dem von p^2 in Γ und mit dem von $2pq$ in B, der von q^2 in B mit dem von $2pq$ in Γ übereinstimmen muss. Von diesen Bedingungen sind alle bis auf eine schon in den Gleichungen (23.) offenbar erfüllt; indem man aber den Coefficienten von $2pq$ in B dem von q^2 in A oder von p^2 in Γ gleichsetzt, erhält man die Relation:

$$(24.)\quad (M_{ac}-M_{bb})^2 = 2K^2(N_{ac}-N_{bb}).$$

Hieraus geht hervor, dass $2(N_{ac}-N_{bb})$ das Quadrat einer rationalen Invariante ist. In der That findet man

$$\begin{aligned} 2(N_{ac}-N_{bb}) &= 2(C_{11}A_{22}-2C_{12}A_{12}+C_{22}A_{11})-4(B_{11}B_{22}-B_{12}^2) \\ &= 8(ac-b^2)(\beta\delta-\gamma^2)-4(ad-bc)(\alpha\delta-\beta\gamma)+8(bd-c^2)(\alpha\gamma-\beta^2) \\ &\quad -4(a\gamma-2b\beta+c\alpha)(b\delta-2c\gamma+d\beta)+(a\delta-b\gamma-c\beta+d\alpha)^2 \\ &= (a\delta-3b\gamma+3c\beta-d\alpha)^2. \end{aligned}$$

Bezeichnet man also die einfachste Invariante der Formen u und v durch:

$$(25.)\quad J = a\delta-3b\gamma+3c\beta-d\alpha,$$

so ist

$$(26.)\quad 2(N_{ac}-N_{bb}) = J^2,$$

und indem man dies in (24.) einträgt, findet man

$$(27.)\qquad M_{ac}-M_{bb} = KJ,$$

wobei das Vorzeichen der rechten Seite sich durch specielle Wahl der Coefficienten leicht bestimmt.

Führt man diese Relationen in die Gleichungen (23.) ein, so kann man durch K dividiren, und findet:

$$(28.)\qquad \begin{cases} 2K^2\mathrm{A} = K(N_{cc}p^2+2N_{bc}pq+N_{ac}q^2)+J(M_{aa}p^2+2M_{ab}pq+M_{bb}q^2), \\ 2K^2\mathrm{B} = K(N_{bc}p^2+2N_{ac}pq+N_{ab}q^2)+J(M_{ab}p^2+2M_{bb}pq+M_{bc}q^2), \\ 2K^2\Gamma = K(N_{ac}p^2+2N_{ab}pq+N_{aa}q^2)+J(M_{bb}p^2+2M_{bc}pq+M_{cc}q^2). \end{cases}$$

Bezeichnet man daher durch F die biquadratische Form:

$$(29.)\qquad \begin{cases} F = \frac{1}{2}\{K(N_{cc}p^4+4N_{bc}p^3q+6N_{ac}p^2q^2+4N_{ab}pq^3+N_{aa}q^4) \\ \qquad +J(M_{aa}p^4+4M_{ab}p^3q+6M_{bb}p^2q^2+4M_{bc}pq^3+M_{cc}q^4)\} \\ \quad = m_0p^4+4m_1p^3q+6m_2p^2q^2+4m_3pq^3+m_4q^4, \end{cases}$$

so hat man die Formeln:

$$(30.)\qquad \begin{cases} K^2\mathrm{A} = \frac{1}{12}\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}, \\ K^2\mathrm{B} = \frac{1}{12}\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}, \\ K^2\Gamma = \frac{1}{12}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}, \end{cases}$$

und also auch aus (11.) die typischen Darstellungen von u und v:

$$(31.)\qquad \begin{cases} K^3u = \frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial q}, \\ K^3v = \frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial p}, \end{cases}$$

was die Eingangs erwähnte Form ist.

Von den im Vorstehenden benutzten Invarianten M, N, K, J lassen sich zunächst die M leicht durch die N ausdrücken. Die Determinante der M ist nach (20.) gleich $2K^4$. Bildet man also die Unterdeterminanten aus den Unterdeterminanten der M (21.), und ersetzt sie durch das Product eines M mit der Determinante der M, so erhält man nach Division mit $2K^4$:

$$(32.)\qquad \begin{cases} M_{aa} = \frac{1}{2}(N_{bb}N_{cc}-N_{bc}^2), & M_{bc} = -\frac{1}{2}(N_{ab}N_{ac}-N_{aa}N_{bc}), \\ M_{bb} = \frac{1}{2}(N_{cc}N_{aa}-N_{ac}^2), & M_{ca} = \quad \frac{1}{2}(N_{ba}N_{bc}-N_{bb}N_{ac}), \\ M_{cc} = \frac{1}{2}(N_{aa}N_{bb}-N_{ab}^2), & M_{ab} = -\frac{1}{2}(N_{ac}N_{bc}-N_{cc}N_{ab}). \end{cases}$$

Da nun die beiden cubischen Formen nicht mehr als fünf von einander unabhängige Invarianten besitzen, so hat man zwischen den N, K und J noch drei Relationen aufzusuchen. Zwei derselben liefern die Gleichungen (26.), (27.). Indem man in der letzteren für die M ihre eben gebildeten Ausdrücke setzt, erhält man die Gleichungen:

$$(33.)\quad \begin{cases} J^2 = 2(N_{ac}-N_{bb}), \\ KJ = \frac{1}{2}(N_{bc}N_{ba}-N_{bb}N_{ac})-\frac{1}{8}(N_{cc}N_{aa}-N_{ac}^2). \end{cases}$$

Sodann ist aber nach (22.) die Determinante der N offenbar das Product der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{22} \\ B_{11} & B_{12} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & C_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{22} & -2A_{12} & A_{11} \\ B_{22} & -2B_{12} & B_{11} \\ C_{22} & -2C_{12} & C_{11} \end{vmatrix},$$

und man hat daher drittens die Relation:

$$(34.)\qquad K^2 = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} N_{aa} & N_{ab} & N_{ac} \\ N_{ab} & N_{bb} & N_{bc} \\ N_{ac} & N_{bc} & N_{cc} \end{vmatrix}.$$

Aus (33.), (34.) entspringt zwischen den N eine homogene Gleichung dritten Grades.

Die Coefficienten von F, nämlich

$$\begin{array}{ll} m_0 = \frac{1}{2}(KN_{cc}+JM_{aa}), & \\ & m_1 = \frac{1}{2}(KN_{bc}+JM_{ab}), \\ m_2 = \frac{1}{2}(KN_{ac}+JM_{bb}), & \\ & m_3 = \frac{1}{2}(KN_{ab}+JM_{bc}), \\ m_4 = \frac{1}{2}(KN_{aa}+JM_{cc}), & \end{array}$$

haben als Coefficienten der typischen Form von selbst die Eigenschaft, dass alle absoluten Invarianten sich durch sie rational ausdrücken, und da ihre Zahl fünf ist, so tritt eine Relation zwischen ihnen nicht mehr ein. Die Determinante von p und q ist K; daher findet man jede Invariante, indem man sie aus der typischen Form bildet, und durch eine passende Potenz von K dividirt. Führt man insbesondere für die aus den m gebildeten Invarianten der Form F die Bezeichnungen ein:

$$i = m_0m_4-4m_1m_3+3m_2^2,\qquad j = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{vmatrix},$$

und setzt ferner:

$$\mu_0 = m_2 m_4 - m_3^2, \qquad \mu_1 = m_2 m_3 - m_1 m_4,$$
$$\mu_2' = m_0 m_4 - m_2^2, \qquad \mu_2 = m_1 m_3 - m_2^2,$$
$$\mu_4 = m_0 m_2 - m_1^2, \qquad \mu_3 = m_1 m_2 - m_0 m_3,$$

so dass

$$\mathbf{i} = \mu_2 - 4\mu_2,$$
$$\mu_0\mu_4 - \mu_2'^2 = \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_2',$$

so findet man für die oben behandelten Formen folgende Ausdrücke:

$$K^4 A = \ 2(\mu_0 q^2 - \mu_1 pq + \mu_2 p^2), \qquad K^2 \mathbf{A} = m_0 p^2 + 2m_1 pq + m_2 q^2,$$
$$K^4 B = -(\mu_1 q^2 - \mu_2' pq + \mu_3 p^2), \qquad K^2 \mathbf{B} = m_1 p^2 + 2m_2 pq + m_3 q^2,$$
$$K^4 C = \ 2(\mu_2 q^2 - \mu_3 pq + \mu_4 p^2), \qquad K^2 \Gamma = m_2 p^2 + 2m_3 pq + m_4 q^2,$$
$$K^6 = j, \quad K^3 J = \mathbf{i},$$
$$K^4 N_{aa} = 8\mu_2\mu_4 - 2\mu_3^2, \qquad K^4 N_{bc} = -2\mu_0\mu_3 - 2\mu_1\mu_2 + \ \mu_1\mu_2',$$
$$K^4 N_{bb} = 2\mu_1\mu_3 - \tfrac{1}{2}\mu_2'^2, \qquad K^4 N_{ca} = \ 4\mu_4\mu_0 + 4\mu_2^2 \ -2\mu_1\mu_3,$$
$$K^4 N_{cc} = 8\mu_2\mu_0 - 2\mu_1^2, \qquad K^4 N_{ab} = -2\mu_1\mu_4 - 2\mu_2\mu_3 + \ \mu_3\mu_2'.$$

Man sieht, wie hier alles sich rational durch die m ausdrückt, abgesehen von K, welches den irrationalen Ausdruck

$$K = \sqrt[6]{j}$$

annimmt.

Da die Resultante von u und v nach (31.) mit der Discriminante von F übereinstimmt, so nimmt dieselbe die Form an

$$\mathbf{i}^3 - 27j^2,$$

oder, mit Hinweglassung einer Potenz von K:

$$J^3 - 27K,$$

welches ein bekanntes Resultat ist.

Ueberhaupt geben die Sätze über binäre biquadratische Formen auch immer Sätze über die simultanen cubischen Formen, wenn man dabei als die biquadratische Form mit ihren Covarianten und Invarianten die folgenden Ausdrücke zu Grunde legt:

$$F = K^3(pu + qv),$$
$$\Delta_F = \frac{1}{144}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\right)^2\right) = \frac{K^6}{9}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$j = K^6, \quad i = K^3 J.$$

Unter solchen Sätzen hebe ich nur einen hervor. Bezeichnet man durch

u', v', p', q', F' die Werthe, welche u, v, p, q, F für $x = x'$, $y = y'$ annehmen, so ist die Discriminante der für p' und q' cubischen Form

$$\tfrac{1}{4}\left(p\frac{\partial F'}{\partial p'}+q\frac{\partial F'}{\partial q'}\right) = K^3(qu'+pv')$$

nach der Theorie der biquadratischen Formen gleich

$$F.j-i.\Delta_F.$$

Die Discriminante also der Form $\varkappa u+\lambda v$ erhält man, wenn man in diesem Ausdrucke $p=\lambda$, $q=\varkappa$ setzt. Aber der vorstehende Ausdruck ist bis auf eine Potenz von K gleich

$$qu+pv-\frac{J}{9}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Man hat daher den Satz:

Durch die lineare Substitution

$$\varkappa = q_1x+q_2y,\quad \lambda = p_1x+p_2y$$

verwandelt sich die Gleichung

$$(35.)\qquad qu+pv-\frac{J}{9}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

in die Bedingung dafür, dass die Discriminante von $\varkappa u+\lambda v$ verschwinde.

Diese biquadratische Gleichung ist am leichtesten in der Form

$$F.j-i.\Delta_F = 0$$

zu untersuchen. Im Allgemeinen giebt es vier Functionen $\varkappa u+\lambda v$, welche zwei gleiche Factoren haben; von diesen fallen aber zwei zusammen sobald die Discriminante von

$$F.j-i.\Delta_F$$

verschwindet. Der Werth derselben ist nach der Theorie der biquadratischen Formen

$$(i^3-27j^2)j^6 = (J^3-27K)K^{30}.$$

Die Discriminante von (35.), oder von der gleich Null gesetzten Discriminante von $\varkappa u+\lambda v$, welche für die Coefficienten sowohl von u als von v vom zwölften Grade ist, muss den Ausdruck

$$(J^3-27K)K^3$$

haben. Dieselbe verschwindet also erstlich, wenn u und v einen gemeinsamen Factor haben, zweitens wenn $K=0$.

Der letztere Fall ist die einzige Ausnahme der oben ausgeführten Darstellung und muss daher besonders behandelt werden.

Wenn K verschwindet, so lehren die Gleichungen (21.), (27.), dass $M_{ac} = M_{bb}$, und dass eine constante Grösse τ so bestimmt werden kann, dass

$$(36.)\qquad M_{aa} : M_{ab} : M_{bb} : M_{bc} : M_{cc} = \tau^4 : \tau^3 : \tau^2 : \tau : 1.$$

Die Gleichungen (18^a.) geben dann zwischen A, B, C die lineare Relation:

$$(37.)\qquad \tau^2 A - 2\tau B + C = 0,$$

und aus (18.) folgt:

$$(38.)\qquad \tau p + q = 0,$$

endlich aus (13.):

$$(39.)\qquad \mathrm{A} : \mathrm{B} : \Gamma = \tau^2 : \tau : 1.$$

Die Gleichung (37.) lehrt, dass die *Hesse*sche Determinante der Function $\tau u - v$ verschwindet, dass also diese Function ein vollständiger Cubus ist. *Wenn also die Invariante K verschwindet, so giebt es eine Combination von u und v, welche ein vollständiger Cubus ist.* Man beweist auch leicht, dass umgekehrt, wenn $v = u + (ax + by)^3$, immer K verschwindet. Die Wurzel des Cubus unterscheidet sich von den linearen Covarianten p, q nur durch constante Factoren.

Giessen, den 2. Juni 1867.

Zur Theorie der binären Formen vierten Grades.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Ist u eine binäre Form vierten Grades:

$$u = ax_1^4+4bx_1^3x_2+6cx_1^2x_2^2+4dx_1x_2^3+ex_2^4,$$

und bezeichnet man durch i, j, $\varDelta$, T die Formen

$$i = ae-4bd+3c^2, \qquad j = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix},$$

$$\varDelta = u_{11}u_{22}-u_{12}^2, \qquad T = u_1\varDelta_2-u_2\varDelta_1\ ^{*)}$$

endlich durch $\varphi(\varkappa, \lambda)$ die Form

$$\varphi(\varkappa, \lambda) = \varkappa^3-\frac{i}{4}\varkappa\lambda^2+\frac{j}{4}\lambda^3,$$

so hat man bekanntlich für die zusammengesetzte Function $\varkappa u-\lambda\varDelta$ die Bildungen:

$$\begin{aligned}
\varDelta_{\varkappa u-\lambda\varDelta} &= \tfrac{1}{3}\left(\varDelta\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa}+u\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right),\\
i_{\varkappa u-\lambda\varDelta} &= -\tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varkappa\partial\lambda}\right)^2\right),\\
j_{\varkappa u-\lambda\varDelta} &= \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial i_{\varkappa u-\lambda\varDelta}}{\partial\varkappa}-\frac{\partial\varphi}{\partial\varkappa}\frac{\partial i_{\varkappa u-\lambda\varDelta}}{\partial\lambda}\right),\\
T_{\varkappa u-\lambda\varDelta} &= T.\varphi,
\end{aligned}$$

und zwischen T, u, $\varDelta$ besteht die Gleichung:

$$T^2 = -\varphi(\varDelta, u).$$

Ich werde mich im Folgenden mit den Bildungen beschäftigen, welche aus der Combination von T mit $\varkappa u-\lambda\varDelta$ hervorgehen, sowie mit den Covarianten und Invarianten von T selbst.

Bezeichnen wir durch y_1, y_2 die beiden Ausdrücke

$$(1.)\qquad y_1 = -\varkappa u_2+\lambda\varDelta_2, \qquad y_2 = \varkappa u_1-\lambda\varDelta_1,$$

---

*) Ich bezeichne für eine Form φ n^{ten} Grades durch φ_i, φ_{ik} etc. die Ausdrücke $\frac{1}{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $\frac{1}{n.n-1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}$, etc.

und durch f' dasjenige, was aus einer Function n^{ter} Ordnung f entsteht, wenn darin statt x_1, x_2 die Ausdrücke

$$x_1' = x_1+y_1, \quad x_2' = x_2+y_2$$

gesetzt werden. Wendet man für f den symbolischen Ausdruck

$$u = (a_1x_1+a_2x_2)^n$$

an, und entwickelt in dieser Form f' nach Potenzen der y:

$$f' = f+nD(f)+\frac{n.n-1}{1.2}D^2(f)+\cdots$$

so hat man symbolisch:

$$D(f) = (a_1x_1+a_2x_2)^{n-1}(a_1y_1+a_2y_2),$$
$$D^2(f) = (a_1x_1+a_2x_2)^{n-2}(a_1y_1+a_2y_2)^2,$$
$$D^3(f) = (a_1x_1+a_2x_2)^{n-3}(a_1y_1+a_2y_2)^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Für diese Ausdrücke erhält man Recursionsformeln, indem man verfährt, wie Herr *Hesse* im 36sten Bd., p. 156 dieses Journals. Es wird nämlich offenbar

$$(2.)\quad\begin{cases} \dfrac{\partial D^k(f)}{\partial x_1}y_1+\dfrac{\partial D^k(f)}{\partial x_2}y_2 = (n-k)D^{k+1}(f) \\ +k(a_1x_1+a_2x_2)^{n-k}(a_1y_1+a_2y_2)^{k-1}\left\{y_1\left(a_1\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+a_2\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)+y_2\left(a_1\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}+a_2\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)\right\}. \end{cases}$$

Der letzte eingeklammerte Ausdruck kann umgestaltet werden, indem man $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ durch $-\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$ und $\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$ durch $-\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ ersetzt. Er verwandelt sich dann in:

$$a_1\left(y_2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}-y_1\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)+a_2\left(y_1\frac{\partial y_2}{\partial x_1}-y_2\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)$$

$$= -\frac{a_1x_1+a_2x_2}{3}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}-\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right) = -3(a_1x_1+a_2x_2)\begin{vmatrix} \varkappa u_{11}-\lambda\Delta_{11} & \varkappa u_{12}-\lambda\Delta_{12} \\ \varkappa u_{12}-\lambda\Delta_{12} & \varkappa u_{22}-\lambda\Delta_{22}\end{vmatrix}$$

$$= -3(a_1x_1+a_2x_2)\Delta_{\varkappa u-\lambda\Delta}.$$

Die Formel (2.) giebt daher

$$\frac{\partial D^k(f)}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial D^k(f)}{\partial x_2}y_2 = (n-k)D^{k+1}(f)-3kD^{k-1}(f).\Delta_{\varkappa u-\lambda\Delta},$$

und man hat für $D^{k+1}(f)$ die Recursionsformel:

$$D^{k+1}(f) = \frac{1}{n-k}\left(\frac{\partial D^k(f)}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial D^k(f)}{\partial x_2}y_2\right)+\frac{3k}{n-k}D^{k-1}(f)\Delta_{\varkappa u-\lambda\Delta},$$

oder wenn man durch $\delta\psi$ die Operation

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}y_2$$

bezeichnet:

$$(3.)\qquad D^{(k+1)}(f) = \frac{1}{n-k}\delta D^k(f) + \frac{3k}{n-k} D^{k-1}(f).\varDelta_{\varkappa u-\lambda\varDelta}.$$

Im Folgenden werde ich durch φ, φ', φ'', φ''' die vier Ausdrücke bezeichnen, welche aus der Entwicklung von

$$\varphi(\varkappa+\varepsilon\varDelta, \lambda+\varepsilon u) = \varphi+3\varepsilon\varphi'+3\varepsilon^2\varphi''+\varepsilon^3\varphi'''$$

entstehen; so dass also

$$\varphi = \varphi(\varkappa, \lambda),\quad \varphi' = \tfrac{1}{3}\Big(\frac{\partial\varphi(\varkappa,\lambda)}{\partial\varkappa}.\varDelta+\frac{\partial\varphi(\varkappa,\lambda)}{\partial\lambda}.u\Big),$$

$$\varphi''' = \varphi(\varDelta, u),\quad \varphi'' = \tfrac{1}{3}\Big(\frac{\partial\varphi(\varDelta,u)}{\partial\varDelta}.\varkappa+\frac{\partial\varphi(\varDelta,u)}{\partial u}.\lambda\Big).$$

Dann ist unter anderem

$$(4.)\qquad T^2 = -\varphi''',\quad \varDelta_{\varkappa u-\lambda\varDelta} = \varphi'.$$

Ferner hat man durch Anwendung der Operation δ die Formeln:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \delta u = (u_1 y_1+u_2 y_2) = 4\lambda T, \\ \delta\varDelta = (\varDelta_1 y_1+\varDelta_2 y_2) = 4\varkappa T; \end{cases}$$

und sodann aus (4.):

$$2T\delta T = -\delta\varphi''' = -\Big(\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}\delta u+\frac{\partial\varphi'''}{\partial\varDelta}\delta\varDelta\Big) = -12T.\varphi'',$$

also

$$(6.)\qquad \delta T = -6\varphi''.$$

Ebenso aus der zweiten Formel (4.):

$$(7.)\qquad \delta\varDelta_{\varkappa u-\lambda\varDelta} = \delta\varphi' = 4T\Big(\varkappa\frac{\partial\varphi'}{\partial\varDelta}+\lambda\frac{\partial\varphi'}{\partial u}\Big) = 4T.\varphi,$$

und durch fortgesetzte Differentiation aus (6.)

$$(8.)\qquad \begin{cases} \delta^2 T = -6\delta\varphi'' = -24T\Big(\frac{\partial\varphi''}{\partial\varDelta}\varkappa+\frac{\partial\varphi''}{\partial u}\lambda\Big) = -48T.\varphi', \\ \delta^3 T = -48(4T^2\varphi-6\varphi'\varphi''). \end{cases}$$

Setzen wir jetzt

$$f = \varrho u-\sigma\varDelta,$$

und bilden die Entwicklungscoefficienten (3.). Da hienach $\delta f = 4Tr$, wo r die Determinante $r = \varrho\lambda-\sigma\varkappa$ bedeutet, so erkennt man sofort, dass $D^k(f)$ die Form hat:

$$D^k(f) = M_k.f+N_k.r,\qquad (r = \varrho\lambda-\sigma\varkappa),$$

wo M_k und N_k die ϱ, σ nicht mehr enthalten. Führt man diesen Ausdruck

in (3.) ein, so zerfällt die Recursionsformel in die beiden:

$$(9.)\quad \begin{cases} M_{k+1} = \frac{1}{4-k}\,\delta M_k + \frac{3k}{n-k} M_{k-1}.\varphi', \\ N_{k+1} = \frac{1}{4-k}(\delta N_k + 4TM_k) + \frac{3k}{n-k} N_{k-1}.\varphi', \end{cases}$$

und für $k=0$ hat man

$$M_0 = 1, \qquad N_0 = 0,$$

für $k=1$ aber

$$D(f) = \tfrac{1}{4}\delta f = rT, \quad \text{also}$$
$$M_1 = 0, \qquad N_1 = T.$$

Die Anwendung der Formeln (9.) giebt nun:

$$M_2 = \tfrac{1}{3}\delta M_1 + M_0\varphi' = \varphi',$$
$$M_3 = \tfrac{1}{2}\delta M_2 + 3M_1\varphi' = \tfrac{1}{2}\delta\varphi' = 2T.\varphi,$$
$$M_4 = \delta M_3 + 9M_2\varphi' = 2\varphi\delta T + 9\varphi'^2 = 9\varphi'^2 - 12\varphi\varphi'';$$

und sodann aus der zweiten Gleichung (9.) mit Benutzung dieser Werthe:

$$N_2 = \tfrac{1}{3}(\delta N_1 + 4TM_1) + N_0\varphi' = \tfrac{1}{3}\delta T = -2\varphi'',$$
$$N_3 = \tfrac{1}{2}(\delta N_2 + 4TM_2) + 3N_1\varphi' = -\delta\varphi'' + 2T\varphi' + 3T\varphi' = -3T\varphi',$$
$$N_4 = \delta N_3 + 4TM_3 + 9N_2\varphi' = -3(T\delta\varphi' + \varphi'\delta T) + 8T^2\varphi - 18\varphi'\varphi'' = -4T^2\varphi.$$

Man hat also die Darstellungen:

$$(10.)\quad \begin{cases} D\,(\varrho u - \sigma\Delta) = 4rT, \\ D^2(\varrho u - \sigma\Delta) = \varphi'(\varrho u - \sigma\Delta) - 2\varphi''(\varrho\lambda - \sigma\varkappa), \\ D^3(\varrho u - \sigma\Delta) = 2T\varphi(\varrho u - \sigma\Delta) - 3\varphi' T(\varrho\lambda - \sigma\varkappa), \\ D^4(\varrho u - \sigma\Delta) = (9\varphi'^2 - 12\varphi\varphi'')(\varrho u - \sigma\Delta) - 4T^2\varphi(\varrho\lambda - \sigma\varkappa). \end{cases}$$

Ich werde jetzt zweitens die Formel (3.) auf die Function $f = T$ anwenden. In diesem Falle ist

$$D(f) = \tfrac{1}{6}\delta T = -\varphi'',$$

daher weiter nach (3.):

$$(11.)\quad \begin{cases} D^2(T) = \tfrac{1}{30}\delta^2 T + \tfrac{3}{5}T\varphi' = -T\varphi', \\ D^3(T) = \tfrac{1}{4}(T\delta\varphi' + \varphi'\delta T) + \tfrac{1}{4}\varphi'\delta T = -T^2\varphi, \\ D^4(T) = -\tfrac{2}{3}T\varphi\delta T - 3\varphi'^2 T = 4T\varphi\varphi'' - 3\varphi'^2 T, \\ D^5(T) = 2\varphi(\varphi''\delta T + T\delta\varphi'') - 3T\varphi'\delta\varphi' - \tfrac{3}{2}\varphi'^2\delta T - 6T^2\varphi\varphi' \\ \qquad = -12\varphi\varphi'^2 + 9\varphi'^2\varphi'' - 2T^2\varphi\varphi', \\ D^6(T) = -24\varphi\varphi''\delta\varphi'' + 9\varphi'^2\delta\varphi'' + 18\varphi'\varphi''\delta\varphi' - 4\varphi\varphi' T\delta T - 2T^2\varphi\delta\varphi' \\ \qquad + 15(4T\varphi\varphi'' - 3\varphi'^2 T) \\ \qquad = -8T^3\varphi^2 + 27\varphi'^2 T - 36\varphi\varphi'\varphi'' T. \end{cases}$$

Die verschiedenen aus u, Δ, T entspringenden Formen erhält man, indem man zunächst diese Functionen für die Variabeln $x_1+\varepsilon y_1$, $x_2+\varepsilon y_2$ bildet und nach Potenzen von ε entwickelt. Die hiedurch entstehenden Reihen seien:

$$(12.)\quad \begin{cases} u+4\varepsilon\, u^{(1)}+6\varepsilon^2 u^{(2)}+4\varepsilon^3 u^{(3)}+\varepsilon^4 u^{(4)}, \\ \Delta+4\varepsilon\,\Delta^{(1)}+6\varepsilon^2\Delta^{(2)}+4\varepsilon^3\Delta^{(3)}+\varepsilon^4\Delta^{(4)}, \\ T+6\varepsilon\, T^{(1)}+15\varepsilon^2 T^{(2)}+20\varepsilon^3 T^{(3)}+15\varepsilon^4 T^{(4)}+6\varepsilon^5 T^{(5)}+\varepsilon^6 T^{(6)} \end{cases}$$

Betrachtet man irgend welche der hier auftretenden Glieder als Functionen der y allein, indem man die x constant denkt, und bildet irgend eine simultane Invariante derselben, so wird dieselbe mit Rücksicht auf die x eine aus u, T und Δ hervorgehende Covariante, resp. Invariante.

Aber die Glieder der Reihen (12.) gehen durch die linearen Substitutionen (1.), deren Determinante gleich T ist, in die Functionen

$$(13.)\qquad D^{(k)}(u),\quad D^{(k)}(\Delta),\quad D^{(k)}(T)$$

der Variabeln $\varkappa$, λ über. *Man erhält daher die in Rede stehenden Formen, indem man die betreffenden simultanen Invarianten für die Ausdrücke* (13.) *bildet, und durch eine entsprechende Potenz von T dividirt.*

Da die Coefficienten der Formen (13.) bereits Functionen von u, Δ, T sind, so erhält man auf diese Weise die gesuchten Formen direct durch u, Δ, T ausgedrückt.

Die sonach auszuführenden Processe sind Bildungen von Invarianten der Ausdrücke (10.), (11.) in Bezug auf $\varkappa$, λ. Diese Ausdrücke sind Combinationen der drei Functionen von $\varkappa$, λ, welche durch φ, φ', φ'' bezeichnet wurden. Um die Invariantenbildungen zu erleichtern, werde ich nun zunächst diese Formen ähnlich umgestalten, wie es soeben mit den Ausdrücken (13.) geschehen ist.

Es sei

$$(14.)\quad \begin{cases} \xi = \varkappa u-\lambda\Delta, \\ \eta = \frac{1}{3}\left(\varkappa\dfrac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}+\lambda\dfrac{\partial\varphi'''}{\partial u}\right)=\varphi'', \end{cases}$$

oder wenn man nach $\varkappa$, λ auflöst:

$$(15.)\quad \begin{cases} \varphi'''.\varkappa = \eta\Delta+\dfrac{\xi}{3}\dfrac{\partial\varphi'''}{\partial u}, \\ \varphi'''.\lambda = \eta u-\dfrac{\xi}{3}\dfrac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}. \end{cases}$$

In Folge dieser Gleichungen hat man

$$\varphi'''^3\{\varphi+3\varepsilon\varphi'+3\varepsilon^2\varphi''+\varepsilon^3\varphi'''\} = \varphi'''^3.\varphi(x+\varepsilon\Delta, \lambda+\varepsilon u)$$
$$= \varphi\Big((\eta+\varepsilon\varphi''')\Delta+\frac{\xi}{3}\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}, (\eta+\varepsilon\varphi''')u-\frac{\xi}{3}\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}\Big),$$

oder wenn man nach Potenzen von $\zeta=\eta+\varepsilon\varphi'''$ entwickelt:

$$= \zeta^3\varphi'''+3\zeta^2\xi\,\mathrm{D}(\varphi''')+3\zeta\xi^2\mathrm{D}^2(\varphi''')+\xi^3\mathrm{D}^3(\varphi''');$$

und nach Berechnung von $\mathrm{D}(\varphi''')$, $\mathrm{D}^2(\varphi''')$, $\mathrm{D}^3(\varphi''')$ hat man aus Vergleichung der Coefficienten:

$$(16.)\quad \begin{cases} \varphi'''^3.\varphi &= \eta^3\varphi'''+3\eta^2\xi\,\mathrm{D}(\varphi''')+3\eta\xi^2\mathrm{D}^2(\varphi''')+\xi^3\mathrm{D}^3(\varphi'''),\\ \varphi'''^2.\varphi' &= \eta^2\varphi'''+2\eta\xi\,\mathrm{D}(\varphi''')+\xi^2\mathrm{D}^2(\varphi'''),\\ \varphi'''.\varphi'' &= \eta\varphi'''+\xi\mathrm{D}(\varphi'''). \end{cases}$$

Setzt man symbolisch

$$\varphi=(\alpha x+\beta\lambda)^3,\quad \varphi'''=(\alpha\Delta+\beta u)^3,$$

so ist

$$\mathrm{D}\,(\varphi''') = (\alpha\Delta+\beta u)^2\Big(\frac{\alpha}{3}\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}-\frac{\beta}{3}\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}\Big),$$
$$\mathrm{D}^2(\varphi''') = (\alpha\Delta+\beta u)\Big(\frac{\alpha}{3}\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}-\frac{\beta}{3}\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}\Big)^2,$$
$$\mathrm{D}^3(\varphi''') = \Big(\frac{\alpha}{3}\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}-\frac{\beta}{3}\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}\Big)^3.$$

Der erste dieser Ausdrücke verschwindet offenbar identisch. Ausserdem ist, wie man sofort sieht:

$$\tfrac{1}{3}\Big(\frac{\partial\mathrm{D}^k(\varphi''')}{\partial\Delta}\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}-\frac{\partial\mathrm{D}^k(\varphi''')}{\partial u}\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}\Big)$$
$$= (3-k)\,\mathrm{D}^{k+1}(\varphi''')+k(\alpha\Delta+\beta u)^{3-k}\Big(\frac{\alpha}{3}\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}-\frac{\beta}{3}\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}\Big)^{k-1}$$
$$\times\tfrac{1}{9}\Big(\alpha\Big(\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial u\partial\Delta}\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}-\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial u^2}\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}\Big)-\beta\Big(\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial\Delta^2}\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}-\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial\Delta\partial u}\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}\Big)\Big)$$
$$= (3-k)\mathrm{D}^{k+1}(\varphi''')-\frac{k}{18}\mathrm{D}^{k-1}(\varphi''').\Big(\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial u^2}\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial\Delta^2}-\Big(\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial u\partial\Delta}\Big)^2\Big).$$

Setzen wir also der Kürze wegen

$$H = \tfrac{1}{36}\Big(\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial u^2}\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial\Delta^2}-\Big(\frac{\partial^2\varphi'''}{\partial u\partial\Delta}\Big)^2\Big),$$

so haben wir die Recursionsformel

$$\mathrm{D}^{k+1}(\varphi''') = \frac{1}{3(3-k)}\Big(\frac{\partial\mathrm{D}^k(\varphi''')}{\partial\Delta}\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}-\frac{\partial\mathrm{D}^k(\varphi''')}{\partial u}\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}\Big)+\frac{2k}{3-k}\mathrm{D}^{k-1}(\varphi''').H.$$

Daher für $k=1$ und $k=2$:

$$\mathrm{D}^2(\varphi''') = H.\varphi''',$$

$$\mathrm{D}^3(\varphi''') = \frac{\varphi'''}{3}\left(\frac{\partial H}{\partial \varDelta}\frac{\partial \varphi'''}{\partial u}-\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial \varphi'''}{\partial \varDelta}\right).$$

Und somit erhalten wir aus (16.) die Darstellungen:

$$(17.)\quad \begin{cases} \varphi'''^2.\varphi = \eta^3+3\eta\xi^2H+K\xi^3, \\ \varphi'''.\varphi' = \eta^2+H\xi^2, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen

$$(18.)\quad K = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\partial H}{\partial \varDelta}\frac{\partial \varphi'''}{\partial u}-\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial \varphi'''}{\partial \varDelta}\right)$$

gesetzt ist.

Da die Determinante der Substitution (14.) $-T^2=\varphi'''$ ist, so kann man die Invariantenbildungen für die Systeme (10.), (11.) auch an den Ausdrücken vornehmen, welche durch die Substitution (14.) aus denselben entstehen, und erhält noch immer die gesuchten Formen bis auf Potenzen von $\pm T$. Die Formeln (10.), (11.) aber gehen nunmehr über in folgende:

$$(19.)\quad \begin{cases} T^2D^2(\varrho u-\sigma\varDelta) = (\eta^2-H\xi^2)(\varrho u-\sigma\varDelta)-\tfrac{2}{3}\xi\eta\left(\varrho\frac{\partial\varphi'''}{\partial\varDelta}+\sigma\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}\right), \\ -T^3D^3(\varrho u-\sigma\varDelta) = (\eta^3-3H\eta\xi^2-2K\xi^3)(\varrho u-\sigma\varDelta) \\ \qquad\qquad -\xi(\eta^2+H\xi^2)\left(\varrho\frac{\partial\varphi'''}{\partial\varDelta}+\sigma\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}\right), \\ T^4D^4(\varrho u-\sigma\varDelta) = (\eta^4-6H\xi^2\eta^2-8K\xi^3\eta+9H^2\xi^4)(\varrho u-\sigma\varDelta) \\ \qquad\qquad -\tfrac{4}{3}\xi(\eta^3+3\eta\xi^2H+K\xi^3)\left(\varrho\frac{\partial\varphi'''}{\partial\varDelta}+\sigma\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}\right), \end{cases}$$

$$(20.)\quad \begin{cases} T\,D^2(T) = \eta^2+H\xi^2, \\ -T^2D^3(T) = \eta^3+3\eta\xi^2H+K\xi^3, \\ T^3D^4(T) = \eta^4+6H\xi^2\eta^2+4K\xi^3\eta-3H^2\xi^4, \\ -T^4D^5(T) = \eta^5+10\eta^3\xi^2H+10K\xi^3\eta^2-15H^2\xi^4\eta-2KH\xi^5, \\ T^5D^6(T) = \eta^6+15\eta^4\xi^2H+20K\xi^3\eta^3-45H^2\xi^4\eta^2-12HK\xi^5\eta-(8K^2+27H^3)\xi^6. \end{cases}$$

Bemerken wir übrigens hiezu noch folgendes. Wenn man die Substitutionen (1.) und (15.) vereinigt, so findet man

$$\varphi'''.y_1 = \eta(\varDelta_2u-\varDelta u_2)-\frac{\xi}{3}\left(\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}u_2+\frac{\partial\varphi'''}{\partial\varDelta}\varDelta_2\right) = x_1\eta T-\frac{\xi}{12}\frac{\partial\varphi'''}{\partial x_2},$$

$$\varphi'''.y_2 = -\eta(\varDelta_1u-\varDelta u_1)+\frac{\xi}{3}\left(\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}u_1+\frac{\partial\varphi'''}{\partial\varDelta}\varDelta_2\right) = x_2\eta T-\frac{\xi}{12}\frac{\partial\varphi'''}{\partial x_1},$$

oder wenn man für φ''' seinen Werth $-T^2$ setzt:

$$(21.)\quad \begin{cases} y_1 = -\frac{\eta}{T}x_1 - \frac{\xi}{T}T_2, \\ y_2 = -\frac{\eta}{T}x_2 + \frac{\xi}{T}T_1. \end{cases}$$

Die verschiedenen $D^k(f)$ sind also die Glieder der Entwickelung nach Dimensionen von ξ, η für eine Function von f, welche mit den Argumenten

$$x_1\left(1-\frac{\eta}{T}\right)-\frac{\xi}{T}T_2,$$
$$x_2\left(1-\frac{\eta}{T}\right)+\frac{\xi}{T}T_1$$

geschrieben wird. Nach den Gleichungen (19.), (20.) sind also, wenn man wie früher durch einen oberen Strich diese Argumente andeutet, die Functionen $\varrho u'-\sigma\Delta'$ und T' durch die Entwickelungen dargestellt:

$$(22.)\quad \begin{cases} \varrho u'-\sigma\Delta' = (\varrho u-\sigma\Delta)\left\{\left(1-\frac{\eta}{T}\right)^4-6\xi^2\left(1-\frac{\eta}{T}\right)^2-8K\xi^3\left(1-\frac{\eta}{T}\right)+9H^2\xi^4\right\} \\ \qquad +\frac{1}{3}\xi\left(\varrho\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}+\sigma\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}\right)\left\{\left(1-\frac{\eta}{T}\right)^3+3H\xi^2\left(1-\frac{\eta}{T}\right)+K\xi^3\right\}, \\ T' = T\left\{\left(1-\frac{\eta}{T}\right)^6+15H\xi^2\left(1-\frac{\eta}{T}\right)^4+20K\xi^3\left(1-\frac{\eta}{T}\right)^3\right. \\ \qquad \left.-45H^2\xi^4\left(1-\frac{\eta}{T}\right)^2-12HK\xi^5\left(1-\frac{\eta}{T}\right)+(8K^2+27H^3)\xi^6\right\} \end{cases}$$

Hiedurch werden die Beziehungen zwischen den Coefficienten der verschiedenen Gleichungen (19.), (20.) sofort verständlich. Die Gleichungen (21.) sind dieselben, von denen ausgehend Herr *Hermite* seine Theorie der *„formes associées"* auf die binären Formen vierter Ordnung angewandt hat (Bd. 52 dieses Journals p. 21 folg.). Will man aber direct von ihnen ausgehend die Gleichungen (22.) ableiten, so ist die Kenntniss der Determinante von T erforderlich, welche hier durch vorherige Anwendung der Substitutionen (1.) vermieden wird.

Die Determinante der Substitutionen (21.) ist $-\frac{1}{T}$; man muss also die Invarianten, welche aus den Functionen $D^k(\varrho u-\sigma\Delta)$, $D^h(T)$ (19.), (20.) entspringen, mit der entsprechenden Potenz von $-T$ multipliciren.

Ich werde jetzt die nächstliegenden Covarianten, welche als simultane Invarianten des Systems (19.), (20.) erscheinen, bilden.

1. Die Function

$$\frac{1}{12.30}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \varrho u-\sigma\Delta}{\partial x_2^2}-2\frac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 \varrho u-\sigma\Delta}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \varrho u-\sigma\Delta}{\partial x_1^2}\right\}$$

entsteht, wenn man die entsprechende Invariante der Functionen $D^2(\varrho u-\sigma\Delta)$, $D^2(T)$ in der Form (19.), (20.) mit T^2 multiplicirt; sie ist also gleich

$$T^2\left\{\frac{\varrho u-\sigma\Delta}{T^2}\cdot\frac{H}{T}-H\frac{\varrho u-\sigma\Delta}{T^2}\cdot\frac{1}{T}\right\} = 0;$$

sie verschwindet identisch.

2. Die Function

$$\frac{1}{30.30}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right\}$$

ist die Determinante von $D^2(T)$ (20.), multiplicirt mit T^2, also gleich H.

Die Determinante von T entsteht aus $-\frac{1}{12}i_{xu-\lambda\Delta}$, ***wenn darin*** Δ ***für*** x, u ***für*** λ ***gesetzt wird.***

3. Die Function

$$\frac{1}{24.120}\left\{\frac{\partial^3 T}{\partial x_1^3}\frac{\partial^3 \varrho u-\sigma\Delta}{\partial x_2^3}-3\frac{\partial^3 T}{\partial x_1^2\partial x_2}\frac{\partial^3 \varrho u-\sigma\Delta}{\partial x_1\partial x_2^2}+3\frac{\partial^3 T}{\partial x_1\partial x_2^2}\frac{\partial^3 \varrho u-\sigma\Delta}{\partial x_1^2\partial x_2}-\frac{\partial^3 T}{\partial x_2^3}\frac{\partial^3 \varrho u-\sigma\Delta}{\partial x_1^3}\right\}$$

ist $-T^3$ multiplicirt mit der betreffenden Invariante von $D^3(T)$ und $D^3(\varrho u-\sigma\Delta)$, also gleich:

$$\frac{1}{T^3}\left\{3K(\varrho u-\sigma\Delta)+\frac{2H}{3}\left(\varrho\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}+\sigma\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}\right)\right\}.$$

Setzt man darin für $3K$ seinen Werth aus (18.), und für $2H$ den Ausdruck

$$2H = u\frac{\partial H}{\partial u}+\Delta\frac{\partial H}{\partial\Delta},$$

so wird dies:

$$-\frac{1}{T^3}\begin{vmatrix}\varrho u-\sigma\Delta & \frac{\partial H}{\partial u}u+\frac{\partial H}{\partial\Delta}\Delta\\ \varrho\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}+\sigma\frac{\partial\varphi'''}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta}-\frac{\partial H}{\partial\Delta}\frac{\partial\varphi'''}{\partial u}\end{vmatrix} = -\frac{1}{T^3}\begin{vmatrix}\varrho & \sigma\\ \frac{\partial H}{\partial u} & -\frac{\partial H}{\partial\Delta}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}u & -\Delta\\ \frac{\partial\varphi'''}{\partial\Delta} & \frac{\partial\varphi'''}{\partial u}\end{vmatrix}$$

$$= \frac{3\varphi'''}{T^3}\left(\varrho\frac{\partial H}{\partial\Delta}+\sigma\frac{\partial H}{\partial u}\right) = -3\left(\varrho\frac{\partial H}{\partial\Delta}+\sigma\frac{\partial H}{\partial u}\right).$$

4. Die Function

$$\frac{1}{24.360}\left\{\frac{\partial^4 T}{\partial x_1^4}\frac{\partial^4 \varrho u-\sigma\Delta}{\partial x_2^4}-4\frac{\partial^4 T}{\partial x_1^3\partial x_2}\frac{\partial^4 \varrho u-\sigma\Delta}{\partial x_1\partial x_2^3}+\cdots-\frac{\partial^4 T}{\partial x_2^4}\frac{\partial^4 \varrho u-\sigma\Delta}{\partial x_1^4}\right\}$$

ist gleich T^4 multiplicirt mit der entsprechenden simultanen Invariante von $D^4(T)$ und $D^4(\varrho u-\sigma\Delta)$. Man erkennt aus (19.), (20.) sofort ihr Verschwinden; welches a priori daraus klar ist, dass diese Form in den x vom zweiten Grade ist.

5. Die Function

$$\frac{1}{360.360}\left\{\frac{\partial^4 T}{\partial x_1^4}\frac{\partial^4 T}{\partial x_2^4}-4\frac{\partial^4 T}{\partial x_1^3\partial x_2}\frac{\partial^4 T}{\partial x_1\partial x_2^3}+3\left(\frac{\partial^4 T}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\right)^2\right\}$$

ist gleich T^4 multiplicirt mit der ersten Invariante von $D^4(T)$, also gleich

$$\frac{1}{T^4}(-3H^2+3H^2) = 0.$$

Es ist dieses die fundamentale Covariante vierter Ordnung der Function sechster Ordnung T, und ihr Verschwinden für dieselbe charakteristisch. Vergl. *Clebsch* und *Gordan*, Annali di matematica ser. II. tomo I. pag. 78.

6. Die Invariante

$$\frac{1}{720.720}\left(\frac{\partial^6 T}{\partial x_1^6}\frac{\partial^6 T}{\partial x_2^6}-6\frac{\partial^6 T}{\partial x_1^5\partial x_2}\frac{\partial^6 T}{\partial x_1\partial x_2^5}+15\frac{\partial^6 T}{\partial x_1^4\partial x_2^2}\frac{\partial^6 T}{\partial x_1^2\partial x_2^4}-10\left(\frac{\partial^6 T}{\partial x_1^3\partial x_2^3}\right)^2\right)$$

ist gleich T^6 multiplicirt mit der entsprechenden Invariante von $D^6(T)$, also gleich

$$\frac{1}{T^4}(-8K^2-27H^3-45H^3-10K^2) = -\frac{18}{T^4}(K^2+4H^3).$$

Nun ist nach der Theorie der binären cubischen Formen

$$K^2+4H^3 = -4R\varphi'''^2,$$

wo R die Discriminante der cubischen Form φ''' bezeichnet. Man hat also hier

$$R = \frac{1}{12^3}(i^3-27j^2),$$

also

$$K^2+4H^3 = -\frac{4T^4}{12^3}(i^3-27j^2),$$

daher wird endlich die gesuchte Invariante gleich

$$\frac{1}{24}(i^3-27j^2).$$

Vergl. *Hermite*, Bd. 52 dieses Journals, p. 36. Dieses ist die einzige Invariante von T. Da für T die fundamentale Covariante vierter Ordnung verschwindet, so sind alle übrigen Invarianten entweder Null, oder Potenzen der ersteren. Es ist übrigens sehr leicht, durch die oben gegebenen Formeln weitere Invarianten von T zu berechnen, wie überhaupt die hier gegebenen Beispiele simultaner Formen von u, Δ, T beliebig zu vermehren, ohne dass man nöthig hat, auf die canonische Form von u, Δ, T zurückzugehen.

Giessen, den 12. Juni 1867.

